A forgatás szöge:

$$R_I = 2\cos\psi + 1 = 0 \qquad \cos\psi = -½ \qquad \psi = 120^{o}$$

A forgástengely:

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}_x}{\sin\psi} \qquad \sin\psi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{r}_x = -\frac{1}{2}\left(\vec{e}_z\times\vec{e}_x - \vec{e}_x\times\vec{e}_y - \vec{e}_y\times\vec{e}_z\right) = -\frac{1}{2}\left(\vec{e}_y - \vec{e}_z - \vec{e}_x\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z\right)$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{e}_x - \vec{e}_y + \vec{e}_z\right)$$

<u>Vektorok lineáris függetlensége:</u>

Az $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots \vec{a}_n \quad n \geq 2$ vektorok lineárisan függetlenek, ha a

$$p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 + \ldots p_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

egyenletnek csak triviális $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = 0$ megoldása létezik.

Két nem párhuzamos vektor lineárisan független, ha

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2 \neq \vec{0}$$

$$\vec{a}_1\times / \qquad p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{a}_2\times /$$

$$p_2\,\vec{a}_1\times\vec{a}_2 = \vec{0}$$

$$p_1\,\vec{a}_2\times\vec{a}_1 = \vec{0} \qquad p_1 = p_2 = 0$$

Ha $\vec{a}_1\times\vec{a}_2 = \vec{0} \;\rightarrow\; \vec{a}_2 = -\frac{p_1}{p_2}\vec{a}_1 = \lambda_1\vec{a}_1$ bármely vektor kifejezhető egy vele párhuzamos vektorral.

Három, nem komplanáris vektor lineárisan független, ha

$$\left(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3\right) \neq 0$$

$$\vec{a}_1\times\vec{a}_2\; / \qquad p_1\vec{a}_1 + p_2\vec{a}_2 + p_3\vec{a}_3 = \vec{0}$$

$$p_3\left(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3\right) = 0$$

$$hasonlóan \quad p_i\left(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3\right) = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

$$p_i = 0$$

Ha $(\vec a_1\ \vec a_2\ \vec a_3) = 0$, akkor van triviálistól eltérő megoldás, ha pl.

$$p_3 \neq 0 \qquad \vec a_3 = -\frac{p_1}{p_3}\vec a_1 - \frac{p_2}{p_3}\vec a_2$$

Három síkbeli vektor közül bármelyik kifejezhető a másik kettő lineáris kombinációjával.

Négy különböző vektor mindig lineárisan összefüggő.

Legyen:

$$(\vec a_1\ \vec a_2\ \vec a_3) \neq 0$$

$$\vec a_2 \times \vec a_3\ / \qquad p_1\vec a_1 + p_2\vec a_2 + p_3\vec a_3 + p_4\vec a_4 = \vec 0$$

$$p_1(\vec a_2\ \vec a_3\ \vec a_1) + p_4(\vec a_2\ \vec a_3\ \vec a_4) = 0$$

$$p_2(\vec a_3\ \vec a_1\ \vec a_2) + p_4(\vec a_3\ \vec a_1\ \vec a_4) = 0$$

$$p_3(\vec a_1\ \vec a_2\ \vec a_3) + p_4(\vec a_1\ \vec a_2\ \vec a_4) = 0$$

Az $(\vec a_i\ \vec a_j\ \vec a_4)$ közül biztosan van zéruszól különböző, hiszen $\vec a_4$ nem lehet közös síkban egyszerre $\vec a_1$, $\vec a_2$, $\vec a_3$ - mal.
Így pl. $p_4 \neq 0$ esetén

$$\vec a_4 = -\frac{p_1}{p_4}\vec a_1 - \frac{p_2}{p_4}\vec a_2 - \frac{p_3}{p_4}\vec a_3 = l_1\vec a_1 + l_2\vec a_2 + l_3\vec a_3$$

Következmény:

A 3D – s eiklideszi tér bármely $\vec v$ vektora felírható 3 lineárisan független (nem komplanáris) $\vec v_i$ $\ i = 1, 2, 3$ vektor segítségével.

$$\vec v = c_1\vec v_1 + c_2\vec v_2 + c_3\vec v_3 \qquad (\vec v_1\ \vec v_2\ \vec v_3) \neq 0$$

Ekkor a $\vec v_i$ vektorok bázisvektort alkotnak (kovariáns bázis).

