

$$d \overset{\mathbf{r}}{\underline{\underline{F}}}^0 = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot d \overset{\mathbf{r}}{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}} \cdot d \overset{\mathbf{r}}{\underline{\underline{A}}}^0 = J \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \right)^T \cdot d \overset{\mathbf{r}}{\underline{\underline{A}}}^0$$

$$\underline{\underline{T}}^0 = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}} = J \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \right)^T$$

$\underline{\underline{T}}^0$ II. Piola – Kirchhoff – féle feszültségi tenzor a kezdeti konfigurációban. Szimmetrikus tenzor.

Így: $d \overset{\mathbf{r}}{\underline{\underline{F}}}^0 = \underline{\underline{T}}^0 \cdot d \overset{\mathbf{r}}{\underline{\underline{A}}}^0$

Az alakváltozás lineáris elméletében:

$$d \overset{\mathbf{r}}{\underline{\underline{A}}} = d \overset{\mathbf{r}}{\underline{\underline{A}}}^0; \quad l_A = \frac{d A}{d A^0} = 1; \quad l_V = \frac{d V}{d V^0} = 1$$

A három feszültségi tenzor $(\underline{\underline{T}}, \underline{\underline{S}}, \underline{\underline{T}}^0)$ azonos.

Helyettük:

$$d \overset{\mathbf{r}}{\underline{\underline{F}}} = \underline{\underline{S}} \cdot d \overset{\mathbf{r}}{\underline{\underline{A}}}; \quad \overset{\mathbf{r}}{r}_n = \underline{\underline{S}} \cdot \overset{\mathbf{r}}{n} \quad \text{használható.}$$

Peremfeltételek:

A kontinuum felületén (peremén) értelmezett egyenletek, megadják a jellemző vektor- és tenzormezők ott felvett értékeit és a rájuk vonatkozó korlátozásokat.

Két alapvető típus:

- Kinematikai peremfeltétel: a felület (A_v) vagy (A_u) részén előírjuk a $\overset{\mathbf{r}}{v}$ - t vagy $\overset{\mathbf{r}}{u}$ - t.

$$\overset{\mathbf{r}}{v} = \overset{\mathbf{r}}{v} \quad x \in A_v \quad \text{sebességi peremfeltétel}$$

$$\overset{\mathbf{r}}{u} = \overset{\mathbf{r}}{u} \quad x \in A_u \quad \text{elmozdulási peremfeltétel}$$

- Dinamikai vagy feszültségi peremfeltétel: a teljes felület A_p részén előírt a felületen megoszló ER sűrűsége.

$$\overset{\mathbf{r}}{r}_n = \underline{\underline{T}} \cdot \overset{\mathbf{r}}{n} = \overset{\mathbf{r}}{p} \quad x \in A_p$$

További típus: vegyes peremfeltétel

Ugyanazon a felületrészen részben kinematikai, részben feszültségi előírások vannak.

- Pl. A_{m1} felületrészen előírtak: - normálirányú feszültség $\tilde{p}_n$
 - normálisra merőleges sebesség $\mathbf{v}_A$

$$\mathbf{n} \cdot \underline{T} \cdot \mathbf{n} = \tilde{p}_n \quad x \in A_{m1}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n}) = \mathbf{v} - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{v}_A$$

Fordítva is szerepelhetnek, illetve a sebesség helyett elmozdulás is lehet.
 A felületrészeknek együtt a teljes területet kell adni.

A peremfeltételekre mindig fennáll:

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}) \cdot (\underline{T} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}) = 0$$

vagy

$$(\mathbf{u} - \mathbf{u}) \cdot (\underline{T} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{p}) = 0$$

A $\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{u}$ - ra két eset lehetséges:

- adott pontban az egyik vektor adott
- normál és érintő síkba eső kiegészítő pár adott

Az alakváltozás lineáris elméletében a Cauchy – féle $\underline{T}$ helyett $\underline{s}$ szerepel a peremfeltételeknél.

Az alakváltozás lineáris elméletében $\underline{e}$ - ra további peremfeltételek írhatók fel.

Csak felsorolva ezeket:

- kompatibilitási peremfeltétel
- alakváltozási peremfeltétel
- csatlakozási peremfeltétel

A kontinuummechanika alaptörvényei

A tömegmegmaradás elve:

Tömegsűrűség:

Kezdeti konfigurációban: ρ^0

Pillanatnyi konfigurációban: ρ

$$\rho^0 dV^0 = \rho dV = dm \quad \text{mindig fennáll}$$

Átalakítva:

$$\rho = \frac{1}{l_v} \rho^0 = \frac{1}{1 + e_v^0} \rho^0 = \frac{1}{\sqrt{C_{III}^0}} \rho^0 = \sqrt{(B^{-1})_{III}} \rho^0$$

$$l_v > 0 \quad J = l_v > 0$$

Az alakváltozás lineáris elméletében: $\rho = \rho^0$

$$m = \int_{(V)} r \, dV$$

A tömegmegmaradás elve:

$$\dot{m} = \left(\int_{(V)} r \, dV \right)^{\cdot} = 0$$

Átalakítva:

$$\begin{aligned} \int_{(V)} (r^{\cdot} \, dV + r \, dV^{\cdot}) &= 0 \\ \int_{(V)} (r^{\cdot} + r (\mathbf{v} \cdot \nabla)) \, dV &= 0 \end{aligned}$$

(V) tetszőleges, ezért

$$r^{\cdot} + r (\mathbf{v} \cdot \nabla) = 0 \quad \text{kontinuitási egyenlet}$$

A $r^{\cdot} = \frac{\partial r}{\partial t} + (r \nabla) \cdot \mathbf{v}$ materiális idő szerinti deriváltat felhasználva a másik alakja:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (r \nabla) \cdot \mathbf{v} + r (\mathbf{v} \cdot \nabla) = \frac{\partial r}{\partial t} + (r \mathbf{v}) \cdot \nabla = 0$$

