

Rugalmas – képlékeny hajlítás:

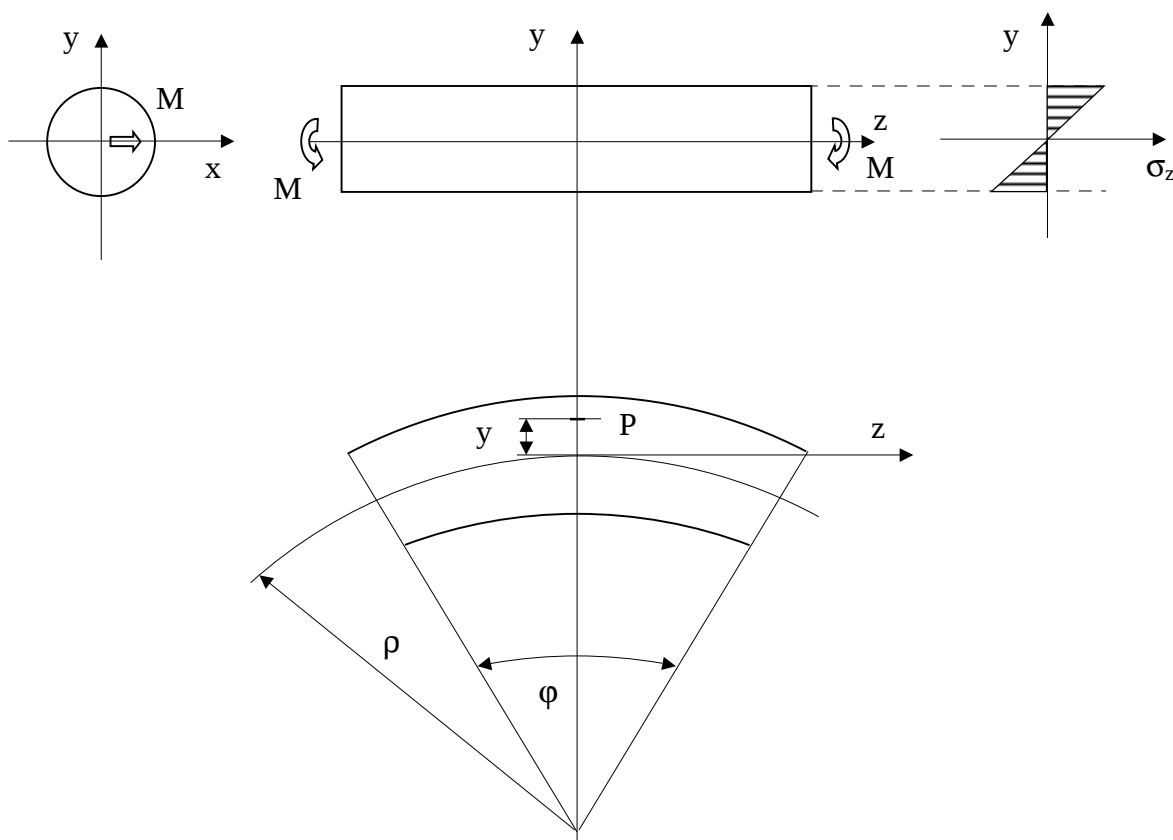
Két része:

- Egy keresztmetszet vizsgálata
- Teljes rúd vizsgálata

Egy keresztmetszet vizsgálata:

Prizmatikus rúd egyenes, tiszta hajlítása esetén a feltételezések (kis alakváltozásnál tapasztaltak alapján):

- A rúd keresztmetszetei síkok maradnak.
- A rúd minden pontjában egytengelyű feszültségi állapot keletkezik.
- Az alakváltozási és feszültségi főirányok ismertek.



$$[\underline{T}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}$$

$$[\underline{A}] = \begin{bmatrix} e_x & 0 & 0 \\ 0 & e_y & 0 \\ 0 & 0 & e_z \end{bmatrix}$$

$$e_x = e_y$$

Rugalmas és képlékeny állapotban:

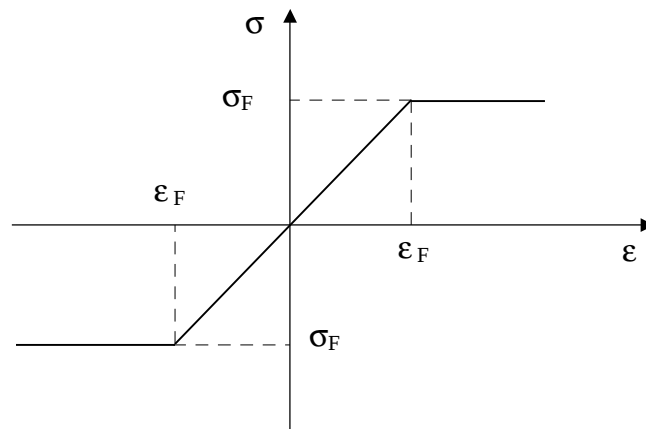
$$s_k = \frac{s_z}{3} \quad e_k = \frac{2e_x + e_z}{3}$$

$$e_k = K s_k \quad K = \frac{1}{2G} \frac{1-2n}{1+n}$$

$$2e_x + e_z = K s_z$$

További feltételezés: zérusvonal eltolódás nincs.

Anyagmodell: lineárisan rugalmas – ideálisan képlékeny



Képlékeny állapotban (képlékeny folyás állapotában):

Mivel a feszültségállapot egytengelyű, nem lehet következtetni a feszültségállapotból az alakváltozási állapotra.

$$s_F = s_z$$

$$2e_x + e_z = K s_F$$

$$e_x = -\frac{e_z}{2} + \frac{K s_F}{2}$$

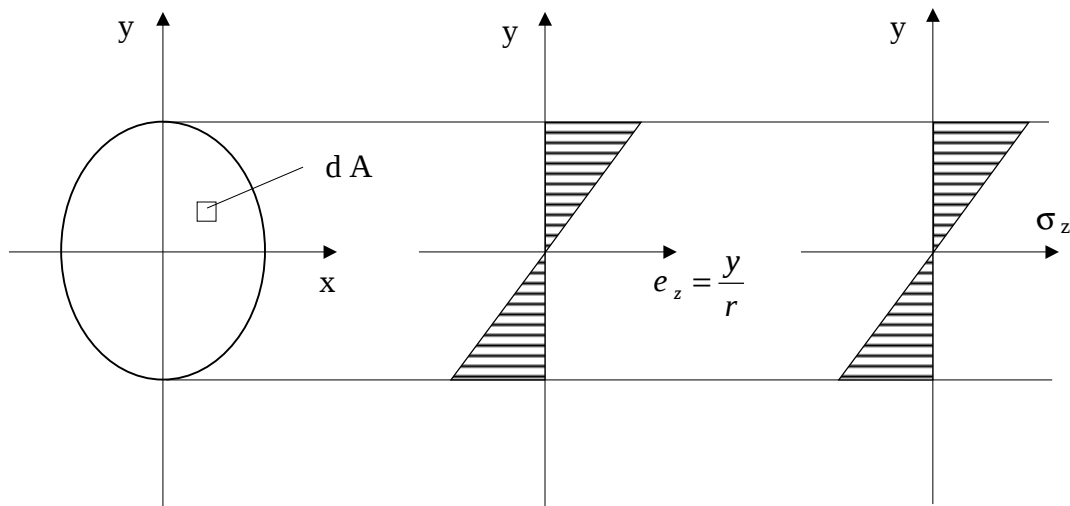
Tapasztalat szerint:

Az alakváltozás képlékeny állapotban úgy folytatódik, mint rugalmas állapotban.

Rugalmas – képlékeny állapotban egyaránt:

$$e_z = \frac{\mathbf{l}' - \mathbf{l}}{\mathbf{l}} = \frac{(r + y)j - rj}{rj} = \frac{y}{r}$$

