

Összekapcsolva: Hencky-egyenlet

$$\underline{\underline{A}} = y \left(\underline{\underline{T}} - \frac{y}{K} - \frac{K}{K} s_k \underline{\underline{I}} \right)$$

A Hooke-törvény formális általánosítása. Addig tekinthető jónak, amíg a test valamely pontjában a feszültségkomponensek arányosan nőnek, irányuk változatlan. Ellentétben áll a stabilitási posztulátummal is. Közelítő megoldást jelent.

Képlékeny folyás elmélete:

Feltételezések:

- A test izotróp.
- $e_k = K s_k \quad d e_k = K d s_k$
- $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}_e + \underline{\underline{A}}_{pl} \quad d \underline{\underline{A}} = d \underline{\underline{A}}_e + d \underline{\underline{A}}_{pl}$
- $\underline{\underline{A}}' = \underline{\underline{A}}'_e + \underline{\underline{A}}'_{pl} \quad d \underline{\underline{A}}' = d \underline{\underline{A}}'_e + d \underline{\underline{A}}'_{pl}$
- Maradó térfogatváltozás zérus

$$A_I^p = 0 \quad d A_I^p = 0$$

- Mises-féle képlékenységi feltétel - $T = \frac{s_F}{\sqrt{3}} = t_F$
- $d \underline{\underline{A}}_{pl} = d l \underline{\underline{T}}'$

Mivel:

$$A_I^{pl} = 0 \rightarrow e_k^{pl} = 0$$

$$\underline{\underline{A}}'_{pl} = \underline{\underline{A}}_{pl} - e_k^{pl} \underline{\underline{I}} = \underline{\underline{A}}_{pl}$$

Ezért: $d \underline{\underline{A}}'_{pl} = d l \underline{\underline{T}}'$

Rugalmas rész: $d \underline{\underline{A}}'_e = \frac{1}{2G} d \underline{\underline{T}}'$

Együtt: Prandtl-Reuss egyenlet:

$$d \underline{\underline{A}}' = \frac{1}{2G} d \underline{\underline{T}}' + d l \underline{\underline{T}}'$$

Összhangban áll a stabilitási posztulátummal.

Ideálisan merev-képlékeny anyag esetén:

$$\varepsilon_k = 0 \quad \text{az anyag összenyomhatatlan}$$

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A'}} \quad \underline{\underline{A'}} = \underline{\underline{A'}}_{pl} \quad \underline{\underline{A}}_e = \underline{\underline{0}}$$

Ekkor: $d \underline{\underline{A}} = d l \underline{\underline{T'}}$ Levy-Mises-féle egyenlet

A két elmélet általában eltér egymástól, egyszerűbb terheléseknél azonos eredményre vezetnek.

A test állapotváltozásának összefüggéseit írja le a Prandtl-Reuss egyenlet.

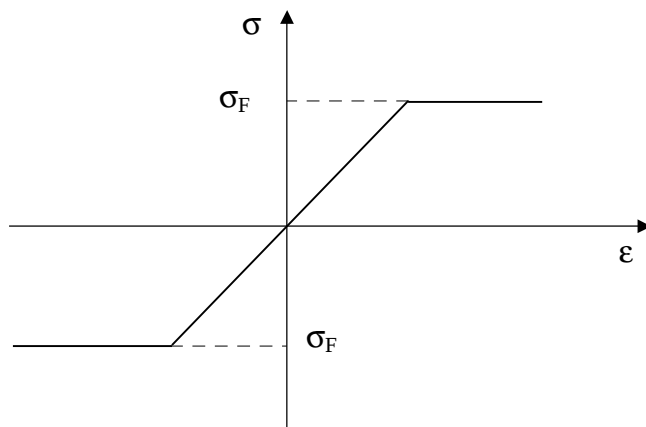
A képlékenységtani feladatok megoldása általában matematikailag bonyolult feladat.