A kontinuitási egyenlet felírása másként:

$$m^{\cdot} = \int_{(B)} \frac{\partial r}{\partial t} \, dV + \int_{(S)} r \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad \begin{array}{l} \text{B - a vonatkoztatási KR helytálló tértartománya} \\ \text{S - ennek a felülete} \end{array}$$

A Gauss-féle integrálatalakítási tétellel:

$$m^{\cdot} = \int_{(B)} \left[\frac{\partial r}{\partial t} + (r \mathbf{v}) \cdot \nabla \right] dV = 0$$

Mivel B tetszőleges, ezért

$$\frac{\partial r}{\partial t} + (r \mathbf{v}) \cdot \nabla = 0 \quad \text{kontinuitási egyenlet}$$

Összenyomhatatlan (inkompresszibilis) kontinuum esetén:

$$l_v = 1; \quad e_v = 0 \rightarrow r = r^0; \quad \dot{r} = 0 \rightarrow D_I = \dot{\mathbf{r}} \cdot \nabla = 0$$

A dinamika alaptétele:

A kontinuum vagy bármely kontinuumrész kinetikai VR-e - (ennek $\dot{\mathbf{a}} r$ a sűrűségvektora) – egyenértékű a rá ható külső ER-rel.

Az egyenértékűség feltételei:

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \dot{\mathbf{a}} r dV &= \int_{(A)} \underline{\underline{T}} \cdot d\dot{\mathbf{A}} + \int_{(V)} \dot{\mathbf{q}} dV \\ \int_{(V)} \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{a}} r dV &= \int_{(A)} \dot{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{T}} \cdot d\dot{\mathbf{A}} + \int_{(V)} \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{q}} dV \end{aligned}$$

$\dot{\mathbf{a}}$ gyorsulás; $\dot{\mathbf{q}}$ térfogati ER sűrűségvektora

Átalakítások Gauss-tétellel:

$$\begin{aligned} \int_{(A)} \underline{\underline{T}} \cdot d\dot{\mathbf{A}} &= \int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \nabla dV \\ \int_{(A)} \dot{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{T}} \cdot d\dot{\mathbf{A}} &= \int_{(V)} (\dot{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{T}}) \cdot \nabla dV \end{aligned}$$

$\downarrow$
 $(\dot{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{T}}) \cdot \nabla$ átalakítása:

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{T}}) \cdot \nabla &= \dot{\mathbf{r}}_x \times \underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \dot{\mathbf{r}}_y \times \underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \dot{\mathbf{r}}_z \times \underline{\underline{T}} \cdot \nabla = \dot{\mathbf{e}}_x \times \underline{\underline{T}} \cdot \dot{\mathbf{e}}_x + \dot{\mathbf{e}}_y \times \underline{\underline{T}} \cdot \dot{\mathbf{e}}_y + \dot{\mathbf{e}}_z \times \underline{\underline{T}} \cdot \dot{\mathbf{e}}_z + \dot{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{T}} \cdot \nabla = \\ &= -(\dot{\mathbf{r}}_x \times \dot{\mathbf{e}}_x + \dot{\mathbf{r}}_y \times \dot{\mathbf{e}}_y + \dot{\mathbf{r}}_z \times \dot{\mathbf{e}}_z) + \dot{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{T}} \cdot \nabla = 2 \dot{\mathbf{T}}_x + \dot{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{T}} \cdot \nabla \end{aligned}$$

Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} \int_{(V)} (\dot{\mathbf{a}} r - \underline{\underline{T}} \cdot \nabla - \dot{\mathbf{q}}) dV &= 0 \\ \int_{(V)} [\dot{\mathbf{r}} \times (\dot{\mathbf{a}} r - \underline{\underline{T}} \cdot \nabla - \dot{\mathbf{q}}) - 2 \dot{\mathbf{T}}_x] dV &= 0 \end{aligned}$$

Mivel $\underline{\underline{V}}$ tetszőleges,

$$\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{a}} \quad \text{I. Cauchy-féle mozgásegyenlet}$$

$$\underline{\underline{T}}_x = \underline{\underline{0}} \rightarrow \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T \quad \text{adódik, mert a Cauchy-féle feszültségi tenzor szimmetrikus}$$

II. Cauchy-féle mozgásegyenlet

Ha $\underline{\underline{a}} = \underline{\underline{0}}$:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \underline{\underline{q}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{Az I. Cauchy-féle mozgásegyenlet = egyensúlyi egyenlet}$$

A feszültségi tenzor helykoordinátáktól való függése olyan legyen, hogy elégítse ki az I. Cauchy-féle mozgásegyenletet és a feszültségi peremfeltételt.

A mechanikai energia-tétel:

Kiindulás:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{v}} \cdot / \quad r \underline{\underline{a}} &= \underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \underline{\underline{q}} \\ r \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{a}} &= \underline{\underline{v}} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \nabla) + \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{q}} \\ r \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{a}} &= r \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}} \cdot = \frac{1}{2} r (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{v}}) \cdot = \frac{1}{2} r (v^2) \cdot \\ \underline{\underline{v}} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \nabla) &= (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \nabla - \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \nabla \\ \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \nabla &= \underline{\underline{T}} \cdot \cdot (\underline{\underline{v}} \otimes \nabla) = \underline{\underline{T}} \cdot \cdot (\underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}) = \underline{\underline{T}} \cdot \cdot \underline{\underline{D}} \end{aligned}$$

Mivel $\underline{\underline{T}}$ szimmetrikus, $\underline{\underline{W}}$ antiszimmetrikus, ezért $\underline{\underline{T}} \cdot \cdot \underline{\underline{W}} = 0$.

$$\text{Így:} \quad \underline{\underline{v}} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \nabla) = (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \nabla - \underline{\underline{T}} \cdot \cdot \underline{\underline{D}}$$

