# VEM A

GYAKORLATI ANYAGOK

Összeállíotta:

**Páczelt István**
**Dluhi Kornél és Baksa Attila**

**2004.**

# 1. gyakorlat

# Közelítő módszerek I.

## 1.1. Ritz-módszer bemutatása példákon keresztül

Egy $\overset{*}{\vec{u}}$ mező kinematikailag lehetséges, ha

- folytonos
- deriválható
- kielégíti a kinematikai peremfeltételt: $\overset{*}{\vec{u}} = \vec{u}_0$, ha $\vec{r} \in A_u$.

A $\Pi$ min. elvet használjuk:

Az $\overset{*}{\vec{u}}$ kinematikailag lehetséges elmozdulás mezőt így közelítjük:

$$\overset{*}{\vec{u}} = \vec{u}_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i \cdot \varphi_i\left(\vec{r}\right)\vec{e}_x + \sum_{j=1}^{N} c_{N+j}\psi_j\left(\vec{r}\right)\vec{e}_y + \sum_{k=1}^{N} c_{2N+k}\chi_k\left(\vec{r}\right)\vec{e}_z$$

$\varphi_i = \psi_i = \chi_i = 0$, ha $\vec{r} \in A_u$, $i = 1, \ldots, N$

$\Pi = \Pi\left(c_1, c_2, \ldots, c_{3N}\right)$

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial c_1}\delta c_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial c_2}\delta c_2 + \cdots + \frac{\partial\Pi}{\partial c_{3N}}\delta c_{3N} = 0$$

$\delta c_i$ tetszőleges legyen!

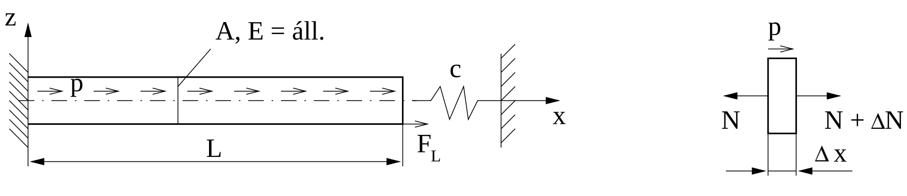
Ezáltal kapunk egy lineáris egyenletrendszert a paraméterekre nézve!

$$\underline{c}^T = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{3N} \end{bmatrix}$$

$\delta\Pi = \delta\underline{c}^T \frac{\partial\Pi}{\partial\underline{c}} = 0$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\underline{c}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\Pi}{\partial c_1} & \frac{\partial\Pi}{\partial c_2} & \ldots & \frac{\partial\Pi}{\partial c_{3N}} \end{bmatrix}^T = \underline{0} \Leftrightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, \ldots 3N$$

A 1.1 ábrán látható húzott-nyomott rúd terhelése $p$ – hossz mentén megoszló súlyterhelés, és $F_L$ – koncentrált erő. A rúd pontjainak elmozdulása $u\left(x\right)$.




1.1. ábra. Húzott-nyomott rúd; Kiragadott rúddarab

**Példa 1.1** Rúd differenciál egyenlete

$$\Delta N + p \cdot \Delta x = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta x} + p \quad = 0$$

$$\frac{dN}{dx} + p = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} = u' \quad \text{– kinematikai egyenlet}$$

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot u' \quad \text{– Hook-törvény}$$

$$\frac{dN}{dx} + p = 0 \quad \text{– egyensúlyi egyenlet (rúdra)}$$

Kinematikai peremfeltétel: $u\,(x = 0) = 0$

Dinamikai peremfeltétel: $N\,(x = L) = A \cdot E \cdot u'\Big|_L = F_L + F_c = F_L - c \cdot u_L$

Teljes potenciális energia:

$$\Pi\,(u) = \overbrace{\frac{1}{2}\int\limits_V \varepsilon_x \cdot \sigma_x \underbrace{dV}_{A\,dx}}^{\text{A rúd belső alakváltozási energiája}} - \overbrace{\int\limits_0^L u\,p\,dx - u_L \cdot F_L}^{\text{A külső terhelések munkája}} + \overbrace{\frac{1}{2} c \cdot u_L^2}^{\text{rugóenergia}}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_0^L A\,E\,(u')^2\,dx - \int\limits_0^L u\,p\,dx - u_L \cdot F_L + \frac{1}{2} c \cdot u_L^2$$

Ennek képezve a variációját kapjuk, hogy

$$\delta\Pi = \int\limits_0^L A\,E\,u'\,\delta u'\,dx - \int\limits_0^L \delta u \cdot p\,dx + c \cdot u_L \cdot \delta u_L - \delta u_L \cdot F_L = 0 \qquad \left(\delta\,(u')^2 = 2u'\delta u'\right)$$

$$\delta\Pi = [A \cdot E \cdot u' \cdot \delta u]_0^L - \int\limits_0^L (A \cdot E \cdot u')'\,\delta u\,dx - \int\limits_0^L \delta u \cdot p\,dx + c \cdot u_L \cdot \delta u - \delta u_L \cdot F_L = 0$$

$$\delta\Pi = -\int\limits_0^L \underbrace{\Big[(A \cdot E \cdot u')' + p\Big]}_{=0\text{: egyensúlyi egy.}} \delta u\,dx + \underbrace{\left[\overbrace{(A \cdot E \cdot u')_L}^{N_L} - (F_L - c \cdot u_L)\right]}_{=0\text{: dinamikai peremfeltétel}} \delta u_L = 0$$

**Példa 1.2** **Közelítő megoldás keresése:**

$$u\,(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

ez kinematikailag lehetséges, ha

- deriválható $u\,(x)$ $\longrightarrow$ teljesül
- a kinematikai peremfeltétel miatt $u\,(0) = 0$ $\longrightarrow$ ha $c_0 = 0$

Tehát ezen feltételeket kielégítő függvény

$$\overset{*}{u}(x) = c_1 x + c_2 x^2$$

$$\overset{*}{\Pi}\left(\overset{*}{u}\right) = \frac{1}{2}\int_0^L A\cdot E\cdot \left(\overset{*}{u}'\right)^2 dx - \int_0^L \overset{*}{u}\cdot p\,dx + \frac{1}{2}c\cdot\left(\overset{*}{u}_L\right)^2 - \overset{*}{u}_L\cdot F_L =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^L A\cdot E\,(c_1+2c_2x)^2\,dx - \int_0^L \left(c_1x+c_2x^2\right)\cdot p\,dx + \frac{1}{2}c\cdot\left(c_1L+c_2L^2\right)^2 - \left(c_1L+c_2L^2\right)\cdot F_L =$$

$$= \frac{1}{2}A\cdot E\left(c_1^2\cdot L + 4c_1c_2\frac{L^2}{2} + 4c_2^2\frac{L^3}{3}\right) - p\cdot\left(c_1\frac{L^2}{2} + c_2\frac{L^3}{3}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}c\left(c_1^2L^2 + 2c_1c_2L^3 + c_2^2L^4\right) - \left(c_1L+c_2L^2\right)\cdot F_L$$

