

Vonalelemek által bezárt szög materiális idő szerinti deriváltja:

$$\left(\frac{(ds_1)^{\bullet}}{ds_1} + \frac{(ds_2)^{\bullet}}{ds_2} \right) \cos a - \sin a (a)^{\bullet} = 2 \underline{\underline{\mathbf{e}_1}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_2}}$$

$$\left(\frac{(l_{s1})^{\bullet}}{l_{s1}} + \frac{(l_{s2})^{\bullet}}{l_{s2}} \right) \cos a - \sin a (a)^{\bullet} = 2 \underline{\underline{\mathbf{e}_1}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_2}}$$

az előzőek alapján

Ha: $\underline{\underline{\mathbf{e}_1}} \perp \underline{\underline{\mathbf{e}_2}}; a = a^0 - g_{12} = 90^\circ$
 $-(a)^{\bullet} = (g_{12})^{\bullet} = 2 \underline{\underline{\mathbf{e}_1}} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_2}}$

Alakváltozási gradiens materiális idő szerinti deriváltja:

$$d \underline{\underline{\mathbf{r}}} = \underline{\underline{F}} \cdot d \underline{\underline{\mathbf{r}^0}}$$

$$d \underline{\underline{\mathbf{r}^0}} = \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot d \underline{\underline{\mathbf{r}}}$$

$$(d \underline{\underline{\mathbf{r}}})^{\bullet} = (\underline{\underline{F}} \cdot d \underline{\underline{\mathbf{r}^0}})^{\bullet} = \underline{\underline{F}}^{\bullet} \cdot d \underline{\underline{\mathbf{r}^0}}$$

$$(d \underline{\underline{\mathbf{r}}})^{\bullet} = \underline{\underline{F}}^{\bullet} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot d \underline{\underline{\mathbf{r}}}$$

$$(d \underline{\underline{\mathbf{r}}})^{\bullet} = \underline{\underline{L}} \cdot d \underline{\underline{\mathbf{r}}}$$

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{F}}^{\bullet} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$$

$$\underline{\underline{F}}^{\bullet} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{F}}$$

$$(\underline{\underline{F}}^{\bullet})^T = (\underline{\underline{F}}^T)^{\bullet} = (\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{F}})^T = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{L}}^T$$

Az $(\underline{\underline{F}}^{\bullet})^{-1} = (\underline{\underline{F}}^{-1})^{\bullet}$:

$$(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1})^{\bullet} = \underline{\underline{F}}^{\bullet} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \underline{\underline{F}} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-1})^{\bullet} = \underline{\underline{I}}^{\bullet} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{F}} \cdot (\underline{\underline{F}}^{-1})^{\bullet} = -\underline{\underline{F}}^{\bullet} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = -\underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = -\underline{\underline{L}}$$

$$(\underline{\underline{F}}^{-1})^{\bullet} = -\underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{L}}$$

$$[(\underline{\underline{F}}^{-1})^T]^{\bullet} = -\underline{\underline{L}}^T \cdot (\underline{\underline{F}}^{-1})^T$$

A pillanatnyi konfiguráció alakváltozási tenzorainak materiális idő szerinti deriváltjai:

Baloldali Cauchy-Green-féle alakváltozási tenzor:

$$\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$$

$$\underline{\underline{B}}^{\bullet} = \underline{\underline{F}}^{\bullet} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \underline{\underline{F}} \cdot (\underline{\underline{F}}^T)^{\bullet} = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T + \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{L}}^T$$

Cauchy-féle alakváltozási tenzor:

$$\underline{\underline{B}}^{-1} = \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \right)^T \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$$

$$\left(\underline{\underline{B}}^{-1} \right)^{\bullet} = \left[\left(\underline{\underline{F}}^{-1} \right)^T \right]^{\bullet} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} + \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \right)^T \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \right)^{\bullet} = -\underline{\underline{L}}^T \cdot \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \right)^T \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} - \left(\underline{\underline{F}}^{-1} \right)^T \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \underline{\underline{L}} = -\underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{B}}^{-1} - \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{L}}$$