Behelyettesítve és integrálva $(V) - n$:

$$\frac{1}{2} \int_{(V)} (v^2) \cdot r \, dV = \int_{(V)} (\underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \nabla \, dV - \int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \cdot \underline{\underline{D}} \, dV + \int_{(V)} \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{q}} \, dV$$

A kontinuum kinetikai energiája:

$$T = \frac{1}{2} \int_{(V)} v^2 \, r \, dV = \frac{1}{2} \int_{(V)} v^2 \, dm$$

A fajlagos (térfogategységre vonatkozó) feszültségteljesítmény:

$$\underline{\underline{F}}_M = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}}$$

A kontinuum belső ER-nek teljesítménye (belső mechanikai teljesítmény):

$$P_B = - \int_{(V)} \underline{\underline{F}}_M dV = - \int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} dV$$

A kontinuum külső (térfogati és felületi) ER-nek teljesítménye (külső mechanikai teljesítmény):

Gauss-tétellel átalakítva:

$$P_K = \int_{(V)} \underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{q}} dV + \int_{(A)} \underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d\dot{\underline{\underline{A}}}$$

Behelyettesítések után adódik a mechanikai energiatétel globális alakja:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \dot{\underline{\underline{r}}} = P_B + P_K$$

A mechanikai energiatétel lokális alakja:

$$\frac{1}{2} r (\dot{v}^2) + F_M = (\underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \nabla + \underline{\underline{r}} \cdot \underline{\underline{q}}$$

Nem alaptörvény, mert az I. Cauchy-féle mozgásegyenletből matematikai átalakításokkal adódik.

$\underline{\underline{T}}$ és $\underline{\underline{D}}$ felbontható izotróp és deviátoros részre:

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}_i + \underline{\underline{T}}' = \frac{T_I}{3} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{T}}'$$

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{D}}_i + \underline{\underline{D}}' = \frac{D_I}{3} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{D}}'$$

D_I, T_I első skalár invariánsok. $T'_I = 0, D'_I = 0$.

A fajlagos feszültségteljesítmény így:

$$\underline{\underline{F}}_M = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} = \frac{T_I D_I}{3} + \underline{\underline{T}}' \cdot \underline{\underline{D}}'$$

A kezdeti és a pillanatnyi konfigurációban is számítható.

$$\underline{\underline{T}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{T}}^0 \cdot \underline{\underline{F}}^T ; \quad \underline{\underline{D}} = (\underline{\underline{F}}^{-1})^T \cdot (\underline{\underline{E}}^0)^{\bullet} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} ; \quad dV = J dV^0$$

felhasználásával fennállnak a következő képletek is:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} = \frac{dV^0}{dV} \underline{\underline{T}}^0 \cdot (\underline{\underline{E}}^0)^{\bullet}$$

$$-P_B = \int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} dV = \int_{(V^0)} \underline{\underline{T}}^0 \cdot (\underline{\underline{E}}^0)^{\bullet} dV^0$$

A termodinamika I. főtétele:

Az energiaegyenlet:

Értelmezések:

Fajlagos belső energia: (térfogategységre vonatkozó) $e_B \rho$

A kontinuum belső energiája: $E_B = \int_{(V)} e_B r dV$

Fajlagos hőforrás sebesség: $r \rho$

Fajlagos hőáram: $\dot{\mathbf{h}}$

Fajlagos hőteljesítmény: $F_Q = r r - \dot{\mathbf{h}} \cdot \nabla$

A kontinuum külső hőteljesítménye:

$$P_Q = \int_{(V)} F_Q dV = \int_{(V)} (r r - \dot{\mathbf{h}} \cdot \nabla) dV = \int_{(V)} r r dV - \int_{(V)} \dot{\mathbf{h}} \cdot \nabla dV$$

Gauss-tétellel átalakítva:

$$P_Q = \int_{(V)} r r dV - \int_{(A)} \dot{\mathbf{h}} \cdot d\mathbf{\hat{A}}$$

A mechanikai és hőjelenségeket együtt véve a termodinamika I. főtétele:

$$(\underline{\underline{T}} + E_B)^{\bullet} = P_K + P_Q$$

Részletesen kiírva integrál alakban:

$$\left(\frac{1}{2} \int_{(V)} v^2 r dV + \int_{(V)} e_B r dV \right)^{\bullet} = \int_{(V)} \bar{v} \cdot \underline{\dot{q}} dV + \int_{(A)} \underline{\dot{v}} \cdot \underline{T} \cdot d\dot{\underline{A}} + \int_{(V)} r r dV - \int_{(A)} \underline{\dot{h}} \cdot d\dot{\underline{A}}$$

Szavakban: a kontinuum kinetikai és belső energiájának materiális idő szerinti deriváltja megegyezik a külső mechanikai és hőteljesítménnyel.

A $(r dV)^{\bullet} = (dm)^{\bullet} = 0$ felhasználásával:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \int_{(V)} v^2 r dV + \int_{(V)} e_B r dV \right)^{\bullet} &= \int_{(V)} \bar{v} \cdot \underline{\dot{q}} dV + \int_{(A)} \underline{\dot{v}} \cdot \underline{T} \cdot d\dot{\underline{A}} + \int_{(V)} r r dV - \int_{(A)} \underline{\dot{h}} \cdot d\dot{\underline{A}} \\ \left(\frac{1}{2} \int_{(V)} v^2 r dV \right)^{\bullet} &= \frac{1}{2} \int_{(V)} (v^2)^{\bullet} r dV = \int_{(V)} \underline{\dot{v}} \cdot \underline{\dot{v}} r dV \\ \left(\int_{(V)} e_B r dV \right)^{\bullet} &= \int_{(V)} (e_B)^{\bullet} r dV \\ \int_{(A)} \underline{\dot{h}} \cdot d\dot{\underline{A}} &= \int_{(V)} \underline{\dot{h}} \cdot \nabla dV \end{aligned}$$