A rugalmas-képlékeny egyensúly néhány esete:

Húzott-nyomott rudakból álló szerkezetek rugalmas-képlékeny állapota:

Feltételezés:

- A prizmatikus rúd húzásra vagy nyomásra azonos módon viselkedik.
- A rúd anyaga lineárisan rugalmas – ideálisan képlékeny.



képlékeny állapot = képlékeny folyás

Egyetlen prizmatikus rúd húzás (nyomása):

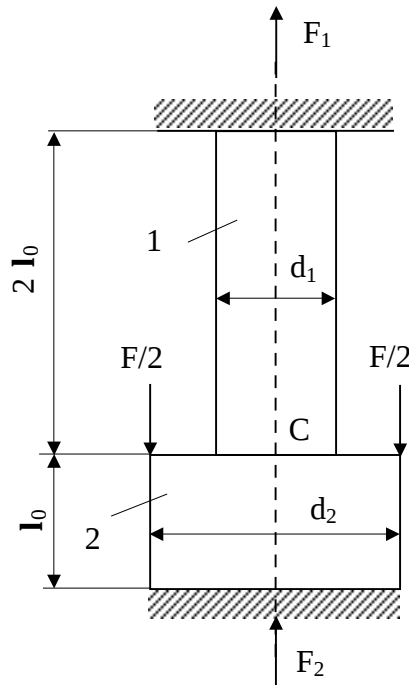
A terhelés során egyértelmű a kapcsolat a σ_z és az ε_z között. (z a rúd hossz tengelye)

Képlékeny folyás állapotában: $\sigma_z = \sigma_F = \text{áll.}$, ε_z tetszőleges.

Ez azt jelenti, hogy egyetlen rúd egyensúlyi helyzete a folyási határ elérésekor megbomlik, a nyúlás tetszőlegesen növekedhet.

Más a helyzet akkor, ha olyan szerkezeti elemekhez kapcsolódik, amelyek korlátozzák az alakváltozás növekedését. Ekkor képlékeny folyás esetén is meghatározott a rúd nyúlása. Tehermentesítés után, ha a rúd nem kapcsolódik más elemekhez, a rúdban maradó feszültség nem lép fel, a maradó nyúlás pedig a szakítódiagramból leolvasható.

1. Példa:



- 1 és 2 mereven össze vannak kapcsolva C - ben
- anyaguk azonos
- terhelés: $F/2$ szimmetrikusan
- másik végük befogva

1- es rúd: húzott

$$d_1, l_1 = 2 l_0, A_1 = \frac{d_1^2 p}{4}$$

2- es rúd: nyomott

$$d_2, l_2 = l_0, A_2 = \frac{d_2^2 p}{4}$$

Mivel azonos az anyaguk:

$$s_{F1} = s_{F2} = s_F$$

$$E_1 = E_2 = E$$

$$n_1 = n_2 = n$$

Feladat: eldönteni, hogy a terhelés (F erő) növekedésével melyik rúd kerül először képlékeny állapotba.

Képlékeny állapot:

1-es rúd: $F_1 = s_F A_1$

2-es rúd: $F_2 = s_F A_2$

A terhelés kezdetén mindkét rúd rugalmas állapotban van, ekkor a rúderők meghatározása statikailag határozatlan feladat.

Statikai egyensúlyi egyenlet:

$$F_1 + F_2 = F$$

Önmagában kevés, alakváltozási egyenlettel kell kiegészíteni.

Alakváltozási egyenlet: azt fejezi ki, hogy a két rúd nem válik szét, azaz a tengelyirányú elmozdulások megegyeznek.

$$\text{1-es rúd:} \quad s_{z1} = \frac{F_1}{A_1} \quad e_{z1} = \frac{s_{z1}}{E} = \frac{F_1}{A_1 E} = \frac{D \cdot l_1}{l_1} \quad \rightarrow \quad D \cdot l_1 = \frac{F_1 \cdot l_1}{A_1 E}$$

$$\text{2-es rúd:} \quad s_{z2} = \frac{F_2}{A_2} \quad e_{z2} = \frac{s_{z2}}{E} = \frac{F_2}{A_2 E} = \frac{D \cdot l_2}{l_2} \quad \rightarrow \quad D \cdot l_2 = \frac{F_2 \cdot l_2}{A_2 E}$$

Alakváltozási egyenlet:

$$D \cdot l_1 = D \cdot l_2 \quad \frac{F_1 \cdot l_1}{A_1 E} = \frac{F_2 \cdot l_2}{A_2 E} \quad \rightarrow \quad \frac{F_1 \cdot 2 \cdot l_0}{A_1 E} = \frac{F_2 \cdot l_0}{A_2 E} \quad \rightarrow \quad \frac{2 F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