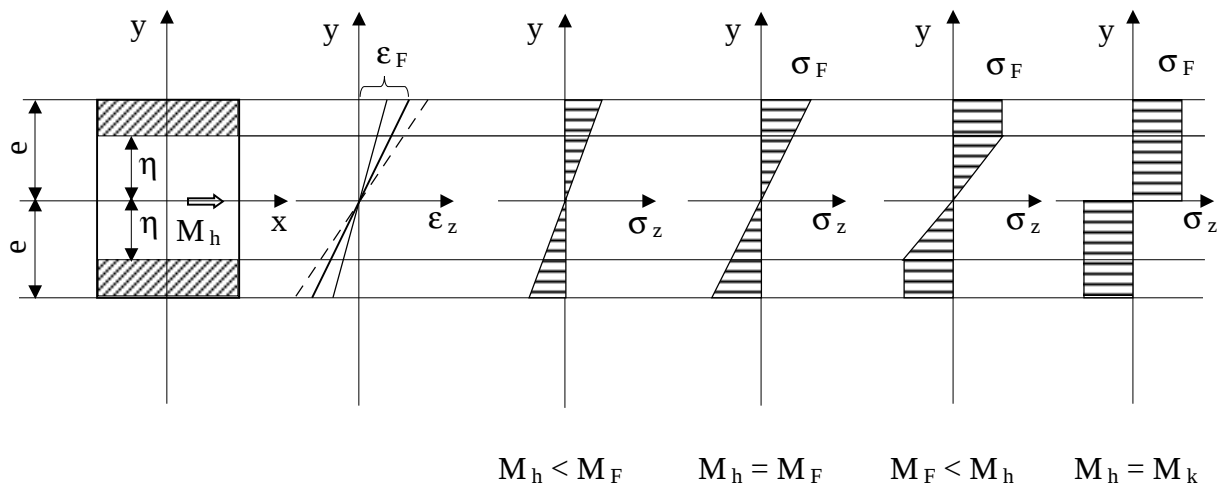
$1/r$ a középvonal görbülete



$$\frac{1}{r} = -\frac{d^2 v}{dz^2} \quad \epsilon_z = -y \frac{d^2 v}{dz^2} \quad v(z) \text{ görbe a rúd hosszirányú súlyvonalának alakja}$$

További feltételezés: x, y a keresztmetszet szimmetriatengelyei kettős szimmetriájú keresztmetszet

Rugalmas – képlékeny alakváltozás esetén:



M_F rugalmas teherbírás határa

M_k képlékeny teherbírás határa

Nyomatékok meghatározása:

Kiindulás: feszültségi eredők

$$\begin{aligned}\dot{\vec{F}}_S &= \dot{\vec{0}}; & \dot{\vec{M}}_S &= M_h \vec{e}_x \\ \vec{F}_S &= \int_{(A)} \vec{r}_z dA \rightarrow 0 = \int_{(A)} s_z dA \\ \vec{M}_S &= M_h \vec{e}_x = \int_{(A)} \vec{R} \times \vec{r}_z dA = \int_{(A)} (x \vec{e}_x + y \vec{e}_y) \times s_z \vec{e}_z dA = - \int_{(A)} x s_z \vec{e}_y dA + \int_{(A)} y s_z \vec{e}_x dA \\ M_h &= \int_{(A)} y s_z dA\end{aligned}$$

Rugalmas alakváltozás:

$$\begin{aligned}M_h &= \int_{(A)} y s_z dA = \int_{(A)} y E e_z dA = \int_{(A)} E \frac{y^2}{r} dA = \frac{E}{r} I_x \\ \frac{1}{r} &= \frac{M_h}{I_x E} & s_z &= E e_z = E \frac{y}{r} = \frac{M_h}{I_x} y\end{aligned}$$

Rugalmas teherbírás határa:

$$\begin{aligned}M_h &= M_F & s_z &= s_F & h &= e \\ s_F &= \frac{M_F}{I_x} e \rightarrow M_F = \frac{s_F I_x}{e} \\ \frac{1}{r_F} &= \frac{s_F I_x}{e I_x E} = \frac{s_F}{e E}\end{aligned}$$

Rugalmas – képlékeny állapot:

$$M_F < M_h$$

Ábrából:

$$\begin{aligned}\frac{s_F}{h} &= \frac{s_z}{y} & s_z &= s_F \frac{y}{h} \\ M_h &= \int_{(A)} y s_z dA = \underbrace{\int_{-h}^h s_F \frac{y}{h} y dA}_{\text{rugalmas rész}} + 2 \underbrace{\int_h^e s_F y dA}_{\text{képlékeny rész}}\end{aligned}$$

$$M_h = \underbrace{\frac{s_F}{h} \int_{-h}^h y^2 dA}_{I_{xe}} + 2 \underbrace{s_F \int_h^e y dA}_{S_{xp}}$$

$$M_h = \frac{s_F}{h} I_{xe} + 2 s_F S_{xp}$$

$I_{xe} = I_{xe}(h)$ a teljes keresztmetszet x tengelyre számított másodrendű nyomatéka

$S_{xp} = S_{xp}(h)$ a fél keresztmetszet x tengelyre számított statikai nyomatéka

Képlékeny állapot (képlékeny folyás):

$h = 0$; $s_z = s_F$ a teljes keresztmetszet képlékeny

$M_k = 2 s_F S_{xp}$ a képlékeny teherbírás határa

Csak elvileg valósítható meg.