Gauss-féle átalakítással:

$$\begin{aligned} \int_{(A)} \underline{\dot{v}} \cdot \underline{T} \cdot d\dot{\underline{A}} &= \int_{(V)} (\underline{\dot{v}} \cdot \underline{T}) \cdot \nabla dV \\ \left(\underline{\dot{v}} \cdot \underline{T} \right) \cdot \nabla &= \underline{\dot{v}} \cdot \left(\underline{T} \cdot \nabla \right) + \underline{\dot{v}} \cdot \underline{T} \cdot \nabla = \underline{\dot{v}} \cdot \left(\underline{T} \cdot \nabla \right) + \underline{T} \cdot \cdot (\underline{\dot{v}} \otimes \nabla) = \underline{\dot{v}} \cdot \left(\underline{T} \cdot \nabla \right) + \underline{T} \cdot \cdot \underline{L} = \\ &= \underline{\dot{v}} \cdot \left(\underline{T} \cdot \nabla \right) + \underline{T} \cdot \cdot (\underline{D} + \underline{W}) \end{aligned}$$

Visszahelyettesítve:

$$\int_{(A)} \underline{\dot{v}} \cdot \underline{T} \cdot d\dot{\underline{A}} = \int_{(V)} \left[\underline{\dot{v}} \cdot \left(\underline{T} \cdot \nabla \right) + \underline{T} \cdot \cdot \underline{D} \right] dV$$

A termodinamika I. főtétele helyettesítve: (Egyetlen térfogati integrálba írható)

$$\int_{(V)} \left\{ \underline{\dot{v}} \cdot \left[\underline{\dot{a}} r - \underline{T} \cdot \nabla - \underline{\dot{q}} \right] + \left[(e_B)^{\bullet} r - \underline{T} \cdot \cdot \underline{D} - r r + \underline{\dot{h}} \cdot \nabla \right] \right\} dV = 0$$

= 0 I. Cauchy-féle mozgásegyenlet

(V) tetszőleges, ezért

$$(e_B)^{\bullet} r = \underbrace{T \cdot \cdot D}_{\phi_M} + \underbrace{r r - \dot{h} \cdot \nabla}_{\phi_Q}$$

A termodinamika I. főtételenek lokális (pontbeli) alakja
Másként: a kontinuummechanika energiaegyenlete

Tömörebben felírva:

$$(e_B)^{\bullet} r = F_M + F_Q$$

A fajlagos belső energia megváltozása = a fajlagos feszültségteljesítmény (a fajlagos belső mechanikai teljesítmény) és a fajlagos hőteljesítmény.

A termodinamika II. főtétele:

Az entrópiatétel:

Értelmezések:

Fajlagos entrópia: $s \rho$

Kontinuum entrópiája:

$$S = \int_{(V)} s r \, dV$$

Hőmérséklet: θ

A termodinamika II. főtétele:

$$S^{\bullet} = \int_{(V)} s^{\bullet} r \, dV + \int_{(V)} \frac{r r}{q} \, dV - \int_{(A)} \frac{\dot{h}}{q} \cdot d\mathbf{A} \quad \text{Entrópia tétel, vagy Clausius-Duhem-féle egyenlőtlenség}$$

Gauss-tétellel átalakítva:

$$\int_{(A)} \frac{\dot{h}}{q} \cdot d\mathbf{A} = \int_{(V)} \frac{\dot{h}}{q} \cdot \nabla \, dV = \int_{(V)} \left[\frac{\dot{h} \cdot \nabla}{q} - \frac{\dot{h} \cdot (q \nabla)}{q^2} \right] dV$$

Egy integrálba írva:

$$\int_{(V)} \mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \, dV \geq \int_{(V)} \left[\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{q} - \frac{\dot{\mathbf{h}} \cdot \nabla}{q} + \frac{\dot{\mathbf{h}} \cdot (q \nabla)}{q^2} \right] dV$$

Mivel (V) tetszőleges, ezért

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{r} \geq \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - \frac{\dot{\mathbf{h}} \cdot \nabla}{q} + \frac{\dot{\mathbf{h}} \cdot (q \nabla)}{q} = F_Q + \frac{\dot{\mathbf{h}} \cdot (q \nabla)}{q}$$

Az I. főtétele felhasználásával másik alakot kapunk:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{s} - \mathbf{r} \cdot (\mathbf{e}_B) \cdot + F_M - \frac{\dot{\mathbf{h}} \cdot (q \nabla)}{q} \geq 0$$

Fajlagos disszipációs teljesítmény: (sohasem negatív)

$$F_D = F_M - \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{e}_B) \cdot - q \cdot \mathbf{s}] = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{D}} - \mathbf{r} \cdot [(\mathbf{e}_B) \cdot - q \cdot \mathbf{s}] \geq 0$$

Az entrópia tétel ezzel:

$$F_D - \frac{\dot{\mathbf{h}} \cdot (q \nabla)}{q} \geq 0$$

Ha a $\Phi_D = 0$, akkor $\dot{\mathbf{h}} \cdot (q \nabla) < 0$ adódik.

Azaz: az entrópia tétel összhangban van azzal a megfigyeléssel, hogy a hő mindig a melegebb helyről áramlik a hidegebb hely felé (vagyis a hőmérséklet gradiensevel ellentétes irányba)

A fajlagos disszipációs teljesítménnyel az energia egyenlet is átírható más alakba:

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{s} = F_D + F_Q$$

A kontinuummechanika speciális vektor- és tenzormezői

A speciális mezők eleget tesznek a kontinuummechanika egyes egyenleteinek, más egyenleteket viszont nem elégítenek ki.

Kinematikailag lehetséges sebességmező:

- kellően sokszor deriválható
- kielégíti a sebességi peremfeltételt

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \quad x \in (A_v) \quad \dot{\mathbf{r}} \text{ előírt érték}$$

A kinematikailag lehetséges alakváltozás-sebesség mező előállítható:

$$\hat{\underline{\underline{D}}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \dot{\mathbf{r}})$$

Kompatibilis alakváltozás-sebesség tenzormező:

A $\hat{\underline{\underline{D}}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{r}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \dot{\mathbf{r}})$ egyenletnek van megoldása $\dot{\mathbf{r}}$ -ra. Ha van, akkor végtelen sok van és azok csak a merevtestszerű sebességmezőben különbözhetnek egymástól.