Tehát a két egyenlet:

$$\left. \begin{array}{l} F_1 + F_2 = F \\ \frac{2 F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \end{array} \right\} \quad F_1 \text{ és } F_2 \text{ kifejezhető az } F \text{ erővel}$$

$$F_1 = F - F_2 = F - \frac{2 F_1 A_2}{A_1}$$

$$F_1 A_1 = F A_1 - 2 F_1 A_2$$

$$F_1 (A_1 + 2 A_2) = F A_1 \quad \rightarrow \quad F_1 = \frac{F A_1}{A_1 + 2 A_2}$$

$$F_2 = F - F_1 = F - \frac{F A_1}{A_1 + 2 A_2}$$

$$F_2 = \frac{F A_1 + 2 F A_2 - F A_1}{A_1 + 2 A_2} \quad \rightarrow \quad F_2 = \frac{2 F A_2}{A_1 + 2 A_2}$$

$$F_1 = N_1 \quad \text{húzott}$$

$$-F_2 = N_2 \quad \text{nyomott}$$

Mivel $F_2 > F_1$, a 2-es rúd kerül először képlékeny állapotba.

A keletkezett feszültségek:

1-es rúd:
$$s' = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F}{A_1 + 2 A_2} = \frac{N_1}{A_1}$$

2-es rúd:
$$s'' = -\frac{F_2}{A_2} = -\frac{2 F}{A_1 + 2 A_2} = \frac{N_2}{A_2}$$

A feszültségek alapján: $|s''| > |s'|$, a 2-es rúd kerül először képlékeny állapotba.

Mikor következik be a képlékeny állapot?

Ha:
$$s'' = -\frac{2 F}{A_1 + 2 A_2} = -s_F$$

$$F = F_F = \frac{s_F (A_1 + 2 A_2)}{2}$$

Rugalmas határállapot (megjelenik a képlékeny állapot az egyik rúdban).

Másként:

Ha
$$F_2 = s_F A_2 \quad s_F A_2 = \frac{2 F A_2}{A_1 + 2 A_2}$$

$$F = F_F = \frac{s_F (A_1 + 2 A_2)}{2}$$

Ekkor az 1-es rúd még rugalmas állapotban van. $s' = \frac{s_F}{2}$

A 2-es rúd megfolyása után a szerkezet még további teherviselésre képes mindaddig, amíg az 1-es rugalmas állapotban van.

Ha mindkét rúd képlékeny állapotba kerül:

$$F = F_1 + F_2 = s_F A_1 + s_F A_2 = s_F (A_1 + A_2) = F_k$$

F_k a szerkezet képlékeny határterhelése.

F_k erő ráhelyezésekor a szerkezet nem marad tovább nyugalomban, nem alkalmas további teherviselésre, kimerül a szerkezet teherbírása.

Alakítható anyagokból készült szerkezetek esetén szokás a szerkezet elemeinek méretmeghatározása miatt a szerkezet teherbírását vizsgálni.

Tehát, ha

1. $F < F_F$ rugalmas alakváltozás
2. $F_F \leq F \leq F_k$ a 2-es rúd képlékeny folyás állapotában van, az 1-es viszont még rugalmas állapotban
3. $F = F_k$ csak képlékeny folyás; megszűnik az egyensúly

Vizsgáljuk azt az esetet, ha a szerkezetet F_p erő terheli:

$$F = F_p \quad \text{és} \quad F_F \leq F_p \leq F_k$$

Mivel a 2-es rúd képlékeny állapotban van, $F_2 = s_F A_2$ a rúderő és állandó.

Az 1-es rúd még rugalmas állapotban van:

$$F_p = F_1 + F_2 \quad F_1 = F_p - s_F A_2 \quad \text{a rúderő}$$

Feszültségek:

2-es rúd: $s'' = -s_F$

1-es rúd: $s' = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_p - s_F A_2}{A_1} = \frac{N_1}{A_1} < s_F$

Tehermentesítés: F_p erő elérése után

Számítjuk a maradó feszültségeket és a rudak hosszát.

Maradó feszültségek meghatározása:

Szuperpozícióval: $F_p + (-F_p) = 0$ terheletlen a szerkezet, mindenütt rugalmas állapot

Az F_p hatására keletkezett rugalmas – képlékeny állapotban kialakult feszültségállapotra szuperponáljuk a $(-F_p)$ terheléssel létrehozott rugalmas feszültségi állapotot. (Mivel húzott-nyomott rudak esetén egytengelyű feszültségállapot alakul ki, egy főfeszültséggel megadható.)