Almansi-Euler-féle alakváltozási tenzor:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{I}} - \underline{\underline{B}}^{-1} \right)$$

$$\underline{\underline{E}}^{\bullet} = -\frac{1}{2} \left(\underline{\underline{B}}^{-1} \right)^{\bullet} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{B}}^{-1} + \underline{\underline{B}}^{-1} \cdot \underline{\underline{L}} \right)$$

$$\underline{\underline{E}}^{\bullet} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{L}}^T \cdot \left(\underline{\underline{I}} - 2 \underline{\underline{E}} \right) + \left(\underline{\underline{I}} - 2 \underline{\underline{E}} \right) \cdot \underline{\underline{L}} \right)$$

$$\underline{\underline{E}}^{\bullet} = \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{L}}^T - 2 \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{L}} - 2 \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{L}} \right)$$

$$\underline{\underline{E}}^{\bullet} = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{L}}$$

$$\underline{\underline{L}} = \underline{\underline{D}} + \underline{\underline{W}}$$

$$\underline{\underline{L}}^T = \underline{\underline{D}}^T + \underline{\underline{W}}^T = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{W}}$$

$$\underline{\underline{E}}^{\bullet} = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{W}}$$

$$\underline{\underline{E}}^{\bullet} = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{w}}^{\mathbf{r}} + \underline{\underline{w}}^{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{E}}^{\bullet} = \underline{\underline{E}}^{\nabla} - \underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{w}}^{\mathbf{r}} + \underline{\underline{w}}^{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{E}}^{\nabla} = \underline{\underline{E}}^{\bullet} + \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{W}} - \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^{\bullet} + \underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{w}}^{\mathbf{r}} - \underline{\underline{w}}^{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}}$$

Jaumann-féle objektív idő szerinti derivált vagy Jaumann-féle derivált. Bármely Euler-féle tenzorra értelmezhető.

Pl. Legyen: $\underline{\underline{H}}$ egy Euler-féle tenzor

$$\underline{\underline{H}}^{\nabla} = \underline{\underline{H}}^{\bullet} + \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{W}} - \underline{\underline{W}} \cdot \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{H}}^{\bullet} + \underline{\underline{H}} \times \underline{\underline{w}}^{\mathbf{r}} - \underline{\underline{w}}^{\mathbf{r}} \times \underline{\underline{H}}$$

A Jaumann-féle derivált nem veszi figyelembe a kontinuumelem merevtestszerű forgásából származó sebességét.

Összefüggés az $\underline{\underline{E}}$ és $\underline{\underline{E}}^0$ materiális deriváltjai között:

$$\left. \frac{d \underline{\underline{E}}}{dt} \right|_{(x^0)} = \frac{\partial \underline{\underline{E}}}{\partial t} = (\underline{\underline{E}}^0)^{\bullet}$$

$$\underline{\underline{E}}^0 = \frac{1}{2} (\underline{\underline{C}}^0 - \underline{\underline{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$$

$$(\underline{\underline{E}}^0)^{\bullet} = \left[\frac{1}{2} (\underline{\underline{C}}^0 - \underline{\underline{I}}) \right]^{\bullet} = \frac{1}{2} [(\underline{\underline{F}}^T)^{\bullet} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{F}}^{\bullet}] = \frac{1}{2} [\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{F}}]$$

$$(\underline{\underline{E}}^0)^{\bullet} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{F}}$$

Az $\underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}}^0$ felhasználásával:

$$(\underline{\underline{E}}^0)^{\bullet} = (\underline{\underline{F}}^T)^{\bullet} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{E}}^{\bullet} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}}^{\bullet}$$

$$(\underline{\underline{E}}^0)^{\bullet} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot (\underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{L}} - \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{E}}) \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{F}}$$

$$(\underline{\underline{E}}^0)^{\bullet} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{L}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{F}} + \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{L}} \cdot \underline{\underline{F}}$$

$$(\underline{\underline{E}}^0)^{\bullet} = \underline{\underline{F}}^T \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{F}}$$

Ugyanaz az eredmény adódik.

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{0}}$$

$$(\underline{\underline{E}}^0)^{\bullet} = \underline{\underline{0}}$$

Ha

$$\underline{\underline{E}}^{\nabla} = \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{D}} - \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$$

$$de \quad \underline{\underline{E}}^{\bullet} = -\underline{\underline{E}} \times \underline{\underline{w}} + \underline{\underline{w}} \times \underline{\underline{E}} \neq \underline{\underline{0}}$$

Tenzormezőn vett integrál materiális idő szerinti deriváltja:

Legyen: $\underline{\underline{H}}(x, y, z, t)$ Euler-féle tenzormező

$$t \text{ időpontban: } \underline{\underline{J}} = \int_{(V)} \underline{\underline{H}} dV$$

Materiális idő szerinti deriváltja:

$$\underline{\underline{J}}^{\bullet} = \int_{(V)} \underline{\underline{H}}^{\bullet} dV + \int_{(V)} \underline{\underline{H}} dV^{\bullet}$$

$$dV^\bullet = L_I dV = (\dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla) dV$$

$$\underline{\underline{J}}^\bullet = \int_{(V)} [\underline{\underline{H}}^\bullet + \underline{\underline{H}} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla)] dV$$

$$\underline{\underline{H}}^\bullet = \frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial t} + (\underline{\underline{H}} \circ \nabla) \cdot \dot{\mathbf{v}}$$