Kielégíti a kompatibilitási peremfeltételt:

$$\nabla \times \hat{\underline{\underline{D}}} \times \nabla = \underline{\underline{0}} \quad x \in (V)$$

Ha a $\dot{\mathbf{r}}$ kielégíti a sebességi peremfeltételt, akkor

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \quad x \in (A_v)$$

$$\hat{\underline{\underline{D}}} = \hat{\underline{\underline{D}}}$$

Kinematikailag lehetséges elmozdulásmező:

- kellően sokszor deriválható
- kielégíti az elmozdulási peremfeltételt

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}} \quad x \in (A_u)$$

Az alakváltozás lineáris elméletében:

$$\hat{\underline{\underline{e}}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \dot{\mathbf{u}}) \quad \text{kinematikailag lehetséges alakváltozási tenzormező}$$

Kompatibilis alakváltozási tenzormező:

A $\hat{\underline{\underline{e}}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \dot{\mathbf{u}})$ egyenletnek van megoldása $\dot{\mathbf{u}}$ -ra. Ha van, akkor végtelen sok van és azok csak a merevtestszerű elmozdulásmezőben különbözhetnek egymástól.

Kielégíti a kompatibilitási peremfeltételt:

$$\nabla \times \underline{\underline{e}}^* \times \nabla = \underline{\underline{0}}$$

Ha a $\underline{\underline{r}}_u$ kielégíti az elmozdulási peremfeltételt, akkor

$$\underline{\underline{r}}_u = \underline{\underline{r}}_u = \underline{\underline{r}}_u \quad x \in (A_u)$$

$$\underline{\underline{e}}^* = \underline{\underline{\hat{e}}}$$

Dinamikailag lehetséges feszültségi tenzormező:

- Adott $\underline{\underline{a}}^*$ és $\underline{\underline{q}}^*$ esetén kielégíti a Cauchy-féle mozgásegyenleteket
- Kielégíti a feszültségi peremfeltételt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T}} \cdot \nabla &= -\underline{\underline{q}}^* + r \underline{\underline{a}}^* & \underline{\underline{T}} &= \underline{\underline{T}}^T & x \in (V) \\ \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} &= \underline{\underline{p}} & x \in (A_p) \end{aligned}$$

Statikailag lehetséges feszültségi tenzormező:

$$\underline{\underline{a}}^* = \underline{\underline{0}} \text{ esetén}$$

Az alakváltozás lineáris elmélete esetén $\underline{\underline{T}}$ helyett $\underline{\underline{s}}$ kell.

A tényleges (megvalósuló) mezők a lehetséges mezők valamelyikét jelentik.

Két $\left\{ \begin{array}{l} \text{kinematikailag lehetséges sebességmező} \\ \text{kinematikailag lehetséges alakváltozás-sebességmező} \\ \text{kinematikailag lehetséges elmozdulásmező} \\ \text{kinematikailag lehetséges alakváltozási tenzormező} \\ \text{dinamikailag (statikailag) lehetséges feszültségi tenzormező} \end{array} \right\}$ különbségét

$\left\{ \begin{array}{l} \text{virtuális sebességmezőnek} \\ \text{virtuális alakváltozás-sebesség mezőnek} \\ \text{virtuális elmozdulásmezőnek} \\ \text{virtuális alakváltozási tenzormezőnek} \\ \text{virtuális feszültségmezőnek} \end{array} \right\}$ nevezzük.

Jelölésük:

virtuális sebességmező:	$d \underline{\underline{\mathbf{v}}}$
virtuális alakváltozás-sebesség mező:	$d \underline{\underline{D}}$
virtuális elmozdulásmező:	$d \underline{\underline{\mathbf{u}}}$
virtuális alakváltozási tenzormező:	$d \underline{\underline{e}}$
virtuális feszültségmező:	$d \underline{\underline{T}} \quad \text{vagy} \quad d \underline{\underline{s}}$

A virtuális mezőkre vonatkozó peremfeltételek és mezőegyenletek:

$$\begin{aligned}d \underline{\underline{\mathbf{v}}} &= \underline{\underline{\mathbf{0}}} & x \in (A_v) \\d \underline{\underline{D}} &= \frac{1}{2} (d \underline{\underline{\mathbf{v}}} \otimes \nabla + \nabla \otimes d \underline{\underline{\mathbf{v}}}) & x \in (V) \\d \underline{\underline{\mathbf{u}}} &= \underline{\underline{\mathbf{0}}} & x \in (A_u) \\d \underline{\underline{e}} &= \frac{1}{2} (d \underline{\underline{\mathbf{u}}} \otimes \nabla + \nabla \otimes d \underline{\underline{\mathbf{u}}}) & x \in (V) \\d \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} &= \underline{\underline{\mathbf{0}}} & x \in (A_p) \\d \underline{\underline{T}} \cdot \nabla &= \underline{\underline{\mathbf{0}}} & d \underline{\underline{T}} = d \underline{\underline{T}}^T & x \in (V) \\d \underline{\underline{s}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} &= \underline{\underline{\mathbf{0}}} & x \in (A_p) \\d \underline{\underline{s}} \cdot \nabla &= \underline{\underline{\mathbf{0}}} & d \underline{\underline{s}} = d \underline{\underline{s}}^T & x \in (V)\end{aligned}$$

Egyensúlyi feszültségi tenzormező:

- Kielégíti az egyensúlyi egyenletet.
- Szimmetrikus.
- Nem elégíti ki a feszültségi peremfeltételt.