A tehermentesítésnél keletkező feszültségek:

Rugalmas állapot:

Egyensúlyi egyenlet: $F_p = F_{1e} + F_{2e}$

Alakváltozási egyenlet: $\frac{F_{1e}}{A_1} \frac{2l_0}{E} = \frac{F_{2e}}{A_2} \frac{l_0}{E}$

Így:
$$F_{1e} = \frac{F_p A_1}{A_1 + 2 A_2}$$

$$F_{2e} = \frac{F_p 2 A_2}{A_1 + 2 A_2}$$

Feszültségek:
$$s'_e = -\frac{F_p}{A_1 + 2 A_2} \quad \text{az 1-es rúdban}$$

$$s''_e = \frac{2 F_p}{A_1 + 2 A_2} \quad \text{a 2-es rúdban}$$

Maradó feszültségek:

1-es rúdban:
$$s'_m = s' + s'_e = \frac{F_p - s_F A_2}{A_1} - \frac{F_p}{A_1 + 2 A_2}$$

Átalakítva:

$$\begin{aligned} s'_m &= \frac{F_p A_1 + 2 F_p A_2 - s_F A_1 A_2 - 2 s_F A_2^2 - F_p A_1}{A_1 (A_1 + 2 A_2)} = \frac{2 F_p A_2 - s_F A_2 (A_1 + 2 A_2)}{A_1 (A_1 + 2 A_2)} = \\ &= \frac{2 F_p A_2}{A_1 (A_1 + 2 A_2)} - s_F \frac{A_2}{A_1} = s_F \frac{A_2}{A_1} \left[\frac{2 F_p A_2 A_1}{A_1 (A_1 + 2 A_2) s_F A_2} - 1 \right] = s_F \frac{A_2}{A_1} \left[\frac{F_p}{F_F} - 1 \right] \end{aligned}$$

2-es rúdban:

$$s''_m = s'' + s''_e = -s_F + \frac{2 F_p}{A_1 + 2 A_2} = s_F \left(\frac{F_p}{F_F} - 1 \right)$$

Látszik, hogy a tehermentesítés után mindkét rúd húzott lesz.

Maradó erők:

$$\begin{aligned} F_{1m} &= s'_m A_1 = s_F A_2 \left(\frac{F_p}{F_F} - 1 \right) \\ F_{2m} &= s''_m A_2 = s_F A_2 \left(\frac{F_p}{F_F} - 1 \right) \end{aligned}$$

A két maradó erő megegyezik.

Tehermentesítés után a rudak hossza:

$$1\text{-es rúd:} \quad l'_1 = l_1 + D \quad l_1 = 2 \quad l_0 + \frac{s'_m}{E} 2 \quad l_0 = 2 \quad l_0 \left(1 + \frac{s'_m}{E} \right)$$

$$l_1 + l_2 = 2 \quad l_0 + l_0 = 3 \quad l_0$$

$$2\text{-es rúd:} \quad l'_2 = 3 \quad l_0 - l'_1 = 3 \quad l_0 - 2 \quad l_0 \left(1 + \frac{s'_m}{E} \right) = l_0 - 2 \quad l_0 \frac{s'_m}{E}$$

Ennél a feladatnál azonos anyagú rudakat vizsgáltunk.

Azonos anyagú rudak esetén:

$$E_1 = E_2 = E; \quad s_{F1} = s_{F2} = s_F$$

Az a rúd kerül hamarabb képlékeny állapotba, amelynél nagyobb az e , nagyobb a s , nagyobb az F .