A variációképzéssel:

$$\delta\overset{*}{\Pi} = \frac{\partial\Pi}{\partial c_1}\delta c_1 + \frac{\partial\Pi}{\partial c_2}\delta c_2 = 0 \qquad \Longrightarrow \frac{\partial\Pi}{\partial c_1} = 0, \quad \frac{\partial\Pi}{\partial c_2} = 0$$

azaz kifejtve:

$$\frac{\partial\Pi}{\partial c_1} = AELc_1 + AEL^2c_2 - p\frac{L^2}{2} + cL^2c_1 + cL^3c_2 - LF_L = 0$$

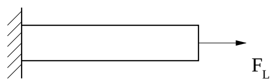
$$\frac{\partial\Pi}{\partial c_2} = AEL^2c_1 + \frac{4}{3}AEL^3c_2 - p\frac{L^3}{3} + cc_1L^3 + cL^4c_2 - L^2F_L = 0$$

ugyanezt mátrixos formában felírva kapjuk:

$$AE\begin{bmatrix} L & L^2 \\ L^2 & \frac{4}{3}L^3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} L^2 & L^3 \\ L^3 & L^4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p\frac{L^2}{2} + LF_L \\ p\frac{L^3}{3} + L^2F_L \end{bmatrix}$$

## Speciális esetek

- *csak* koncentrált erővel terhelt rúd




1.2. ábra. $F_L \neq 0$, $c = 0$, $p = 0$

$$AE\left(Lc_1 + L^2c_2\right) = F_LL \qquad \Big/ : (AEL)$$

$$AE\left(L^2c_1 + \frac{4}{3}L^3c_2\right) = F_LL^2 \qquad \Big/ : \left(AEL^2\right)$$

a kijelölt osztás után

$$c_1 + Lc_2 = \frac{F_L}{AE}$$

$$c_1 + \frac{4}{3}Lc_2 = \frac{F_L}{AE}$$

melyből $\boxed{c_2 = 0}$ míg $\boxed{c_1 = \frac{F_L}{AE}}$.

Ebben az esetben a lehetséges elmozdulás a következő alakban adódik

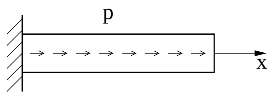
$$\boxed{\overset{*}{u} = \frac{F_L}{AE}x}$$

melyből látható, hogy a $\Pi$ min. elv érvényben van!

$$\overset{*}{N} = AE\overset{*}{u}' = F_L \qquad \text{dinamikai peremfeltétel}$$

$$\frac{dN}{dx} = 0 \rightarrow N = \text{ áll.} \quad N_L = F_L \qquad \text{egyensúlyi egyenlet}$$

- *csak* megoszló terheléssel terhelt rúd




1.3. ábra. $F_L = 0$, $c = 0$, $p \neq 0$

$$
\begin{aligned}
AE \quad Lc_1 + L^2 c_2 &= \frac{pL^2}{2} && \Big/ : (AEL) \\
AE \quad L^2 c_1 + \frac{4}{3} L^3 c_2 &= \frac{pL^3}{3} && \Big/ : \quad AEL^2
\end{aligned}
$$

a kijelölt osztás után

$$
\begin{aligned}
c_1 + Lc_2 &= \frac{pL}{2AE} \\
c_1 + \frac{4}{3} Lc_2 &= \frac{pL}{3AE}
\end{aligned}
$$

melyből $\boxed{c_2 = -\frac{p}{2AE}}$, illetve $\boxed{c_1 = \frac{pL}{AE}}$.
Ebben az esetben a lehetséges elmozdulás a következő alakban adódik

$$\boxed{\overset{*}{u} = \frac{pL}{AE} x - \frac{p}{2AE} x^2}$$

A kapott megoldás egzakt, mivel az egyensúlyi egyenletet, illetve a dinamikai peremfeltételt kielégíti.

$$\overset{*}{N} = AE\overset{*}{u}' = pL - px = p\,(L - x)$$

- ha koncentrált és megoszló terhelés is működik a testen, akkor az előző két eset szuperpozíciójáról van szó.
  Tehát $p =$ áll., $F_L \neq 0$, de $c = 0$. Ekkor a szuperpozíció alapján a következő eredmény adódik:

$$\boxed{c_1 = \frac{1}{AE}\,(F_L + pL)}, \qquad \boxed{c_2 = -\frac{p}{2AE}}$$

  melyből a lehetséges elmozdulás

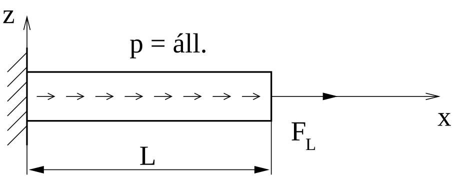
$$\boxed{\overset{*}{u} = \frac{1}{AE}\,(F_L + pL)\,x - \frac{p}{2AE} x^2}$$

# 2. GYAKORLAT

# Közelítő módszerek II.

## 2.1. Projektív módszer (gyenge alakú megoldás)

**Húzott-nyomott rúd esete**




2.1. ábra. Húzott-nyomott rúd

Differenciál-egyenlet

$$\frac{d}{dx}\left(AEu'\right) + p = 0$$

Peremfeltételek:

$$u(0) = 0 \qquad \text{– kinematikai (vagy lényeges) peremfeltétel}$$

$$N_L = AEu'\Big|_L = F_L \qquad \text{– dinamikai (vagy természetes) peremfeltétel}$$

a.) Súlyozott maradékok módszere $\overset{*}{u}$ – közelítő mező

$$\frac{d}{dx}\left(AE\overset{*}{u}'\right) + p = 0$$

$$\int_0^L w_i \left[\frac{d}{dx}\left(AE\overset{*}{u}'\right) + p\right] dx - w_{iL}\left[AE\overset{*}{u}'\Big|_L - F_L\right] = 0$$

ahol $w_i = w_i(x)$ teszt (ellenőrző) függvény.

$$\overset{*}{u}(x) = \overset{*}{u}_0 + \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i(x)\,; \qquad \varphi_i(x=0) = 0 \qquad \text{próbafüggvények.}$$

A próbafüggvények lineárisan függetlenek.

b.) Bubnov-Galerkin módszer

$$w_i(x) = \varphi_i(x)$$

**Példa 2.1** Tekintsük a következő statikailag lehetséges közelítő függvényt a fenti probléma megoldásához:

$$\overset{*}{u} = c_1 x$$

azaz ebben az esetben

$$\varphi_1 = w_1 = x$$

Mely alapján felírható

$$\int_0^L x \left[ \underbrace{\frac{d}{dx}\left(AEc_1\right)}_{=0} + p \right] dx - L \left[ AEc_1 \Big|_L - F_L \right] = 0$$

$$p\frac{L^2}{2} - L\left(AEc_1 - F_L\right) = 0$$

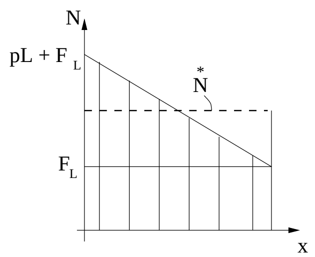
$$AELc_1 = p\frac{L^2}{2} + LF_L$$

$$\boxed{c_1 = \frac{pL}{2AE} + \frac{F_L}{AE}}$$

Az így kapott eredmény

$$\boxed{\overset{*}{u} = \quad \frac{pL}{2AE} + \frac{F_L}{AE} \quad x} \rightarrow \overset{*}{N} = AE\overset{*}{u}' = \frac{pL}{2} + F_L$$

mely azt jelenti, hogy a differenciál egyenlet pontonként nem teljesül, de közelíti a tényleges megoldást.