Az integrandusz átalakítása:

$$\frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial t} + \left(\underline{\underline{H}} \circ \nabla \right) \cdot \dot{\mathbf{v}} + \underline{\underline{H}} \left(\dot{\mathbf{v}} \cdot \nabla \right) = \frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial t} + \left(\underline{\underline{H}} \circ \dot{\mathbf{v}} \right) \cdot \nabla$$

Így:
$$\underline{\underline{J}}^\bullet = \int_{(V)} \left[\frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial t} + (\underline{\underline{H}} \circ \dot{\mathbf{v}}) \cdot \nabla \right] dV$$

Gauss-tétellel átalakítva:

$$\underline{\underline{J}}^\bullet = \int_{(V)} \frac{\partial \underline{\underline{H}}}{\partial t} dV + \int_{(S)} (\underline{\underline{H}} \circ \dot{\mathbf{v}}) \cdot d\dot{\mathbf{A}}$$

A felületi integrál más alakban:

$$\int_{(S)} (\underline{\underline{H}} \circ \dot{\mathbf{v}}) \cdot d\dot{\mathbf{A}} = \int \underline{\underline{H}} (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{n}}) dA \quad \text{S-re vonatkozó fluxus}$$

$\dot{\mathbf{n}}$ az S felület külső normálisa

Tömegre vonatkozó integrál:

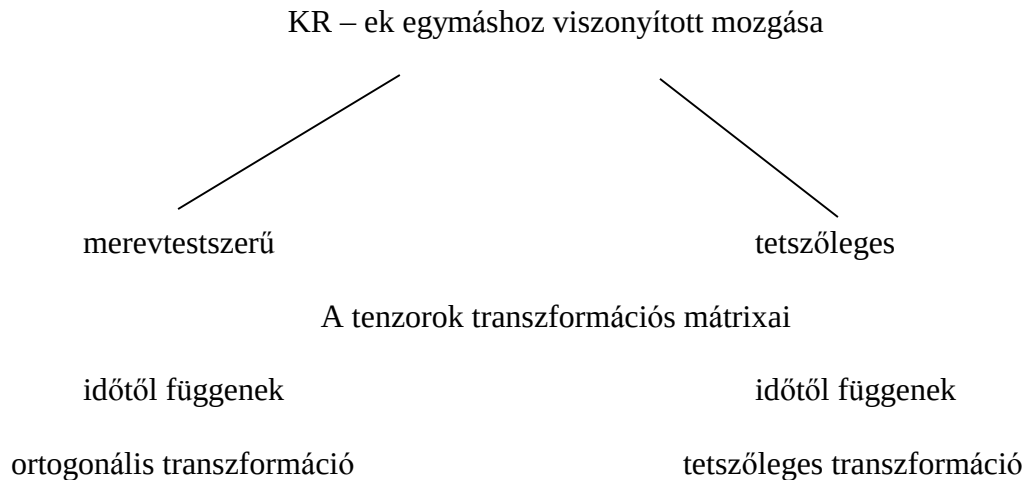
$$\underline{\underline{J}} = \int_{(m)} \underline{\underline{G}} dm = \int_{(V)} \underline{\underline{G}} r dV \quad \rho = \text{tömegsűrűség}$$

Mivel $(dm)^\bullet = 0$, ezért a materiális idő szerinti derivált:

$$\underline{\underline{J}}^\bullet = \int_{(m)} \underline{\underline{G}}^\bullet dm = \int_{(V)} \underline{\underline{G}}^\bullet r dV$$

Fizikailag objektív idő szerinti deriváltak:

Az időtől függő tenzormezők időbeli változásának sebességei vizsgálhatók egymáshoz képest mozgó koordináta-rendszerekben. Azt is meg kell adni, hogy melyik KR-ben értelmezzük a sebességet.



Fizikailag objektív (objektív) tenzorok: (idő szerinti deriváltak)

Egymáshoz tetszőlegesen mozgó KR-ek esetén is KR-től függetlenül értelmezhetők, vagyis tetszőleges transzformációval szemben invariánsok.

Szűkebb értelemben:

Csak ortogonális transzformációra vonatkozik (egymáshoz képest merevtestszerűen mozgó KR)

Jaumann-féle derivált:

Fizikailag objektív, de csak ortogonális transzformációval szemben

D alakváltozás-sebesség tenzor: fizikailag objektív

Ezekon kívül még számos más fizikailag objektív tenzor és idő szerinti derivált értelmezhető.