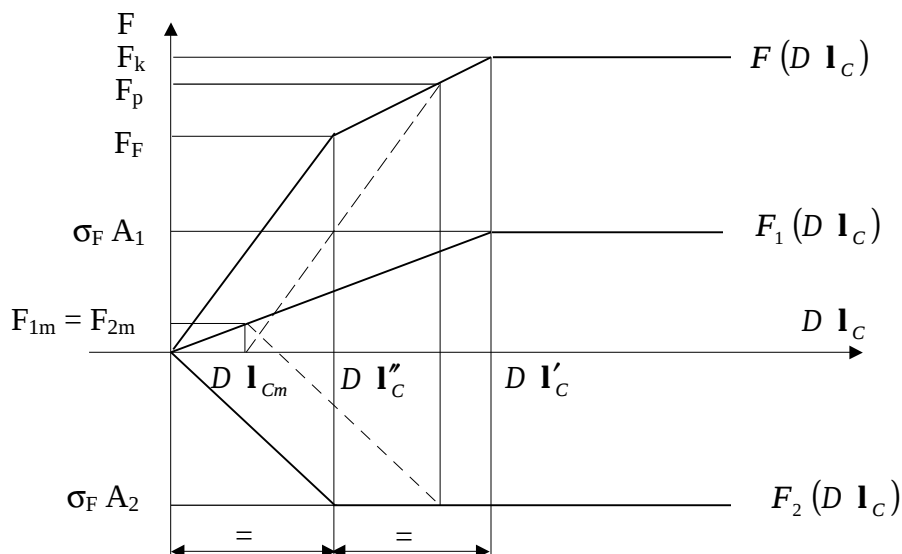
Mivel: $s = \frac{F}{A}$; $e = \frac{s}{E}$; $e = \frac{D \quad l}{l}$, ezek a mennyiségek arányosak egymással. Bármelyik használható az összehasonlításra.

Különböző anyagú rudak esetén:

Az e , s , F nem használható az összehasonlításra, helyette a $D \quad l$ elmozdulásszükséglet számít. Amelyik rúdnál kisebb az elmozdulásszükséglet, az kerül hamarabb képlékeny állapotba.

A feladat megoldása szerkesztéssel:

A rúderőket ábrázoljuk a $D \quad l_C$ függvényében.



$$F_1 + F_2 = F$$

$$F_F = \frac{s_F (A_1 + 2 A_2)}{2}$$

$$F_k = s_F (A_1 + A_2)$$

$$D \mathbf{l}'_C = \frac{s_F}{E} \mathbf{l}_1 = \frac{s_F}{E} 2 \mathbf{l}_0$$

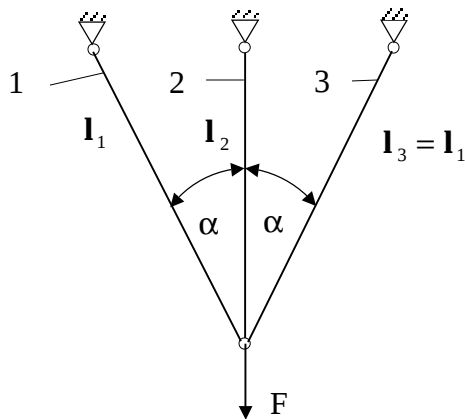
$$D \mathbf{l}''_C = \frac{s_F}{E} \mathbf{l}_2 = \frac{s_F}{E} \mathbf{l}_0$$

$$D \mathbf{l}'_C = 2 D \mathbf{l}''_C$$

2. Példa:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_0$$

$$\sigma_{F1} = \sigma_{F2} = \sigma_{F3} = \sigma_F$$



A teherbírást vizsgálva keressük a rudak szükséges keresztmetszetét.

l_1, l_2, s_F, F, a és n ismert.

Kérdés: mekkora az A_0 ?

A teherbírás kimerül, ha mindhárom rúd képlékeny állapotba kerül.

Függőleges vetületi egyenlet:

$$F = F_1 \cos a + F_2 + F_3 \cos a$$

A határterhelés: $F = F_k$

Ekkor: $F_1 = s_F A_0$; $F_2 = s_F A_0$; $F_3 = s_F A_0$

Ezért:

$$F_k = s_F A_0 \cos a + s_F A_0 + s_F A_0 \cos a$$

$$F_k = s_F A_0 (1 + 2 \cos a)$$

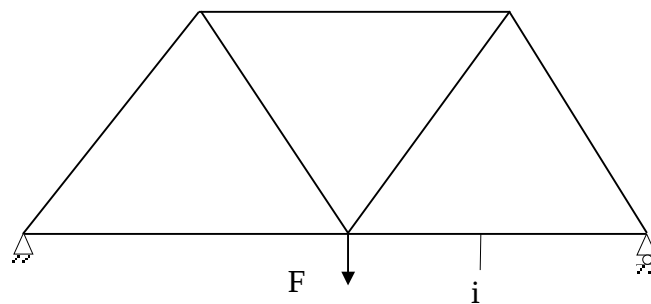
A biztonság miatt:

$$F \leq \frac{F_k}{n} = \frac{s_F A_0 (1 + 2 \cos a)}{n}$$

Innen:

$$A_0 \geq \frac{F n}{s_F (1 + 2 \cos a)}$$

Statikailag határozott szerkezetek:



Kiválasztható az a rúd a szerkezetből, amelyik a leghamarabb megfolyik (pl. i). Ekkor már nem lehet a szerkezet tartós nyugalomban. Ezért nem lehet megengedni egyetlen rúdban sem a képlékeny alakváltozást.