2.2. ábra. A rúderő eloszlása az $x$ tengely mentén

**Példa 2.2** Vegyünk egy másodfokú statikailag lehetséges közelítő függvényt az előző probléma megoldásához

$$\overset{*}{u} = c_1x + c_2x^2 \quad \varphi_1 = w_1 = x \quad \varphi_2 = w_2 = x^2$$

Ekkor két egyenlet írható fel

$$\varphi_1 = x \qquad \int_0^L x \quad \frac{d}{dx}AE\left(c_1 + 2c_2x\right) + p \quad dx - L\left[AE\left(c_1 + 2c_2L\right) - F_L\right] = 0$$

$$\varphi_2 = x^2 \qquad \int_0^L x^2 \quad \frac{d}{dx}\left(c_1 + 2c_2x\right) + p \quad dx - L^2\left[AE\left(c_1 + 2c_2L\right) - F_L\right] = 0$$

melyből a két ismeretlen paraméter meghatározható

$$AEc_2L^2 + p\frac{L^2}{2} - LAE\left(c_1 + 2c_2L\right) + F_LL = 0AE\frac{2}{3}c_2L^3 + p\frac{L^3}{3} - L^2AE\left[c_1 + 2c_2L\right] + L^2F_L \quad = 0$$

$$\boxed{c_1 = \frac{F_L + pL}{AE}} \quad \boxed{c_2 = -\frac{p}{2AE}}$$

Tehát a kapott elmozdulás mező

$$\boxed{\overset{*}{u} = \frac{F_L + pL}{AE}x - \frac{p}{2AE}x^2} \rightarrow \overset{*}{N} = AE\overset{*}{u} = F_L + pL - px = F_L + p\left(L - x\right)$$

mely az egzakt megoldást jelenti minden pontban.

## 2.2. Levezetés

Mutassa meg, hogy egy kinematikailag lehetséges elmozdulásmezőhöz tartozó potenciális energia mindig nagyobb vagy egyenlő mint az egzakt mezőhöz tartozó! azaz:

$$\Pi\left(\overrightarrow{u}+\delta\overrightarrow{u}\right)\geq\Pi\left(\overrightarrow{u}\right)$$

$$\Pi\left(\overrightarrow{u}+\delta\overrightarrow{u}\right)=\frac{1}{2}\int_{V}\left(\underline{\underline{A}}+\delta\underline{\underline{A}}\right)\cdot\cdot\,\underline{\underline{D}}\cdot\cdot\left(\underline{\underline{A}}+\delta\underline{\underline{A}}\right)dV-\int_{V}\left(\overrightarrow{u}+\delta\overrightarrow{u}\right)\cdot\rho\cdot\overrightarrow{k}\,dV-\int_{A_p}\left(\overrightarrow{u}+\delta\overrightarrow{u}\right)\cdot\overrightarrow{p}\,dA=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{2}\int_{V}\underline{\underline{A}}\cdot\cdot\overbrace{\underline{\underline{D}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}}^{\underline{\underline{T}}}dV-\int_{V}\overrightarrow{u}\cdot\rho\cdot\overrightarrow{k}\,dV-\int_{A_p}\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{p}\,dA+}_{\Pi\left(\overrightarrow{u}\right)\text{: egzakt értékhez tartozó}}$$

$$+\underbrace{\int_{V}\delta\underline{\underline{A}}\cdot\cdot\overbrace{\underline{\underline{D}}\cdot\cdot\underline{\underline{A}}}^{\underline{\underline{T}}}dV-\int_{V}\delta\overrightarrow{u}\cdot\rho\cdot\overrightarrow{k}\,dV-\int_{A_p}\delta\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{p}\,dA+}_{\delta\Pi\text{: a potenciális energia variációja}}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\int_{V}\delta\underline{\underline{A}}\cdot\cdot\overbrace{\underline{\underline{D}}\cdot\cdot\delta\underline{\underline{A}}}^{\delta\underline{\underline{T}}}dV}_{\delta^2\Pi=U\left(\delta\underline{\underline{A}}\right)\text{, ez való energia }\geq 0\text{, 0 ha az egzakt megoldásnál vagyunk}}$$

$$\Pi\left(\overrightarrow{u}+\delta\overrightarrow{u}\right)=\Pi\left(\overrightarrow{u}\right)+\overbrace{\delta\Pi}^{=0}+\delta^2\Pi$$

Stacionaritási feltétel: $\delta\Pi=0$ a virtuális munka elve szerint
tehát

$$\Pi\left(\overrightarrow{u}+\delta\overrightarrow{u}\right)\geq\Pi\left(\overrightarrow{u}\right)$$

# 3. GYAKORLAT

# ISMERKEDÉS AZ I-DEAS PROGRAMRENDSZERREL

## 3.1. Áttekintés

Az I-DEAS olyan általános célú programrendszer, melyet a tervezési folyamat különböző fázisainak megkönnyítésére alkalmazhatunk. Minden egyes gépészeti folyamat más-más alrendszer betöltését és használatát igényli. A program például a következő alkalmazásokat nyújtja:

- **Design:** Modeller, Assembly, Drafting Setup
- **Simulation:** Boundary Conditions, Meshing, Model Solution
- **Test:** Time History, Histogram, Model Preparation, Signal Processing, Modal
- **Manufacturing:** Modeler, Generative Machining, Assembly Setup, GNC Setup

**Főbb jellemzők**

- *A parametrikus modellezés.* A tervezés során először egy vázlatot kell készíteni, mely nagy vonalakban hasonlít majd az elkészítendő darabhoz, és a méreteket ezután kell pontosan beállítani az igényeknek megfelelően. De természetesen a geometriai elemek pontos koordináták segítségével is megrajzolhatóak.
- *Tulajdonság alapú modellezés.* A bázis alak létrehozása után egyszerűen lehet definiálni kivágást, furatot, beszúrást, stb.
- *Párhuzamos alkatrész fejlesztés.* Az alkatrészek közös könyvtárakban helyezhetőek el, melyek a megfelelő tervezők által elérhetők, módosíthatók.

## 3.2. A program elindítása

A program elindítható parancssorból, menüből vagy ikon segítségével. Előfordulhat az is hogy speciális jogok beállítsa is szükséges a szoftver megfelelő használatához. A gördülékeny használathoz elengedhetetlen a minnél jobb grafikai hardver megléte is, mely OpenGL támogatással rendelkezik.