Reciprok bázisvektorok (kontravariáns bázis):

$$\vec v_1^{\,*} = \frac{(\vec v_2 \times \vec v_3)}{(\vec v_1\ \vec v_2\ \vec v_3)} \qquad \vec v_2^{\,*} = \frac{(\vec v_3 \times \vec v_1)}{(\vec v_1\ \vec v_2\ \vec v_3)} \qquad \vec v_3^{\,*} = \frac{(\vec v_1 \times \vec v_2)}{(\vec v_1\ \vec v_2\ \vec v_3)}$$

Érvényes:

$$\vec{v}_i \, \vec{v}_j^{\,*} = \begin{cases} 1 \;\; ha \;\; i = j \\ 0 \;\;\; ha \;\; i \neq j \end{cases}$$

$$\left(\vec{v}_i^{\,*}\right)^* = \vec{v}_i$$

$$c_i = \vec{v}_i^{\,*} \cdot \vec{v}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \left(\vec{v}_1^{\,*} \cdot \vec{v}\right) + \vec{v}_2 \left(\vec{v}_2^{\,*} \cdot \vec{v}\right) + \vec{v}_3 \left(\vec{v}_3^{\,*} \cdot \vec{v}\right) = \left(\vec{v}_1 \circ \vec{v}_1^{\,*} + \vec{v}_2 \circ \vec{v}_2^{\,*} + \vec{v}_3 \circ \vec{v}_3^{\,*}\right) \cdot \vec{v} = \underline{\underline{I}} \cdot \vec{v}$$

Szokás mindkét bázist használni:

$$\vec{v} = c_i \, \vec{v}_i = c_i^* \, \vec{v}_i^{\,*} = c^i \, \vec{v}_i = c_i \, \vec{v}^{\,i}$$

DDKR-ben (xyz KR-ben):

$$\left.\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{e}_x \\ \vec{v}_2 &= \vec{e}_y \\ \vec{v}_3 &= \vec{e}_z \end{aligned}\right\} \qquad \vec{v}_i^{\,*} = \vec{v}_i$$

<u>Másodrendű tenzorok:</u>

Definíció: homogén, lineáris vektor-vektor függvény

$$\vec{v} = c_1 \, \vec{v}_1 + c_2 \, \vec{v}_2 + c_3 \, \vec{v}_3$$

$$\vec{w} = \vec{L}\left(\vec{v}\right) = \vec{w}_1 \, c_1 + \vec{w}_2 \, c_2 + \vec{w}_3 \, c_3 = \left(\vec{w}_1 \circ \vec{v}_1^{\,*} + \vec{w}_2 \circ \vec{v}_2^{\,*} + \vec{w}_3 \circ \vec{v}_3^{\,*}\right) = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v}$$

Inverz (reciprok) tenzor:

$$\vec{w} = \underline{\underline{A}} \cdot \vec{v} \qquad \vec{v} = \underline{\underline{A}}^{-1} \cdot \vec{w} \qquad \underline{\underline{A}}^{-1} \; \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \left(\vec{v}_1 \circ \vec{w}_1^{\,*} + \vec{v}_2 \circ \vec{w}_2^{\,*} + \vec{v}_3 \circ \vec{w}_3^{\,*}\right)$$

$\underline{\underline{A}}^{-1}$ létezik, ha $\vec{w}_i^{\,*}$ létezik, vagyis nem komplanáris. Ekkor $\underline{\underline{A}}$ nem elfajuló.

Ortogonális tenzor:

$$\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}} \qquad \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}^{-1}$$

Ekkor a leképezés távolság és szögtartó, amely állhat

- $\vec{n}$ tengely körüli pozitív forgatásból ($Q_{III} = 1$)
- $\vec{n}$ tengely körüli pozitív forgatásból és $\vec{n}$ - re merőleges síkra való tükrözésből ($Q_{III} = -1$)

Q_{III} a $\underline{\underline{Q}}$ tenzor 3. skalár invariánsa

Az $\underline{\underline{R}}$ forgástenzor olyan ortogonális tenzor, amely csak forgatást jelent ($Q_{III} = 1$).

$$\underline{\underline{R}}^T \cdot \underline{\underline{R}} = \underline{\underline{I}} \qquad R_{III} = 1$$

Poláris felbontás:

Ha $\underline{\underline{A}}$ nem elfajuló és $|\underline{\underline{A}}| > 0$, akkor

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{J}} = \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{R}}$$

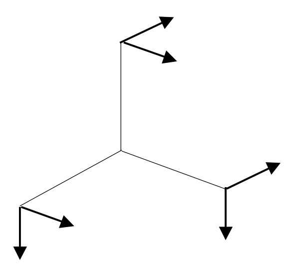
$\underline{\underline{R}}$ forgástenzor, $\underline{\underline{B}}, \underline{\underline{J}}$ szimmetrikus, pozitív, definit tenzorok.