3. Példa:

3-as rúd: vastag, merev gerenda

$$A_1 = A_2 = 3 \text{ cm}^2$$

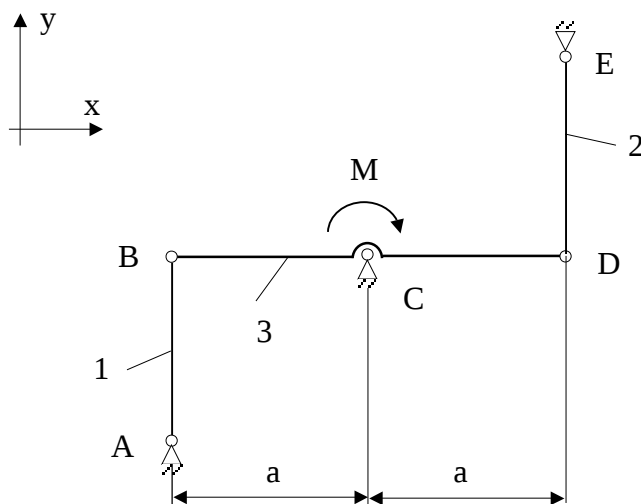
$$s_{F1} = 200 \text{ MPa}$$

$$s_{F2} = 260 \text{ MPa}$$

$$l_1 = 2 \text{ m}$$

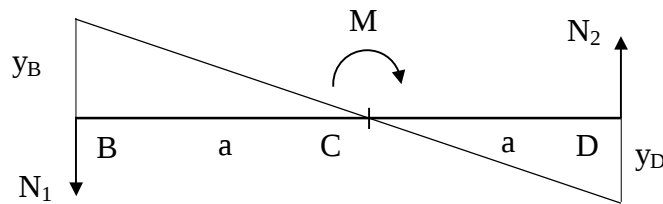
$$l_2 = 6 \text{ m}$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$$



Különböző anyagú rudak: $\sigma_{F1} \neq \sigma_{F2}$

A gerenda egyensúlya:



$$M_C = 0$$

$$(N_1 + N_2) a - M = 0$$

$$N_1 + N_2 = M/a$$

Az 1-es és 2-es húzott rudak.

Szimmetria miatt: $y_B = y_D$

$$y_B = D \mathbf{l}_1 = e_1 \mathbf{l}_1 = \frac{s_1}{E} \mathbf{l}_1 = \frac{N_1}{A_1 E} \mathbf{l}_1$$

$$y_D = D \mathbf{l}_2 = e_2 \mathbf{l}_2 = \frac{s_2}{E} \mathbf{l}_2 = \frac{N_2}{A_2 E} \mathbf{l}_2$$

$$\frac{N_1}{A_1 E} \mathbf{l}_1 = \frac{N_2}{A_2 E} \mathbf{l}_2$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\mathbf{l}_2}{\mathbf{l}_1} = 3$$

$$N_1 = 3 N_2$$

Ezért az 1-es rúd folyik meg hamarabb.