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla &= \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{T}}} &= \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T & x \in (V) \\ \text{vagy} \\ \underline{\underline{\mathbf{s}}} \cdot \nabla &= \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{s}}} &= \underline{\underline{\mathbf{s}}}^T & x \in (V)\end{aligned}$$

Az egyensúlyi egyenlet identikusan kielégíthető, ha $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ - t a $\underline{\underline{H}}$ feszültségfüggvény tenzormező segítségével állítjuk elő.

$\underline{\underline{H}}$ másodrendű, szimmetrikus, kellően sokszor differenciálható, egyébként tetszőleges tenzor.

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^D - \nabla \times \underline{\underline{\mathbf{H}}} \times \nabla$$

$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^D$ az egyensúlyi egyenlet partikuláris megoldása.

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^D \cdot \nabla + \dot{\underline{\underline{\mathbf{q}}}} = \dot{\underline{\underline{\mathbf{0}}}}$$

$$-\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{H}}} \times \nabla \text{ a } \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \nabla = \dot{\underline{\underline{\mathbf{0}}}} \text{ egyenlet általános megoldása}$$

(a – előjel a skalár alakú képletek miatt szükséges)

A $-\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{H}}} \times \nabla$ feszültségmező önegyensúlyi, azaz a $(-\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{H}}} \times \nabla) \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}}$ felületi ER önmagában egyensúlyban van, ha a vizsgált tartományt egyetlen zárt felület határolja.

Általában nem teljes megoldás, vagyis nem állítható elő a segítségével tetszőleges feszültségmező több zárt felülettel határolt kontinuum esetén.

Legyen:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^D = \nabla \otimes \underline{\underline{\mathbf{c}}} + \underline{\underline{\mathbf{c}}} \otimes \nabla - (\underline{\underline{\mathbf{c}}} \cdot \nabla) \underline{\underline{\mathbf{I}}}$$

$$\chi - \text{re fennáll: } D \dot{\underline{\underline{\mathbf{c}}}} = -\dot{\underline{\underline{\mathbf{q}}}}$$

Így $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^D$ egyensúlyi.

Igazolható, hogy

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = -\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{H}}} \times \nabla + \nabla \otimes \underline{\underline{\mathbf{c}}} + \underline{\underline{\mathbf{c}}} \otimes \nabla - (\underline{\underline{\mathbf{c}}} \cdot \nabla) \underline{\underline{\mathbf{I}}} \text{ egyensúlyi feszültségmező teljes.}$$

Ha a térfogati ER potenciállal rendelkezik, azaz ψ -ből $\dot{\underline{\underline{\mathbf{q}}}} = -\nabla \psi$, akkor a $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^D = \nabla \otimes \underline{\underline{\mathbf{c}}} + \underline{\underline{\mathbf{c}}} \otimes \nabla - (\underline{\underline{\mathbf{c}}} \cdot \nabla) \underline{\underline{\mathbf{I}}}$ választás is szokásos.

A kompatibilitási egyenlet matematikai alakja azonos a homogén egyensúlyi egyenlet $-\nabla \times \underline{\underline{\mathbf{H}}} \times \nabla$ megoldásával g következmény:

$$\text{A } \underline{\underline{\mathbf{H}}} \text{ és } \underline{\underline{\mathbf{H}}} + \frac{1}{2}(\underline{\underline{\mathbf{w}}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \underline{\underline{\mathbf{w}}}) \text{ feszültségfüggvény tenzorokhoz ugyanaz a feszültségmező tartozik.}$$

$\dot{\underline{\underline{\mathbf{w}}}}$ tetszőlegesen differenciálható vektormező a $V - n$.

$\dot{\underline{\underline{\mathbf{w}}}}$ alkalmas választásával $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$ három koordinátája zérussá tehető. A három nem zérus koordináta többféleképpen is kiadódik.

Nem változik a feszültségmező, ha $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$ helyett $(\underline{\underline{\mathbf{H}}} + \underline{\underline{\mathbf{W}}})$ -t veszünk. $\underline{\underline{\mathbf{W}}}$ egy vektormező gradiensek szimmetrikus része, azaz

$$\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{w}} \otimes \nabla + \nabla \otimes \dot{\mathbf{w}})$$

$\underline{\underline{W}}$ tetszőleges, mert $\nabla \times \underline{\underline{W}} \times \nabla = \underline{\underline{0}}$, mint a kompatibilitási egyenletnél. Mivel $\dot{\mathbf{w}}$ tetszőleges, ezért $\underline{\underline{W}}$ alkalmasan választott 3 eleme is tetszőleges és ezzel $(\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{W}})$ ugyanazon 3 eleme zérussá tehető.

Vagyis keressük azon AB indexpárokat, amelyekre $W_{AB} = \frac{1}{2} (W_{A,B} + W_{B,A})$ tetszőleges. Azaz bármely W_{AB} esetén létezik $\dot{\mathbf{w}}$ -re megoldás. Ekkor $H_{AB} = 0$ és $H_{RS} \neq 0$.

Az AB és RS indexpárok kiadják az összes elemet.

Pl.	AB: 12, 13, 23	RS: 11, 22, 33	Maxwell-féle feszültségfüggvény tenzor
	AB: 11, 22, 33	RS: 12, 13, 23	Morera-féle feszültségfüggvény tenzor

Lehetséges indexpárok RS-re: 17 db

$\left. \begin{array}{l} 11, 22, 12 \\ 11, 22, 23 \\ 11, 22, 31 \\ 11, 12, 23 \end{array} \right\}$	Az 1, 2, 3 indexek ciklikus cseréjével.
---	---

Nem vezet megoldásra:

AB:	RS:
11, 22, 12	13, 23, 33
11, 33, 13	12, 22, 23
22, 33, 23	11, 21, 31

Legismertebbek:

A Maxwell-féle feszültségfüggvények:

xyz KR-ben:

$$[\underline{\underline{H}}] = \begin{bmatrix} H_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & H_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & H_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_x^D - s_x^D = \frac{\partial^2 H_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 H_{zz}}{\partial y^2} \quad \sigma_{xy}^D - t_{xy}^D = -\frac{\partial^2 H_{zz}}{\partial x \partial y}$$

$$\sigma_y^D - s_y^D = \frac{\partial^2 H_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{xx}}{\partial z^2} \quad \sigma_{yz}^D - t_{yz}^D = -\frac{\partial^2 H_{xx}}{\partial y \partial z}$$

$$\sigma_z^D - s_z^D = \frac{\partial^2 H_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{yy}}{\partial x^2} \quad \sigma_{zx}^D - t_{zx}^D = -\frac{\partial^2 H_{yy}}{\partial x \partial z}$$

Morera-féle feszültségfüggvények:

xyz KR-ben:

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} 0 & H_{xy} & H_{xz} \\ H_{yx} & 0 & H_{yz} \\ H_{zx} & H_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad H_{xy} = H_{yx}, \quad H_{xz} = H_{zx}, \quad H_{yz} = H_{zy},$$

$$\begin{aligned} \sigma_x - s_x^D &= -2 \frac{\partial^2 H_{yz}}{\partial y \partial z} & \sigma_{xy} - t_{xy}^D &= \frac{\partial^2 H_{yz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 H_{xz}}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 H_{yx}}{\partial z^2} \\ \sigma_y - s_y^D &= -2 \frac{\partial^2 H_{xz}}{\partial x \partial z} & \sigma_{yz} - t_{yz}^D &= \frac{\partial^2 H_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 H_{xy}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 H_{yz}}{\partial x^2} \\ \sigma_z - s_z^D &= -2 \frac{\partial^2 H_{yx}}{\partial y \partial x} & \sigma_{zx} - t_{zx}^D &= \frac{\partial^2 H_{xy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 H_{yz}}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 H_{zx}}{\partial y^2} \end{aligned}$$

A virtuális teljesítmény elve:

Kiindulás: az I. Cauchy-féle mozgásegyenlet

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot / \quad \text{és} \quad \int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \underline{\underline{q}} &= \underline{\underline{a}} \, r \\ \underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \underline{\underline{q}}^a &= 0 \quad \underline{\underline{q}}^a = \underline{\underline{q}} - \underline{\underline{a}} \, r \quad \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T \end{aligned}$$

$$\int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \left(\underline{\underline{T}} \cdot \nabla \right) dV + \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\underline{q}}^a dV = 0$$

A $\underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot (\underline{\underline{T}} \cdot \nabla) = (\underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \nabla - \underline{\underline{T}} \cdot \cdot \underline{\underline{D}}$ felhasználásával és a Gauss-féle átalakítással:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \cdot \underline{\underline{D}} dV = \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\underline{q}}^a dV + \int_{(A)} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d\dot{\underline{\underline{A}}}$$

A felületi integrál két részre bontható:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \cdot \underline{\underline{D}} dV = \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\underline{q}}^a dV + \int_{(A_v)} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d\dot{\underline{\underline{A}}} + \int_{(A_p)} \underline{\underline{\mathbf{v}}} \cdot \underline{\underline{p}} dA$$

Adott $\underline{\underline{q}}^a$, $\underline{\underline{\mathbf{v}}}$, $\underline{\underline{p}}$ mellett a kontinuum megadott konfigurációjában bármilyen dinamikailag lehetséges feszültségi tenzormezőre és kinematikailag lehetséges sebességmezőre fennáll. A jobboldal a külső ER teljesítménye valamely kinematikailag lehetséges, nem tényleges sebességmezőn, virtuális (látszólagos) teljesítménynek nevezzük.

A virtuális teljesítmény elvének különféle alakjai:

1. Legyen: $\underline{\underline{T}}$ dinamikailag lehetséges feszültségi tenzormező
 $\underline{\underline{\mathbf{r}}}_1, \underline{\underline{\mathbf{r}}}_2$ kinematikailag lehetséges sebességmezők

A virtuális teljesítmény elve:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\hat{D}}}_2 dV = \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{r}}}_2 \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^a dV + \int_{(A_v)} \underline{\underline{\mathbf{r}}}_2 \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \int_{(A_p)} \underline{\underline{\mathbf{r}}}_2 \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA$$

$$\int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\hat{D}}}_1 dV = \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{r}}}_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^a dV + \int_{(A_v)} \underline{\underline{\mathbf{r}}}_1 \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \int_{(A_p)} \underline{\underline{\mathbf{r}}}_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA$$

A különbségüket képezve:

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}}_2 - \underline{\underline{\mathbf{r}}}_1 = d \underline{\underline{\mathbf{r}}}; \quad \underline{\underline{\hat{D}}}_2 - \underline{\underline{\hat{D}}}_1 = d \underline{\underline{D}}$$

Az eredmény:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot d \underline{\underline{D}} dV = \int_{(V)} d \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^a dV + \int_{(A_p)} d \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA \quad \text{az egyik alak}$$

2. Legyen: $\underline{\underline{T}}_1; \underline{\underline{T}}_2$ két dinamikailag lehetséges feszültségi tenzormező
 $\underline{\underline{\mathbf{r}}}$ kinematikailag lehetséges sebességmező

A két feszültségmező különbsége: $\underline{\underline{T}}_2 - \underline{\underline{T}}_1 = d \underline{\underline{T}}$

$$\int_{(V)} \underline{\underline{T}}_2 \cdot \underline{\underline{\hat{D}}} dV = \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^a dV + \int_{(A_v)} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \underline{\underline{T}}_2 \cdot d\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \int_{(A_p)} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA$$

$$\int_{(V)} \underline{\underline{T}}_1 \cdot \underline{\underline{\hat{D}}} dV = \int_{(V)} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^a dV + \int_{(A_v)} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \underline{\underline{T}}_1 \cdot d\underline{\underline{\mathbf{A}}} + \int_{(A_p)} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA$$