<u>Szilárdságtani alapösszefüggések ismétlése:</u>

$$\vec{u} = -A\,y\,z\,\vec{e}_x + A\,z\,x\,\vec{e}_y - B\,x\,y\,\vec{e}_z \qquad A = 2\cdot 10^{-2}\ 1/mm, \qquad B = 10^{-2}\ 1/mm$$

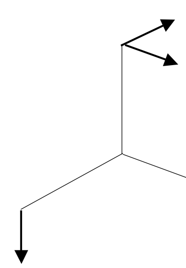
$$\underline{\underline{U}} = \vec{u} \circ \nabla = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \circ \vec{e}_x + \frac{\partial \vec{u}}{\partial y} \circ \vec{e}_y + \frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \circ \vec{e}_z = \vec{u}_x \circ \vec{e}_x + \vec{u}_y \circ \vec{e}_y + \vec{u}_z \circ \vec{e}_z$$

$$[\underline{\underline{U}}] = [\underline{u}_x \quad \underline{u}_y \quad \underline{u}_z] = \begin{bmatrix} 0 & -Az & -Ay \\ Az & 0 & Ax \\ -By & -Bx & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2z & -2y \\ 2z & 0 & 2x \\ -y & -x & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$$



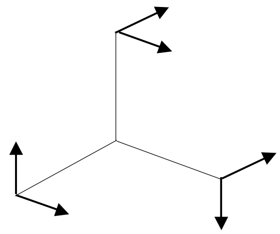
$$[\underline{\underline{A}}] = \left[\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{U}}^T\right)\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1{,}5y \\ 0 & 0 & 0{,}5x \\ -1{,}5y & 0{,}5x & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

$$\gamma_{xz} = -3\,y \cdot 10^{-2}$$
$$\gamma_{yz} = x \cdot 10^{-2}$$



$$[\underline{\underline{\Psi}}] = \left[\frac{1}{2}\left(\underline{\underline{U}} - \underline{\underline{U}}^T\right)\right] = \begin{bmatrix} 0 & -2z & -0{,}5y \\ 2z & 0 & 1{,}5x \\ 0{,}5y & -1{,}5x & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

$$\underline{\underline{\Psi}} \cdot \vec{n} = \vec{\psi} \times \vec{n}$$
$$\vec{\psi} = 10^{-2} \cdot \left(-1{,}5x\,\vec{e}_x - 0{,}5y\,\vec{e}_y + 2z\,\vec{e}_z\right)$$



Példa:

$$u = -A\left(yz + n\ xy\right)$$
$$v = A\left(xz + \frac{n}{2}x^2 - \frac{n}{2}y^2 - \frac{z^2}{2}\right)$$
$$w = -Bxy + Ayz$$
$$A = 2\cdot 10^{-2}\quad 1/mm, \qquad B = 10^{-2}\quad 1/mm$$
$$n = 0{,}4 \qquad G = 80000\ MPa$$

$$[\underline{\underline{U}}] = \begin{bmatrix} -An\ y & -A(z+n\ x) & -Ay \\ A(z+n\ x) & -An\ y & A(x-z) \\ -By & -Bx+Az & Ay \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}8y & -2z-0{,}8x & -2y \\ 2z+0{,}8x & -0{,}8y & 2x-2z \\ -y & -x+2z & 2y \end{bmatrix}\cdot 10^{-2}$$

$$[\underline{\underline{A}}] = \begin{bmatrix} -0{,}8y & 0 & -1{,}5y \\ 0 & -0{,}8y & 0{,}5x \\ -1{,}5y & 0{,}5x & 2y \end{bmatrix}\cdot 10^{-2} \qquad [\underline{\underline{Y}}] = \begin{bmatrix} 0 & -2z-0{,}8x & -0{,}5y \\ 2z+0{,}8x & 0 & 1{,}5x-2z \\ 0{,}5y & -1{,}5x+2z & 0 \end{bmatrix}\cdot 10^{-2}$$

$$A_I = 0{,}4y\cdot 10^{-2}$$
$$\underline{\underline{T}} = 2G\left(\underline{\underline{A}} + \frac{n}{1-2n}A_I\ \underline{\underline{I}}\right) = 16\cdot 10^4\left(\underline{\underline{A}} + 0{,}8y\,10^{-2}\ \underline{\underline{I}}\right)$$
$$[\underline{\underline{T}}] = 16\cdot 10^4\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1{,}5y \\ 0 & 0 & 0{,}5x \\ -1{,}5y & 0{,}5x & 2{,}8y \end{bmatrix}\cdot 10^{-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -24y \\ 0 & 0 & 8x \\ -24y & 8x & 44{,}8y \end{bmatrix}\cdot 10^{-2}$$
$$\underline{\underline{T}}\cdot\nabla + \vec{q} = \vec{0}\quad \textit{teljesül}$$