A program indítása után egy dialógus ablak a következő információkat igényli:

1. *Projekt neve:* mely az adott munkát rendszerezi. Ezt ki is lehet választani a felkínált listából. Vagy behívható egy kiválasztó ablak, az ikon kiválasztásával.
2. *Model file:* a munka során létrehozott objektumhoz tartozó adatk itt tárolódnak el. Ezt segíti egy előhívható lista, mely a file megnyitásához, mentéséhez hasonló ablakot jelent, a megfelelő ikon kiválasztásával aktivizálható.
3. A használni kívánt *alkalmazás kiválasztása*: alapértelmezésként felkínálja a program az utoljára használtat, illetve a `Design` csomagot. Ez alatt található az adott alkalmazáson belüli feladat kiválasztására szolgáló legördülő listaablak.

Ha az I-DEAS-t parancssorból indítottuk el, akkor lehetőség van megadni opciókat is.

- `-h` az indításhoz használható opciók.
- `-d device` a grafikus drivert lehet vele megadni induláskor. Ha nem adjuk meg egy listát kínál fel amiből lehet választani.
- `-g` a legutóbb végzett munka folytatását teszi lehetővé.
- `-l language` a használni kívánt nyelvet lehet megadni. Ha nem adjuk meg a nyelvet akkor az elérhető nyelvek listáját kapjuk.

## 3.3. Használathoz szükséges alapok

### Ablakok

- Rajzterület – itt készül minden...
- Ikon (A, B, C mátrix) – érdemes egy kicsit kisebbre venni
- Lista – üzenetek, hibák jelzésére; ha nem használjuk sokszor el lehet rejteni, de hasznos dolog
- Prompt – ide mindig nézni LÉNYEGES

### Egér

A program használatához a három gombos egér használata az ideális, ahogy ezt egy korszerű tervező szoftvertől elvárható. Minden gombnak saját funkciója van.

- **Bal gomb** parancskiválasztás, geometriai alakzatok kiválasztása a grafikus ablakban. A `Shift` gombbal együtt használva csoportos kijelölést tesz lehetővé. (ez pl. törlésnél, méretezésnél hasznos)
- **Középső gomb** ez az `Enter` vagy a `Return` billenytyűt helyettesíti. A parancs lezárására szolgál.
- **Jobb gomb** `Popup` menüt jelenít meg, ha a rajzterületen használjuk, feladattól függően más és más parancsok aktivizálást gyorsítja.

### Funkció billentyűkről

Számtalan billentyűkombináció előre definiált az I-DEAS-ban, melyek felsorolása túl nagy feladat. Most elsősorban az `F1 - F12` billenytűkre gondolunk. Ezek szerepe természetesen átdefiniálható (`ideas.ini`) de alapértelmezésben a következő feladokat gyorsítják

- `F1 - F5`: eltolás, nagyítás, forgatás, kívánt nézet, reset
- `F6`: az előző 5 funkcióbillentyű szerepét határozza meg a feladatbank kiválasztással
- `F7`: Zoom All (AU – `Ctrl-A`, ZM – ablakkal nagyít)
- `F8`: Reconsider
- `F9`: Deselect All
- `F10`:
- `F11`: ”Filter”
- `F12`: Redisplay (`Ctrl-R`)

**Menü:** elérése `Ctrl-M` kombinációval kapcsolható ki/be
**Kilépés:** `exit` – paranccsal, vagy menüből kiválasztva, vagy `Ctrl-e` kombinációval.

## 3.4. Rajzolást megkönnyítő néhány funkció

### Dynamic Navigator

| | |
|---|---|
| érintő | végpont |
| középpont | metszéspont |
| párhuzamos | függőleges |
| vízszintes | egybeesés |

`Align, Focus, Grid, Snap` (`Workplace Apperiace`)

### Select menü elemei

alaphelyzetben a jobb egérgomb rajzterületen történő lenyomásával aktiválhatjuk ezt a popup menüt:

- `Visible`
- `Label` Egy-egy konkrét elem kijelölésére szolgál (pl. C – curve, E – edge, F – face, P – wireframe points, stb.)
- `Filter...` egy dialógus ablak segítségével szükíthetjük a kiválaszható objektumok típusát
- `Area Options...` kijelölési terület jellemzőit állíthatjuk itt be, (`Auto Shift`)
- `Reconsider` – `F8`
- `Deselect All` – `F9`
- `Related To`

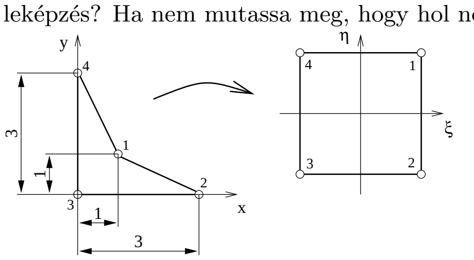
# 4. GYAKORLAT

# Szingularitás vizsgálat – I-DEAS használata síkfeladatok megoldására

## 4.1. 4 csomópontú izoparametrikus elem vizsgálata

**Példa 4.1** Adott az elem az $x-y$ síkon, állítsa elő a megadott alakfüggvények segítségével az elem leképzését a $\xi-\eta$ koordinátarendszerbe!
Döntse el, hogy kölcsönösen egyértelmű-e ez a leképzés? Ha nem mutassa meg, hogy hol nem az!

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)$$
$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)$$
$$N_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)$$




4.1. ábra. 4 csomópontú elem az $x-y$ és a $\xi-\eta$ KR-ben

**Megoldás:**

A koordináták leképzése:

$$x = \sum_{i=1}^{4} N_i x_i = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\cdot 1 + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\cdot 3 + 0 + 0 = (1+\xi)\quad 1-\frac{\eta}{2}$$

$$y = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\cdot 1 + 0 + 0\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\cdot 3 = (1+\eta)\quad 1-\frac{\xi}{2}$$

A leképzés megfordíthatóság vizsgálatához számítsuk ki a $\underline{\underline{J}}$ mátrixot.

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\frac{\eta}{2} & -\frac{1}{2}(1+\eta) \\ -\frac{1}{2}(1+\xi) & 1-\frac{\xi}{2} \end{bmatrix}$$

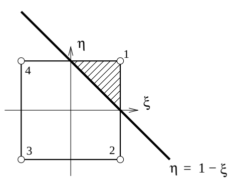
melyből

$$\det\underline{\underline{J}} = 1 - \frac{\xi}{2} - \frac{\eta}{2} + \frac{\xi\eta}{4} - \frac{1}{4}(1+\xi+\eta+\xi\eta) = \frac{3}{4}(1-\xi-\eta)$$

Kérdés, hogy hol teljesül a

$$\det\underline{\underline{J}} \le 0 \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\eta = 1-\xi}$$