Kontinuum alakváltozásának lineáris elmélete

Kis alakváltozás:

$$|e_s| \ll 1; \quad |g_{12}| \ll 1$$

Az E és E⁰ koordinátáinak abszolút értéke $\ll 1$.

De $\underline{\underline{\mathbf{u}}}^0 \mathbf{o} \nabla^0$ és $\underline{\underline{\mathbf{u}}} \mathbf{o} \nabla$ gradiensek koordinátáinak abszolút értékére nem következik ugyanez.

Pl. nagy merevtestszerű szögelfordulás
nagy elmozdulás koordináták – nagy hajlékonyságú laprugók

Az alakváltozás lineáris elmélete (linearizált elmélete):

$\underline{\underline{\mathbf{u}}}^0 \mathbf{o} \nabla^0$ és $\underline{\underline{\mathbf{u}}} \mathbf{o} \nabla$ gradiensek koordinátáinak abszolút értéke $\ll 1$

pl. xyz-ben: $\left| u_{x,x}^0 \right| \ll 1; \quad \left| u_{x,y}^0 \right| \ll 1$
 $\left| u_{x,x} \right| \ll 1; \quad \left| u_{x,y} \right| \ll 1$

Az alakváltozás lineáris elméletében a fenti mennyiségek szorzatait elhanyagoljuk.

Itt is fennáll: $\left| e_s \right| \ll 1; \quad \left| g_{12} \right| \ll 1$

Jellemző egyenletek:

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\mathbf{F}}} &= \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\mathbf{u}}}^0 \mathbf{o} \nabla^0 \\ \underline{\underline{\mathbf{F}}}^{-1} &= \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{u}}} \mathbf{o} \nabla \\ \underline{\underline{\mathbf{C}}}^0 &= \underline{\underline{\mathbf{I}}} + \underline{\underline{\mathbf{u}}}^0 \mathbf{o} \nabla^0 + \nabla^0 \mathbf{o} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^0 \\ \underline{\underline{\mathbf{E}}}^0 &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{u}}}^0 \mathbf{o} \nabla^0 + \nabla^0 \mathbf{o} \underline{\underline{\mathbf{u}}}^0) \\ \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1} &= \underline{\underline{\mathbf{I}}} - \underline{\underline{\mathbf{u}}} \mathbf{o} \nabla - \nabla \mathbf{o} \underline{\underline{\mathbf{u}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{E}}} &= \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{u}}} \mathbf{o} \nabla + \nabla \mathbf{o} \underline{\underline{\mathbf{u}}})\end{aligned}$$

A $\sqrt{1 \pm x}$ és $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}}$ sorfejtésének felhasználásával:

$$\begin{aligned}l_s &= 1 + \underline{\underline{\mathbf{e}}}^0 \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}}^0 \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}^0 = 1 + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}} \\ e_s^0 &= \underline{\underline{\mathbf{e}}}^0 \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}}^0 \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}^0 = \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}} = e_s \\ \sin g_{12} &\approx g_{12} = 2 \underline{\underline{\mathbf{e}}}^0_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}}^0 \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}^0_2 = 2 \underline{\underline{\mathbf{e}}}^0_1 \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}^0_2 \\ e_v^0 &= E_I^0 = E_I = e_v\end{aligned}$$

Mivel a $\underline{\underline{\mathbf{C}}}^0$, $\underline{\underline{\mathbf{E}}}^0$, $\underline{\underline{\mathbf{U}}}^0$, $(\underline{\underline{\mathbf{U}}}^0)^{-1}$ tenzorok főtengelei azonosak, így

$$\underline{\underline{C}}^0 = \underline{\underline{I}} + 2 \underline{\underline{E}}^0$$

$$\underline{\underline{U}}^0 = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{E}}^0$$

$$(\underline{\underline{U}}^0)^{-1} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{E}}^0$$

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{F}} \cdot (\underline{\underline{U}}^0)^{-1} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{r}}^0 \otimes \nabla^0 - \underline{\underline{E}}^0$$