A különbségüket véve:

$$\int_{(V)} d \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{\hat{D}}} dV = \int_{(A_v)} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot d \underline{\underline{T}} \cdot d\underline{\underline{\mathbf{A}}} \quad \text{a másik alak}$$

Általánosítva: a virtuális teljesítmény elv variációs alakban:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot d \underline{\underline{D}} dV = \int_{(V)} d \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{q}}}^a dV + \int_{(A_p)} d \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{p}}} dA$$

A $\underline{\underline{T}} \cdot \cdot d \underline{\underline{D}}$ átalakítása:

$$\underline{\underline{T}} \cdot \cdot d \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{T}} \cdot \cdot (d \underline{\underline{D}} + d \underline{\underline{W}}) = \underline{\underline{T}} \cdot \cdot (d \underline{\underline{v}} \otimes \nabla) = d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \nabla = \left(d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}} \right) \cdot \nabla - d \underline{\underline{v}} \cdot \left(\underline{\underline{T}} \cdot \nabla \right)$$

$$\int_{(V)} \left[\left(d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}} \right) \cdot \nabla - d \underline{\underline{v}} \cdot \left(\underline{\underline{T}} \cdot \nabla \right) \right] dV = \int_{(V)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{q}}^a dV + \int_{(A_p)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{p}} dA$$

Gauss-tétellel átalakítva:

$$\begin{aligned} \int_{(A)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d \underline{\underline{A}} &= \int_{(A_v)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d \underline{\underline{A}} + \int_{(A_p)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d \underline{\underline{A}} \\ &\quad \downarrow \\ &\quad \underline{\underline{0}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1cm}} \\ &\quad 0 \end{aligned}$$

$$\int_{(A_p)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d \underline{\underline{A}} - \int_{(V)} d \underline{\underline{v}} \cdot \left(\underline{\underline{T}} \cdot \nabla \right) dV = \int_{(V)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{q}}^a dV + \int_{(A_p)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{p}} dA$$

Egyoldalra rendezve és összevonva:

$$\begin{aligned} \int_{(A_p)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} dA - \int_{(A_p)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{p}} dA - \int_{(V)} d \underline{\underline{v}} \cdot \left(\underline{\underline{T}} \cdot \nabla \right) dV - \int_{(V)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underline{\underline{q}}^a dV &= 0 \\ \int_{(A_p)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underbrace{\left(\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} - \underline{\underline{p}} \right)}_{\text{fesz.pf.}} dA - \int_{(V)} d \underline{\underline{v}} \cdot \underbrace{\left(\underline{\underline{T}} \cdot \nabla + \underline{\underline{q}}^a \right)}_{\text{I. Cauchy-féle mozg. e.}} dV &= 0 \end{aligned}$$

A virtuális teljesítmény elve biztosítja a teljesülésüket, vagyis helyettesíti azokat.

Kiegészítő virtuális teljesítmény elv variációs alakban:

Igazolás nélkül:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{D}} \cdot \cdot d \underline{\underline{T}} dV = \int_{(A_v)} \underline{\underline{v}} \cdot d \underline{\underline{T}} \cdot d \underline{\underline{A}}$$

Ha az $\underline{\underline{a}} \equiv \dot{\underline{\underline{0}}}$, akkor $\underline{\underline{q}}^a = \underline{\underline{q}}$, minden érvényben marad, csak a dinamikailag lehetséges feszültségi tenzormező helyett statikailag lehetséges a feszültségi tenzormező.

Elvileg az összes lehetséges mezőt vizsgálni kellene, helyette a feladatra leginkább jellemző mezőt vizsgáljuk. Közelítő megoldások keresésére alkalmas elv. A kontinuum pillanatnyi konfigurációjára vonatkozik.

A virtuális teljesítmény elv a kezdeti konfigurációban:

$$\int_{(V^0)} \underline{\underline{T}}^0 \cdot d(\underline{\underline{E}}^0) \cdot dV^0 = \int_{(V^0)} l_v d\mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^a dV^0 + \int_{(A_p^0)} l_A d\mathbf{v} \cdot \mathbf{p} dA^0$$

$$d\mathbf{F} = \underline{\underline{T}} \cdot \mathbf{n} dA = \underline{\underline{T}} \cdot d\mathbf{A}$$

Felhasználva a $d\mathbf{F} = \underline{\underline{F}} \cdot d\mathbf{F}^0$ összefüggéseket,

$$d\mathbf{F}^0 = \underline{\underline{T}}^0 \cdot d\mathbf{A}^0$$

$$d(d\mathbf{F}) = d(\underline{\underline{T}} \cdot d\mathbf{A}) = \underline{\underline{F}} \cdot d(d\mathbf{F}^0) = \underline{\underline{F}} \cdot d(\underline{\underline{T}}^0 \cdot d\mathbf{A}^0)$$

Kiegészítő virtuális teljesítmény elv a kezdeti konfigurációban:

$$\int_{(V^0)} (\underline{\underline{E}}^0) \cdot d\underline{\underline{T}}^0 dV^0 = \int_{(A_v^0)} l_A \mathbf{v} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot d\underline{\underline{T}}^0 \cdot d\mathbf{A}^0$$

Adott λ_v, λ_A és $\underline{\underline{F}}$ esetén állnak fenn. A $d\mathbf{v}, \mathbf{q}^a$ mennyiségeket át kell transzformálni a kezdeti konfigurációba.

További alakok:

Virtuális teljesítmény elve:

$$\int_{(V)} \underline{\underline{T}} \cdot \hat{D} dV = \int_{(V)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^a dV + \int_{(A_v)} \mathbf{v} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d\mathbf{A} + \int_{(A_p)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} dA$$

Kiegészítő virtuális teljesítmény elve:

$$\int_{(V)} \bar{\underline{\underline{T}}} \cdot \underline{\underline{D}} dV = \int_{(V)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{q}^a dV + \int_{(A_v)} \mathbf{v} \cdot \underline{\underline{T}} \cdot d\mathbf{A} + \int_{(A_p)} \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} dA$$