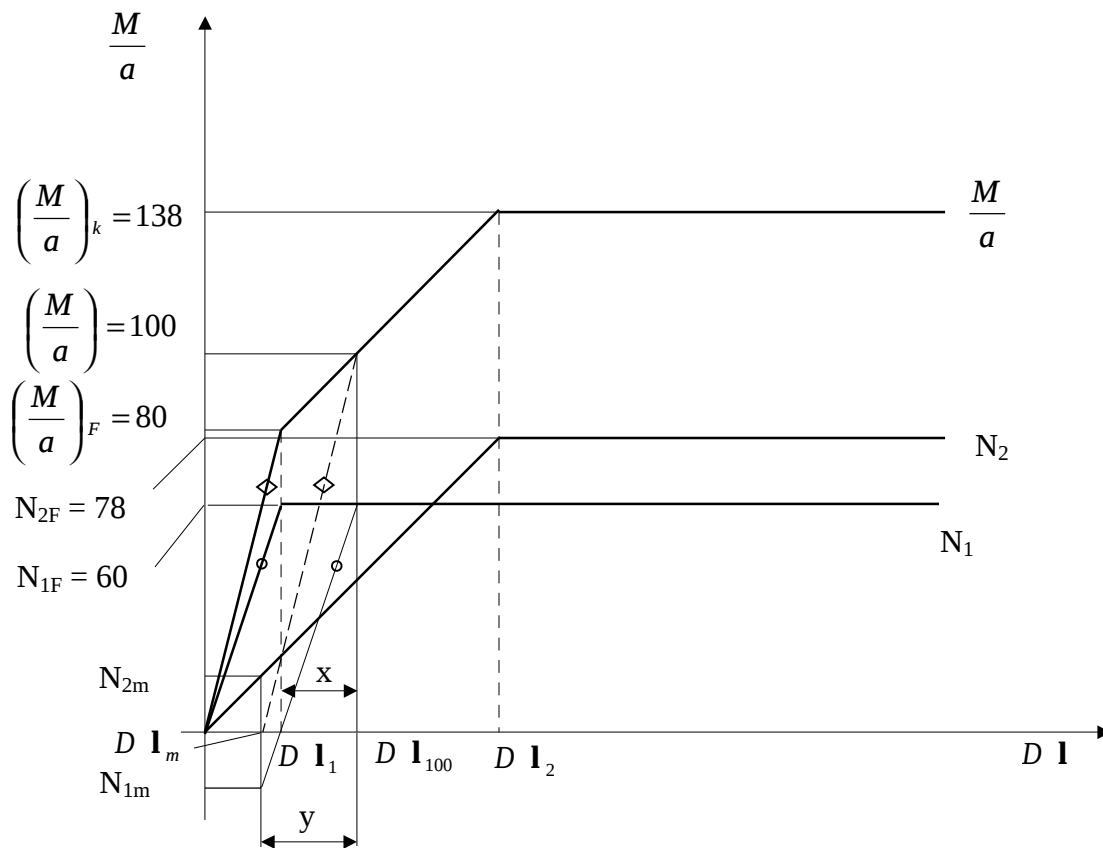
$$N_1 + \frac{N_1}{3} = \frac{M}{a} \quad N_1 = \frac{3}{4} \frac{M}{a} \quad N_2 = \frac{1}{4} \frac{M}{a}$$

$$N_{1F} = s_{F1} A_1 = 200 \cdot 300 = 6 \cdot 10^4 \text{ N} = 60 \text{ kN}$$

$$N_{2F} = s_{F2} A_2 = 260 \cdot 300 = 78 \cdot 10^3 \text{ N} = 78 \text{ kN}$$

$$D \mathbf{l}_1 = \frac{6 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^5} = 2 \text{ mm}$$

$$D \mathbf{l}_2 = \frac{78 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^2 \cdot 2 \cdot 10^5} = 7,8 \text{ mm}$$



Terheljünk fel $\left(\frac{M}{a}\right) = 100 \text{ kN}$ - ra, majd tehermentesítsünk.

Keressük: $D l_m = ?$ $N_{1m} = ?$ $N_{2m} = ?$

$$D l_{100} = D l_1 + x \quad \frac{138 - 80}{7,8 - 2} = \frac{20}{x}$$

$$D l_{100} = 2 + 2 = 4 \text{ mm} \quad x = 20 \cdot \frac{5,8}{58} = 2$$

$$D l_m = D l_{100} - y \quad \frac{80}{2} = \frac{100}{y} \quad y = \frac{200}{80} = 2,5$$

$$D l_m = 4 - 2,5 = 1,5 \text{ mm}$$

Maradó erők:

$$\frac{78}{7,8} = \frac{N_{2m}}{D l_m} \quad \frac{78}{7,8} \cdot 1,5 = N_{2m} \quad N_{2m} = 15 \text{ kN}$$

$$\frac{60}{2} = \frac{60 + |N_{1m}|}{y} \quad \frac{60}{2} \cdot 2,5 = 60 + |N_{1m}| \quad 75 - 60 = |N_{1m}| \quad N_{1m} = -15 \text{ kN}$$