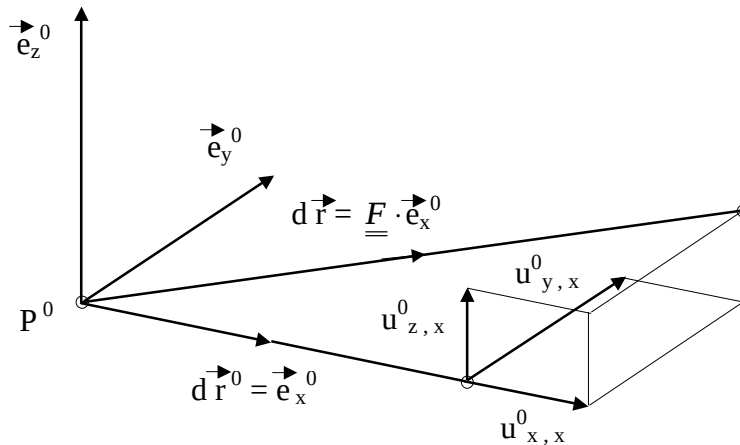
$$\underline{\underline{r}}^0 \otimes \nabla^0 = \underline{\underline{r}}^0 \otimes \nabla$$

$$\underline{\underline{E}}^0 = \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{e}}^0 \cdot \underline{\underline{E}}^0 \cdot \underline{\underline{e}}^0 = \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{e}}$$

Az alakváltozás lineáris elméletében nincs különbség a kezdeti és pillanatnyi konfigurációban felírt alakváltozási mennyiségek között. Ezért a kezdeti konfigurációban értelmezett mennyiségekkel dolgozunk, nem használjuk a 0 jelölést.

Példa:



$$u_{x,x}^0 = 0,2 \quad u_{y,x}^0 = 0,5 \quad u_{z,x}^0 = 0,1$$

Mekkora az x irányú e_x^0 fajlagos nyúlás?

A nemlineáris elmélet szerint:

$$E_{xx}^0 = \underline{\underline{e}}_x^0 \cdot \underline{\underline{E}}^0 \cdot \underline{\underline{e}}_x^0 = u_{x,x}^0 + \frac{1}{2} \left[(u_{x,x}^0)^2 + (u_{y,x}^0)^2 + (u_{z,x}^0)^2 \right] = 0,2 + \frac{1}{2} (0,2^2 + 0,5^2 + 0,1^2) = 0,35$$

$$e_s^0 = \sqrt{1 + 2 \underline{\underline{e}}_x^0 \cdot \underline{\underline{E}}^0 \cdot \underline{\underline{e}}_x^0} - 1$$

Ebből:

$$(e_x^0)_{nl} = \sqrt{1 + 2 E_{xx}^0} - 1 = \sqrt{1,7} - 1 = 0,3038$$

A lineáris elmélet szerint:

$$E_{xx}^0 = \underline{\underline{\mathbf{e}_x^0}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}^0}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}_x^0}} = u_{x,x}^0 = 0,2$$

$$(e_x^0)_l = E_{xx}^0 = 0,2$$

Az eltérés jelentős:

$$\frac{(e_x^0)_{nl} - (e_x^0)_l}{(e_x^0)_{nl}} = \frac{0,1038}{0,3038} = 0,3417, \text{ százalékosan } 34,17 \%$$

Ha a felvett adatok tizedét vesszük:

$$u_{x,x}^0 = 0,02 \quad u_{y,x}^0 = 0,05 \quad u_{z,x}^0 = 0,01$$

A nemlineáris elmélet szerint:

$$E_{xx}^0 = 0,02 + \frac{1}{2}(0,02^2 + 0,05^2 + 0,01^2) = 0,0215$$

$$(e_x^0)_{nl} = \sqrt{1,043} - 1 = 0,02127$$

A lineáris elmélet szerint:

$$(e_x^0)_l = E_{xx}^0 = u_{x,x}^0 = 0,02$$

Az eltérés jelentősen csökken:

$$\frac{(e_x^0)_{nl} - (e_x^0)_l}{(e_x^0)_{nl}} = \frac{0,00127}{0,02127} = 0,0597, \text{ százalékosan } 5,97 \%$$

A kiinduló adatok századrészt véve:

$$E_{xx}^0 = 0,002015$$

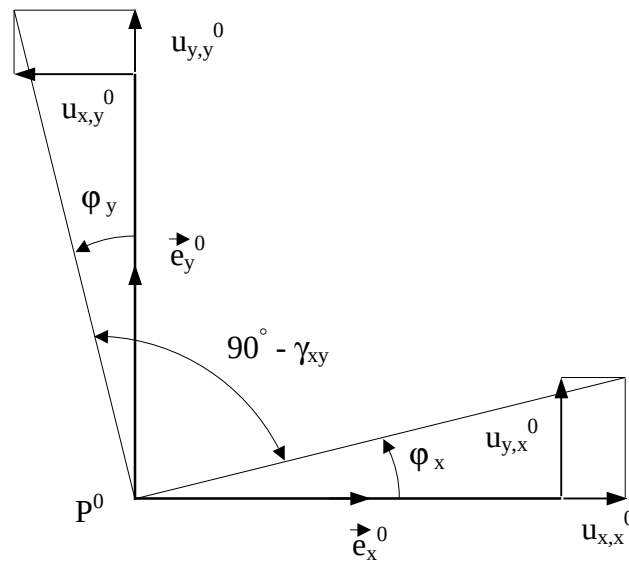
$$(e_x^0)_{nl} = \sqrt{1,00403} - 1 = 0,002013$$