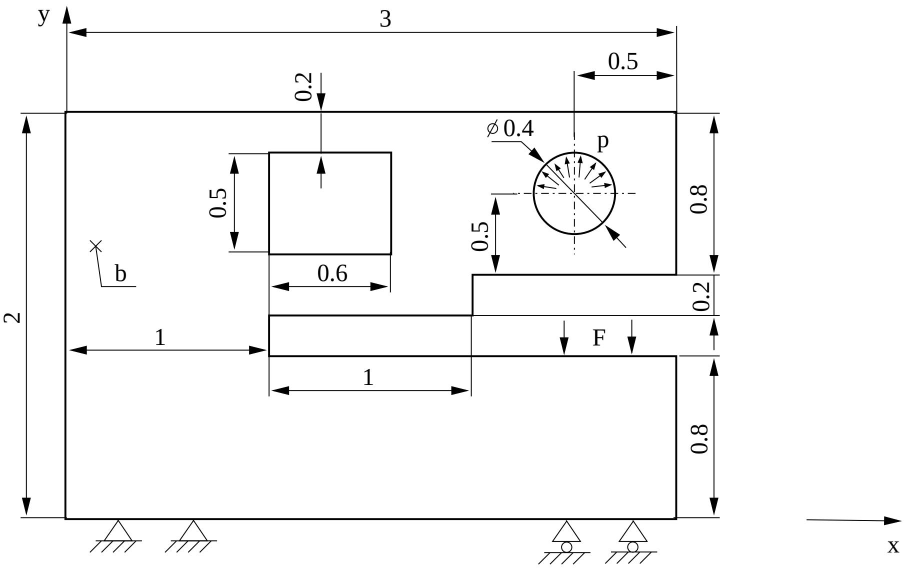
összefüggés, mert ott nem kölcsönösen egyértelmű az elem leképzése!




4.2. ábra. Elfajuló a leképzés a saffozott területen

## 4.2. I-DEAS használata síkfeladat megoldására

Adott a következő ”C” -állvány feladat:




4.3. ábra. ”C” állvány

Az állvány anyaga általános acél.

$$b = 0.05\,m \qquad p = 400 \cdot 10^6\,Pa \qquad F = 1 \cdot 10^3\,N$$

Határozzuk meg a fenti ábrán jelzett peremfeltételek mellett a ”C” állvány veszélyes helyét (helyeit), továbbá azon helyeken a maximális feszültségek értékét!

A feladat végrehajtásához használandó főbb funkciók, parancsok:

**Simulation → Master Modeller**
`Options` → `Units` mm[Newton]
`Polylines` $A(2,1)$ kontúrok rajzolása
`Delete` $B(4,1)$ nem kívánt rajzelemek, méretek törlése
`Dimension` $A(4,1)$ méretezés
`Modify Entity` $B(2,1)$ méretek megváltoztatása (`All`)
– Mentés `Ctrl-S`
`Surface by Boundary` $A(5,1)$ felület definiálás
`Sketch in Plane` $A(1,1)$ rajzfelület kiválasztás
`Polylines` $A(2,1)$ `Points` $A(2,1)$ a kör közép kijelölése
`Circle Center Edge` $A(3,1)$ kör rajzolás
`Trim at Curve` $A(4,3)$ kivágások a felületről
`Name Parts...` $B(4,2)$ alkatrész elnevezés
– Mentés `Ctrl-S`

**Simulation → Meshing**
`Create FE Model...` $B(4,2)$ VEM modell definiálás
`Physical Property` $A(5,2)$ lemezvastagság megadás
`Materials` $B(5,1)$ anyagjellemzők beállítása
`Define Shell Mesh` $A(1,1)$ háló generálás
– Mentés `Ctrl-S`

**Simulation → Boundary Conditions**
`Displacement Restraint` $A(4,2)$ KPF előírása
`Force` $A(2,1)$ DPF előírása
`Force from Point` $A(2,1)$ körön megoszló terheléshez

**Simulation → Model Solution**
`Solution Set` $A(1,2)$ megoldások tárolására
`Solve` $A(2,1)$ megoldás
`Visualizer` $A(6,2)$

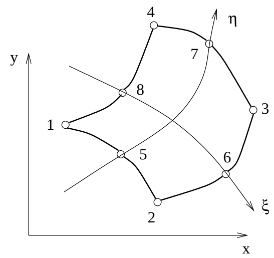
# 5. gyakorlat

# Numerikus integrálás - I-DEAS használata

## 5.1. 8 csomópontú elemek

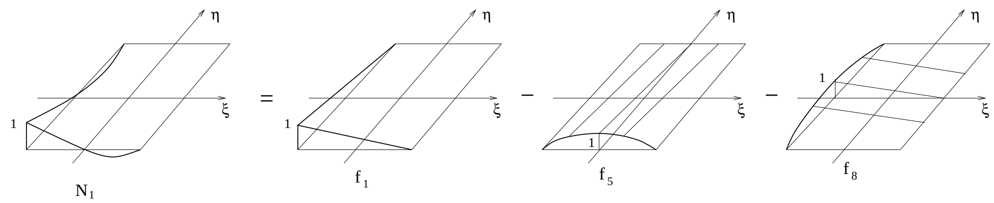
$$x(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)\,x_i$$

$$y(\xi,\eta)=\sum_{i=1}^{8}N_i(\xi,\eta)\,y_i$$




5.1. ábra. 8 csomópontú izoparametrikus elem

$$f_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\qquad f_5=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)\qquad f_8=\frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1-\xi)$$




5.2. ábra. A 8 csomópontú izoparametrikus elemhez tartozó alakfüggvények előállítása

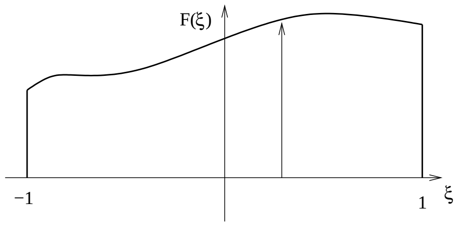
$$N_1(\xi,\eta)=f_1-\frac{1}{2}f_5-\frac{1}{2}f_8=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)-\frac{1}{4}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)-\frac{1}{4}\left(1-\eta^2\right)(1-\xi)=$$
$$=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-1-\xi-1-\eta)$$

**Alakfüggvények:**

$$N_1(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(-\xi-\eta-1)\qquad N_5(\xi,\eta)=f_5=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1-\eta)$$
$$N_2(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1)\qquad N_6(\xi,\eta)=f_6=\frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1+\xi)$$
$$N_3(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1)\qquad N_7(\xi,\eta)=f_7=\frac{1}{2}\left(1-\xi^2\right)(1+\xi)$$
$$N_4(\xi,\eta)=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(-\xi+\eta-1)\qquad N_8(\xi,\eta)=f_8=\frac{1}{2}\left(1-\eta^2\right)(1-\xi)$$

## 5.2. Numerikus integrálás

Itt a *Gauss-kvadratúra* alapján végezzük el.




5.3. ábra. $F(\xi)$ függvény képe

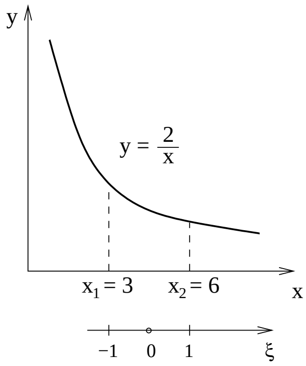
$$\int_{-1}^{1} F(\xi)\, d\xi \approxeq \sum_{i=1}^{NG} w_i F(\xi_i)$$

| $\pm\xi_i$ | $NG$ | $w_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 |
| 0,577 | 2 | 1 |
| 0,774 | | 0,555 |
| 0 | 3 | 0,888 |

A numerikus integrálás hasonlóan elvégezhető két, vagy három változóra is – gondolva itt a 2D-s, illetve a 3D-s izoparametrikus elemekre.