Görbületek:

Rugalmas állapotban: $\frac{1}{r} = \frac{M_h}{I_x E}$

Határeset: $\frac{1}{r_F} = \frac{M_F}{I_x E} = \frac{s_F}{E e}$

Rugalmas – képlékeny állapotban:

$0 < \eta < e$ $y = \eta$ helyen $s_z = s_F$

$$e_z = \frac{s_F}{E} = \frac{h}{r} \rightarrow \frac{1}{r} = \frac{s_F}{E h}$$

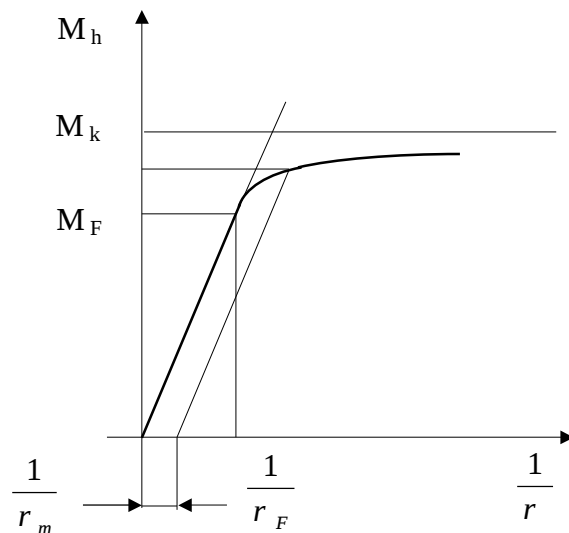
A hajlítónyomaték és a görbület kapcsolata:

$$M_h < M_F \quad \frac{1}{r} = \frac{M_h}{I_x E}$$

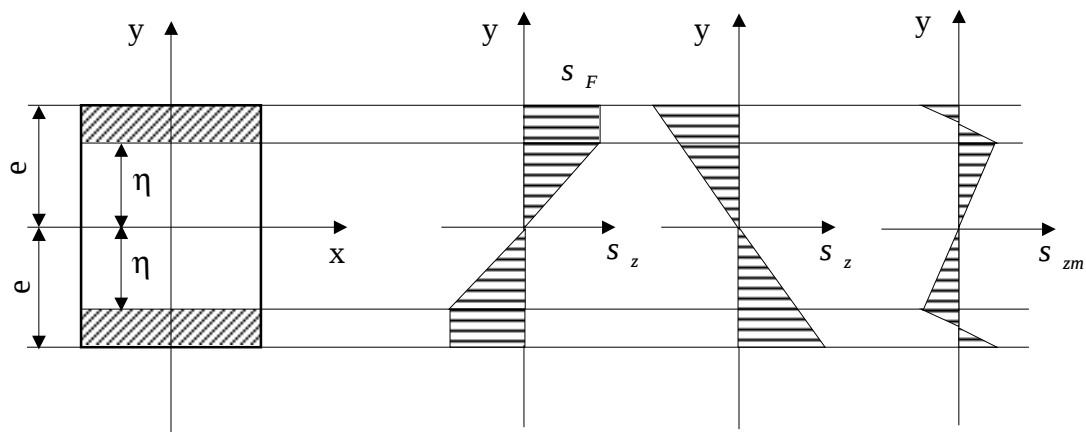
$$M_h = M_F \quad \frac{1}{r_F} = \frac{M_F}{I_x E}$$

$$M_F < M_h < M_k \quad \frac{1}{r} = \frac{s_F}{E h}$$

Diagramban ábrázolva az $M_h = M_h \left(\frac{1}{r} \right)$ függvényt:



Tehermentesítés:



Terhelés
 $M_F < M_h$

Tehermentesítés
mindig rugalmas
alakváltozás

Maradó
feszültségek

$$s_{zm} = s_z - \frac{M_h}{I_x} y \quad \frac{1}{r_m} = \frac{1}{r} - \frac{M_h}{I_x E}$$