$$(e_x^0)_l = E_{xx}^0 = u_{x,x}^0 = 0,002$$

Az eltérés:
$$\frac{(e_x^0)_{nl} - (e_x^0)_l}{(e_x^0)_{nl}} = \frac{0,000013}{0,002013} = 0,0065, \text{ százalékosan } 0,65 \%$$

Az elmozdulásgradiens koordináták abszolút értékeinek csökkenésével jelentősen csökken a hiba.

Síkbeli feladat:



$$u_{x,x}^0 = 0,02 \quad u_{y,x}^0 = 0,3 \quad u_{x,y}^0 = -0,32 \quad u_{y,y}^0 = 0,01 \quad u_{z,x}^0 = u_{z,y}^0 = 0$$

$$E_{xx}^0 = 0,02 + \frac{1}{2} (0,02^2 + 0,03^2) = 0,0652$$

$$(e_x^0)_{nl} = \sqrt{1 + 2 E_{xx}^0} - 1 = \sqrt{1,1304} - 1 = 0,0632$$

$$E_{yy}^0 = 0,01 + \frac{1}{2} (0,32^2 + 0,01^2) = 0,06125$$

$$(e_y^0)_{nl} = \sqrt{1 + 2 E_{yy}^0} - 1 = \sqrt{1,1225} - 1 = 0,0595$$

$$E_{xy}^0 = E_{yx}^0 = \frac{1}{2} (-0,32 + 0,3) + \frac{1}{2} (-0,02 \cdot 0,32 + 0,01 \cdot 0,3) = -0,0117$$

$$(\sin g_{xy})_{nl} = \frac{2 E_{xy}^0}{(1 + e_x^0)(1 + e_y^0)} = -0,0208$$

$$(g_{xy})_{nl} = -1,19^\circ$$

Az $\mathbf{e}_x^0$ és $\mathbf{e}_y^0$ irányú vonalelemek szögelfordulása:

$$j_x = \arctg \frac{u_{y,x}^0}{1 + u_{x,x}^0} = \arctg \frac{0,3}{1,02} = 16,39^\circ$$

$$j_y = \arctg \frac{u_{x,y}^0}{1 + u_{y,y}^0} = \arctg \frac{0,32}{1,01} = 17,58^\circ$$

$$(g_{xy})_{nl} = j_x - j_y = -1,19^\circ$$

Kis fajlagos nyúlások és szögváltozások mellett is lehetnek nagy merevtestszerű forgások.

Az elmozdulásmező gradienseinek additív felbontása:

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}} \circ \nabla = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{r}}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{\mathbf{r}}}) + \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{r}}} \circ \nabla - \nabla \circ \underline{\underline{\mathbf{r}}}) = \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{Y}}$$

$$\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{e}}^T$$

alakváltozási tenzor
eddig $\underline{\underline{A}}$ - val jelöltük

$$\underline{\underline{Y}} = -\underline{\underline{Y}}^T$$

különbségi forgástenzor

Mivel:

$$\underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\mathbf{r}}} \circ \nabla - \underline{\underline{e}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{Y}}$$

$$\underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{Y}} \cdot d\underline{\underline{\mathbf{r}}} = \underline{\underline{R}} \cdot d\underline{\underline{\mathbf{r}}} - d\underline{\underline{\mathbf{r}}}$$

Innen származik a $\underline{\underline{Y}}$ neve.