**Példa 5.1** Tekintsük a következő függvény, és határozzuk meg analitikusan és numerikusan is a következő integrált:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} \frac{2}{x}\, dx$$




5.4. ábra. $y = \frac{2}{x}$ függvény képe

Analitikusan meghatározva a 5.4 ábrán megadott integrál értéke:

$$I = \int_{3}^{6} \frac{2}{x}\, dx = 2(\ln 6 - \ln 3) = 1.38629$$

Numerikusan

- transzformáljuk a függvény független $x$ változóját a $\xi$ koordinátarendszerbe:

$$x(\xi) = \sum_{i=1}^{2} N_i(\xi)\, x_i$$

ahol

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi), \quad N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

Tehát

$$x(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi)\, x_1 + \frac{1}{2}(1+\xi)\, x_2 = \frac{1}{2}(1-\xi)\, 3 + \frac{1}{2}(1+\xi)\, 6 = \frac{3}{2}(3+\xi)$$

Továbbá

$$dx = \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi = \quad -\frac{3}{2} + \frac{6}{2} \quad d\xi = \frac{3}{2} d\xi$$

Ekkor az $I$ integrálra – a 3 pontos Gauss kvadratúrát alkalmazva – a következőt kapjuk:

$$I = \int_{3}^{6} \frac{2}{x}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{2}{x(\xi)} \frac{3}{2}\, d\xi = \int_{-1}^{1} \frac{3}{x(\xi)}\, d\xi \approxeq \sum_{i=1}^{3} w_i \frac{3}{x(\xi)} = \bigstar$$

$$x(\xi_1) = \frac{3}{2}(3 + 0.77459) = 5.661885$$

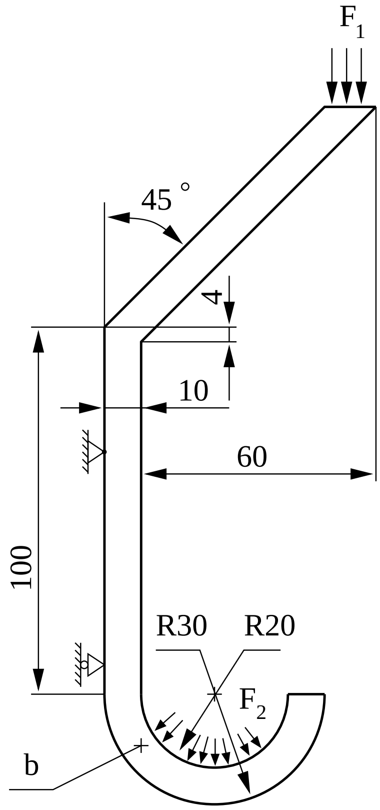
$$x(\xi_2) = \frac{3}{2}(3 + 0) = \frac{9}{2} = 4.5$$

$$x(\xi_3) = \frac{3}{2}(3 - 0.77459) = 3.338115$$

$$\bigstar = 0.\dot{5}\frac{3}{5.661885} + 0.\dot{8}\frac{3}{4.5} + 0.\dot{5}\frac{3}{3.338115} = 1.386242$$

## 5.3. I-DEAS használata síkfeladat megoldására

Adott a következő fogasszerű síkfeladat.




5.5. ábra.

Az alkatrész anyaga általános acél.

$$b = 2\,mm \qquad F_1 = 100\,N \qquad F_2 = 500\,N$$

Határozzuk meg a fenti ábrán jelzett peremfeltételek mellett a fogas veszélyes helyét (helyeit), továbbá azon helyeken a maximális feszültségek értékét!

A feladat végrehajtásához használandó főbb funkciók, parancsok:

**Simulation → Master Modeller**
`Options` → `Units` mm[Newton]
`Workplane Appearance` $B(2,3)$ `Grid, Snap`
`Lines` $A(2,1)$ kontúrok rajzolása
`Dimension` $A(4,1)$ méretezés
`Modify Entity` $B(2,1)$ méretek megváltoztatása
– Mentés `Ctrl-S`
`Circle Center Edge` $A(3,1)$ kör rajzolás
`Lines` $A(2,1)$ `Points` $A(2,1)$ a kör közép
`Surface by Boundary` $A(5,1)$ felület definiálás
`Trim / Extend` $A(4,2)$ rajzelemek módosítása
`Name Parts...` $B(4,2)$ alkatrész elnevezés
– Mentés `Ctrl-S`

**Simulation → Meshing**
`Create FE Model...` $B(4,2)$ VEM modell definiálás
`Physical Property` $A(5,2)$ lemezvastagság megadás
`Materials` $B(5,1)$ anyagjellemzők beállítása
`Define Shell Mesh` $A(1,1)$ háló generálás
– Mentés `Ctrl-S`

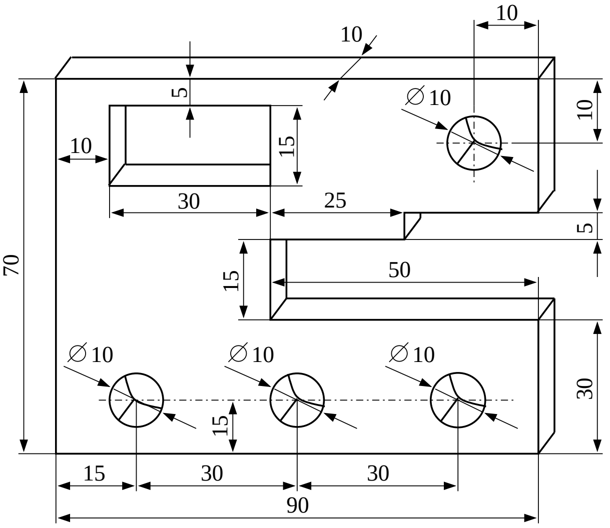
**Simulation → Boundary Conditions**
`Displacement Restraint` $A(4,2)$ KPF előírása
`Force` $A(2,1)$ DPF előírása
`Force from Point` $A(2,1)$ körön megoszló terheléshez

**Simulation → Model Solution**
`Solution Set` $A(1,2)$ megoldások tárolására
`Solve` $A(2,1)$ megoldás
`Visualizer` $A(6,2)$

# 6. GYAKORLAT

# I-DEAS HASZNÁLATA RUGALMASSÁGTANI TÉRBELI FELADATRA

Adott a következő ”C” -állvány feladat:




6.1. ábra. ”C” állvány

Az állvány anyaga bronz, a következő anyagjellemzőkkel:

Modulus of Elasticity: $E = 110\,GPa$ Poissons ratio: $\nu = 0.37$ Mass Density: $\rho = 8700\,\frac{kg}{m^3}$

A ”C” állvány az alsó furatok segítségével van rögzítve. A felfelé mutató terhelés pedig a felső furatban működik, melynek nagysága

$$F = 2\,kN$$

Határozzuk meg a fenti ábrán jelzett peremfeltételek mellett a ”C” állvány veszélyes helyét (helyeit), továbbá azon helyeken a maximális feszültségek értékét!