Ha a $\underline{\underline{Y}}$ és $\underline{\underline{R}}$ megkülönböztetésére nincs szükség, akkor $\underline{\underline{Y}}$ forgástenzor.

$$\underline{\underline{Y}} \cdot d\underline{\underline{\mathbf{r}}} = \underline{\underline{\mathbf{y}}} \times d\underline{\underline{\mathbf{r}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{y}}} = \text{forgásvektor}$$

Az alakváltozás lineáris elméletének változói és egyenletei:

$$\underline{\underline{\mathbf{r}}} \circ \nabla = \underline{\underline{e}} + \underline{\underline{Y}} \quad e_v = e_I = \underline{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \nabla$$

$$\underline{\underline{e}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{r}}} \circ \nabla + \nabla \circ \underline{\underline{\mathbf{r}}}) \quad \underline{\underline{\mathbf{y}}} = -\frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{r}}} \times \nabla$$

$$\underline{\underline{Y}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbf{r}}} \circ \nabla - \nabla \circ \underline{\underline{\mathbf{r}}}) \quad \underline{\underline{Y}} = \underline{\underline{I}} \times \underline{\underline{\mathbf{y}}}$$

$$e_s = \underline{\underline{\mathbf{e}}} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}} \quad \underline{\underline{\mathbf{y}}} \times \nabla = \nabla \times \underline{\underline{e}}$$

$$g_{12} = 2 \underline{\underline{\mathbf{e}}}_1 \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{e}}}_2 \quad \underline{\underline{Y}} \circ \nabla = \underline{\underline{I}} \times (\nabla \times \underline{\underline{e}})$$

$$(\underline{\underline{\mathbf{r}}} \circ \nabla) \circ \nabla = \underline{\underline{e}} \circ \nabla + \underline{\underline{I}} \times (\nabla \times \underline{\underline{e}})$$

$$\underline{\underline{h}} = -\nabla \times \underline{\underline{e}} \times \nabla \quad \underline{\underline{h}} = \underline{\underline{h}}^T$$

$\underline{h}$ inkompatibilitási tenzor

Az alakváltozási tenzor és a forgástenzor koordinátái:

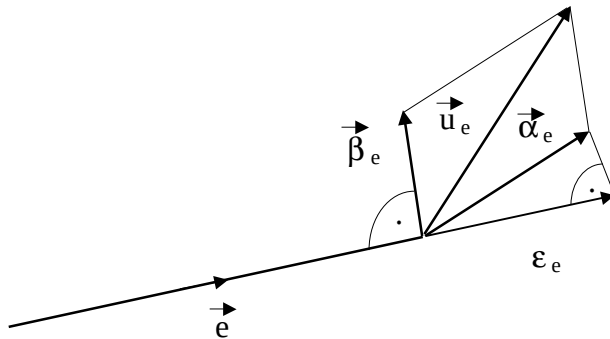
Az alakváltozás lineáris elmélete szerint a $d\mathbf{r}$ vonalelem végpontjának a kezdőponthoz viszonyított elmozdulása:

$$d\mathbf{u} = (\mathbf{u} \circ \nabla) \cdot d\mathbf{r} = \underline{\underline{a}} \cdot d\mathbf{r} + \underline{\underline{y}} \cdot d\mathbf{r} = \underline{\underline{e}} \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{y} \times d\mathbf{r}$$

A kezdeti konfiguráció P-ben felvett $\mathbf{e}$ egységvektorának elmozdulása $\mathbf{u}_e$:

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{a}_e + \mathbf{b}_e = \underline{\underline{e}} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{y} \times \mathbf{e}$$

alakváltozásból
merevtestszerű forgásból



Az $\mathbf{e}$ irányú fajlagos nyúlás: az $\mathbf{a}_e$ vagy $\mathbf{u}_e$ vetülete $\mathbf{e}$ -re:

$$e_e = \mathbf{e} \cdot \underline{\underline{e}} \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{a}_e = \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_e$$

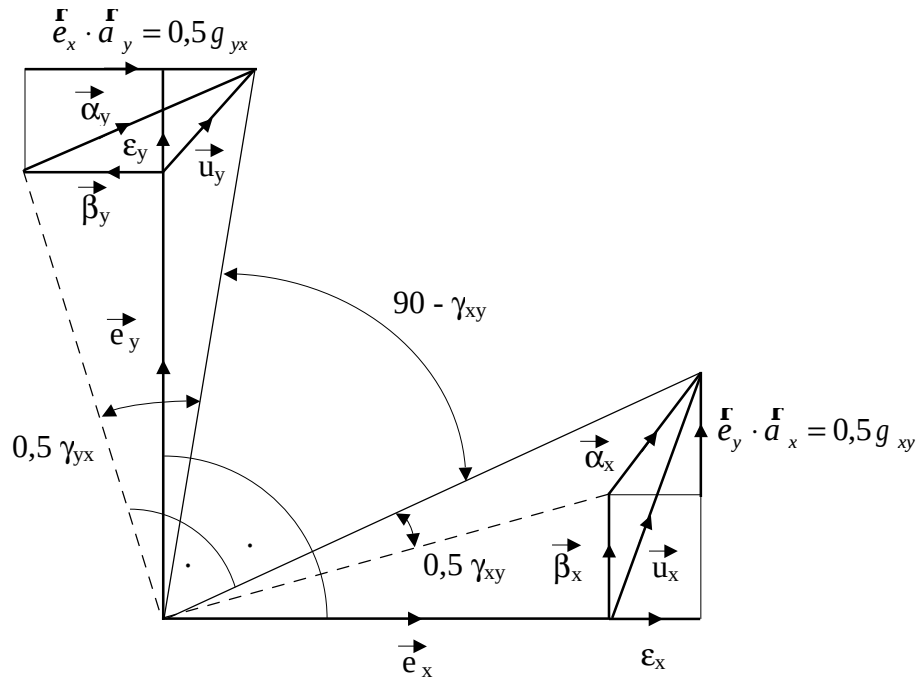
$\mathbf{a}_e$ és $\mathbf{u}_e$ általában nics benne az $\mathbf{e}$ és $\mathbf{b}_e$ (és e_e) síkjában.