A feladat végrehajtásához használandó főbb funkciók, parancsok:

**Simulation → Master Modeller**
`Options` → `Units` mm[Newton]
`Polylines` $A(2,1)$ kontúrok rajzolása
`Delete` $B(4,1)$ nem kívánt rajzelemek törlése
`Dimension` $A(4,1)$ méretezés
`Modify Entity` $B(2,1)$ méretek megváltoztatása
– Mentés `Ctrl-S`
`Extrude` $A(5,1)$ térbeli obj. definiálása
`Sketch in Place` $A(1,1)$ rajzfelület kiválasztás
`Polylines` $A(2,1)$ vonal rajzolása
`Circle Center Edge` $A(3,1)$ kör (`Options`)
`Extrude` $A(4,3)$ kivágások a testből (`Cut`)
`Name Parts...` $B(4,2)$ alkatrész elnevezés
– Mentés `Ctrl-S`

**Simulation → Meshing**
`Create FE Model...` $B(4,2)$ VEM modell definiálás
`Materials` $B(5,1)$ anyagjellemzők beállítása
`Solid Mesh` $A(1,1)$ háló generálás
– Mentés `Ctrl-S`

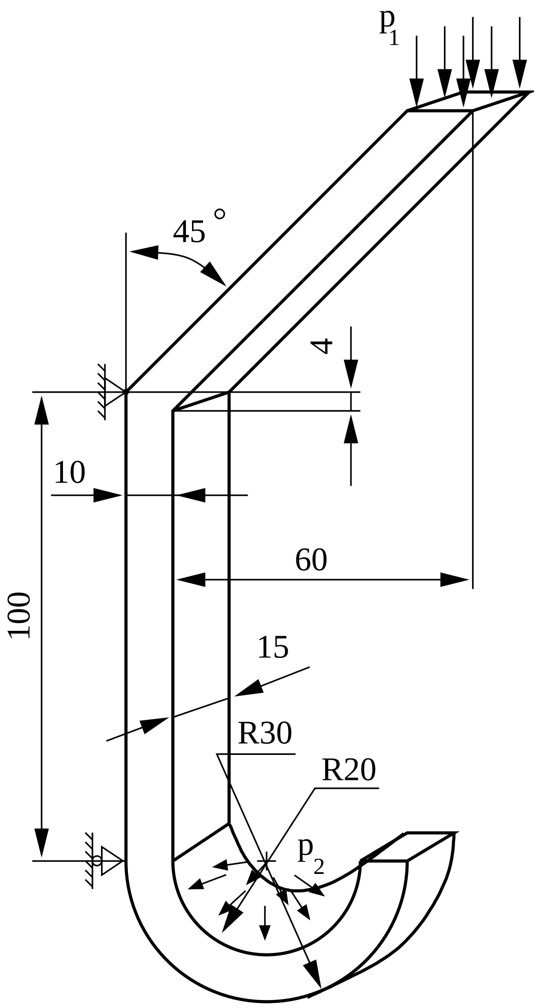
**Simulation → Boundary Conditions**
`Displacement Restraint` $A(4,2)$ KPF előírása
`Force` $A(2,1)$ DPF előírása
– Mentés `Ctrl-S`

**Simulation → Model Solution**
`Solution Set` $A(1,2)$ megoldások tárolására
`Solve` $A(2,1)$ megoldás
`New Visualizer` $A(6,2)$

# 7. GYAKORLAT

# I-DEAS HASZNÁLATA RUGALMASSÁGTANI TÉRBELI FELADATRA

Adott a következő térbeli feladat:




7.1. ábra. Fogas

A fogas anyaga réz, a következő anyagjellemzőkkel:

Modulus of Elasticity: $E = 115\,GPa$ Poissons ratio: $\nu = 0.36$ Mass Density: $\rho = 8900\,\frac{kg}{m^3}$

A fogas az oldalán van rögzítve, a jelzett módon. A lefelé mutató terhelés pedig a felső ágon, illetve az íves alsó részen működik, melynek nagysága

$$p_1 = 2\,MPa \qquad p_2 = 4\,MPa$$

Határozzuk meg a fenti ábrán jelzett peremfeltételek mellett a fogas veszélyes helyét (helyeit), továbbá azon helyeken a maximális feszültségek értékét!

A feladat végrehajtásához használandó főbb funkciók, parancsok:

**Simulation → Master Modeller**
`Options` → `Units` mm[Newton]
`Polylines` $A(2,1)$ kontúrok rajzolása
`Delete` $B(4,1)$ nem kívánt rajzelemek törlése
`Dimension` $A(4,1)$ méretezés
`Modify Entity` $B(2,1)$ méretek megváltoztatása
`Circle Center Edge` $A(3,1)$ kör (`Options`)
`Lines` $A(2,1)$ `Points` $A(2,1)$ a kör közép
`Trim / Extend` $A(4,2)$ rajzelemek módosítása
`Extrude` $A(5,1)$ térbeli obj. definiálása
`Name Parts...` $B(4,2)$ alkatrész elnevezés
– Mentés `Ctrl-S`

**Simulation → Meshing**
`Create FE Model...` $B(4,2)$ VEM modell definiálás
`Materials` $B(5,1)$ anyagjellemzők beállítása
`Solid Mesh` $A(1,1)$ háló generálás
– Mentés `Ctrl-S`

**Simulation → Boundary Conditions**
`Force` $A(2,1)$ DPF előírása
`Displacement Restraint` $A(4,2)$ KPF előírása
– Mentés `Ctrl-S`

**Simulation → Model Solution**
`Solution Set` $A(1,2)$ megoldások tárolására
`Solve` $A(2,1)$ megoldás
`New Visualizer` $A(6,2)$

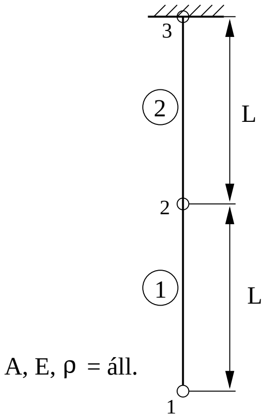
# 8. GYAKORLAT

# DINAMIKAI FELADATOK VÉGESELEMES TÁRGYALÁSÁHOZ

## 8.1. Határozzuk meg a rúdelem merevségi és tömegmátrixát

Adatok:

$$A = 10^{-2}\,m^2 \qquad L = 1\,m \qquad E = 1 \cdot 10^2\,\frac{N}{m^2} \qquad \rho = 600\,\frac{kg}{m^3}$$




8.1. ábra. Két elemből álló rúdmodell

Elmozdulásmező:

$$\underline{u}^e(\xi) = \begin{bmatrix} 1-\frac{\xi}{L} & \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}^e = \underline{\underline{N}}^e \cdot \underline{q}^e$$

Gyorsulásmező:

$$\ddot{\underline{u}}^e(\xi) = \underline{\underline{N}}^e \cdot \ddot{\underline{q}}^e$$