$\mathbf{u}_e$; $\mathbf{a}_e$; $\mathbf{b}_e$ azonos síkú.

Síkbeli esetben:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u}_x &= 0 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{u}_y &= 0 \end{aligned} \quad \text{esetén}$$

$$\mathbf{y} = y_z \mathbf{e}_z$$



$$\begin{aligned}
 e_x &= \underline{e}_x \cdot \underline{e}_x = \underline{e}_x \cdot \underline{d}_x = \underline{e}_x \cdot \underline{u}_x \\
 e_y &= \underline{e}_y \cdot \underline{e}_y = \underline{e}_y \cdot \underline{d}_y = \underline{e}_y \cdot \underline{u}_y \\
 g_{xy} &= g_{yx} = 2 \underline{e}_x \cdot \underline{e}_y = 2 \underline{e}_y \cdot \underline{e}_x = \underline{e}_x \cdot \underline{d}_y + \underline{e}_y \cdot \underline{d}_x
 \end{aligned}$$

Ebból:

$$\frac{1}{2} g_{xy} = \underline{e}_x \cdot \underline{e}_y = \underline{e}_y \cdot \underline{e}_x = \underline{e}_y \cdot \underline{d}_x = \underline{e}_x \cdot \underline{d}_y = \frac{1}{2} g_{yx}$$

Fennáll:

$$\underline{e}_y \cdot \underline{b}_x = \underline{e}_y \cdot (\underline{y} \times \underline{e}_x) = y_z = -\underline{e}_x \cdot (\underline{y} \times \underline{e}_y) = -\underline{e}_x \cdot \underline{b}_y$$

xyz KR-ben a szimmetrikus $\underline{e}$:

Legyen: $\underline{u} = u_x \underline{e}_x + u_y \underline{e}_y + u_z \underline{e}_z$

$$[\underline{e}] = \begin{bmatrix} e_x & \frac{1}{2}g_{xy} & \frac{1}{2}g_{xz} \\ \frac{1}{2}g_{yx} & e_y & \frac{1}{2}g_{yz} \\ \frac{1}{2}g_{zx} & \frac{1}{2}g_{zy} & e_z \end{bmatrix}$$

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad g_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}$$

$$e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad g_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad g_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

HKR – ben (Rφz – ben):

$$\underline{u} = u_R \underline{e}_R + u_j \underline{e}_j + u_z \underline{e}_z$$

$$[\underline{e}] = \begin{bmatrix} e_R & \frac{1}{2}g_{Rj} & \frac{1}{2}g_{Rz} \\ \frac{1}{2}g_{jR} & e_j & \frac{1}{2}g_{jz} \\ \frac{1}{2}g_{zR} & \frac{1}{2}g_{zj} & e_z \end{bmatrix}$$

$$e_R = \frac{\partial u_R}{\partial R} \quad g_{Rj} = \frac{1}{R} \frac{\partial u_R}{\partial j} + R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{u_j}{R} \right)$$

$$e_j = \frac{u_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_j}{\partial j} \quad g_{jz} = \frac{\partial u_j}{\partial z} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_z}{\partial j}$$

$$e_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad g_{zR} = \frac{\partial u_z}{\partial R} + \frac{\partial u_R}{\partial z}$$

A ferdeszimmetrikus forgástenzor:

$$\text{xyz – ben:} \quad [\underline{Y}] = \begin{bmatrix} 0 & Y_{xy} & Y_{xz} \\ Y_{yx} & 0 & Y_{yz} \\ Y_{zx} & Y_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -y_z & y_y \\ y_z & 0 & -y_x \\ -y_y & y_x & 0 \end{bmatrix}$$