Alakváltozásmező:

$$\underline{\varepsilon}^e = \frac{d\underline{u}^e}{d\xi} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}^e = \underline{\underline{B}}^e \cdot \underline{q}^e$$

Feszültségmező:

$$\underline{\sigma}^e = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\varepsilon}^e = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{B}}^e \cdot \underline{q}^e$$

Virtuális munka elve alapján:

$$\int\limits_{V^e} \delta\underline{\varepsilon}^{eT} \cdot \underline{\sigma}^e\,dV - \int\limits_{V^e} \delta\underline{u}^{eT} \cdot \rho \cdot \ddot{\underline{u}}^e\,dV - \int\limits_{V^e} \delta\underline{u}^{eT} \cdot \rho \cdot \underline{k}\,dV - \int\limits_{A^e} \delta\underline{u}^{eT} \cdot \underline{p}\,dA = 0$$

melyből az első integrált kiírva kapjuk[1], hogy

$$\int\limits_{V^e} \delta\underline{\varepsilon}^{eT} \cdot \underline{\sigma}^e\,dV = \delta\underline{q}^{eT} \cdot \int\limits_{V} \underline{\underline{B}}^{eT} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{B}}^e\,dV \cdot \underline{q}^e = \begin{bmatrix} \delta u_i & \delta u_j \end{bmatrix}^e \underbrace{\frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^e}_{\underline{\underline{K}}^e} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix}^e$$

melyben $\underline{\underline{K}}^e$ az $^e$ elemhez tartozó merevségi mátrix.

[1]

$$\int\limits_{V^e} \underline{\underline{B}}^{eT} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{B}}^e \underbrace{dV}_{A\,d\xi} = \int\limits_0^L AE \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{matrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{matrix}\, d\xi = \frac{AE}{L^2} \int\limits_0^L \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}\, d\xi = \frac{AE}{L} \begin{matrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$$

A második integrál kifejtésekor jutunk a következő összefüggéshez[2]:

$$\int\limits_{V^e} \delta \underline{u}^{eT} \cdot \rho \cdot \underline{\ddot{u}}^e \, dV = \delta \underline{q}^{eT} \cdot \int\limits_{V^e} \underline{\underline{N}}^{eT} \cdot \rho \cdot \underline{\underline{N}}^e \underbrace{dV}_{A\,d\xi} \cdot \underline{\ddot{q}}^e = \begin{bmatrix} \delta u_i & \delta u_j \end{bmatrix}^e \underbrace{\frac{\rho A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^e}_{\underline{\underline{M}}^e} \begin{bmatrix} \ddot{u}_i \\ \ddot{u}_j \end{bmatrix}^e$$

ahol $\underline{\underline{M}}^e$ az $^e$ elemhez tartozó tömegmátrix.

A megadott adatok alapján:

$$\underline{\underline{K}}^e = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{10^{-2} \cdot 10^2}{1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \left[\frac{N}{m}\right]$$

$$\underline{\underline{M}}^e = \frac{\rho A L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{10^{-2} \cdot 6 \cdot 10^2 \cdot 1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} [kg]$$

## Sajátfrekvenciák, sajátvektorok meghatározása

**Az egyenletrendszer illesztés után:**

$$\underline{\underline{M}} \cdot \underline{\ddot{q}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2+2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A kinematikai peremfeltétel (KPF) értelmében $u_3 = \ddot{u}_3 = 0$, mely alapján az előbbi egyenletben a harmadik sorok és oszlopok törölhetőek.

Mivel

$$\underline{q} = \underline{q}_0 \cdot \cos \alpha t$$
$$\underline{\dot{q}} = -\alpha \underline{q}_0 \sin \alpha t$$
$$\underline{\ddot{q}} = -\alpha^2 \underline{q}_0 \cos \alpha t = -\alpha^2 \underline{q}$$

így felírhatjuk, hogy

$$\left(\underline{\underline{K}} - \alpha^2 \underline{\underline{M}}\right) \cdot \underline{q}_0 \cos \alpha t = \underline{0} \qquad \Rightarrow \qquad \det\left(\underline{\underline{K}} - \alpha^2 \underline{\underline{M}}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} (1-2\alpha^2) & (-1-\alpha^2) \\ (-1-\alpha^2) & (2-4\alpha^2) \end{vmatrix} = 2 - 4\alpha^2 - 4\alpha^2 + 8\alpha^4 - \left[1 + \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^4\right] = 1 - 10\alpha^2 + 7\alpha^4 = 0$$

A két meghatározható sajátfrekvencia:

$$\alpha_{1,2}^2 = \frac{10 \pm \sqrt{100-28}}{14} = \frac{10 \pm 8.485}{14} \rightarrow \begin{cases} \alpha_1^2 = 0.108\,\frac{rad}{s^2} & \rightarrow \alpha_1 = 0.329\,\frac{rad}{s} \\ \alpha_2^2 = 1.32\,\frac{rad}{s^2} & \rightarrow \alpha_2 = 1.149\,\frac{rad}{s} \end{cases}$$

---

2

$$\int\limits_{V^e} \underline{\underline{N}}^{eT} \cdot \rho \cdot \underline{\underline{N}}^e \underbrace{dV}_{A\,d\xi} = \int\limits_0^L \begin{bmatrix} 1-\frac{\xi}{L} \\ \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} \rho A \begin{bmatrix} 1-\frac{\xi}{L} & \frac{\xi}{L} \end{bmatrix} d\xi = \rho A \begin{bmatrix} \frac{L}{3} & \frac{L}{6} \\ \frac{L}{6} & \frac{L}{3} \end{bmatrix} = \frac{\rho A L}{6} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

$$\int\limits_0^L 1 - \frac{2\xi}{L} + \frac{\xi^2}{L^2}\, d\xi = \left. \xi - \frac{2}{L}\frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{L^2}\frac{\xi^3}{3} \right|_0^L = L - \frac{L^2}{L} + \frac{L^3}{3L^2} = \frac{L}{3}$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\xi^2}{L^2}\, d\xi = \left. \frac{\xi^3}{3L^2} \right|_0^L = \frac{L^3}{3L^2} = \frac{L}{3}$$

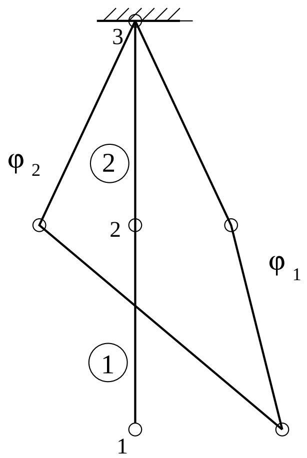
$$\int\limits_0^L \frac{\xi}{L} - \frac{\xi^2}{L^2}\, d\xi = \left. \frac{\xi^2}{2L} - \frac{\xi^3}{3L^2} \right|_0^L = \frac{L^2}{2L} - \frac{L^3}{3L^2} = \frac{L}{2} - \frac{L}{3} = \frac{3L-2L}{6} = \frac{L}{6}$$

$\alpha_1$-hez tartozó sajátvektor:

$$\begin{aligned}(1-2\cdot 0.108)\ \varphi_1^1 + (-1-0.108)\ \varphi_2^1 = 0 \\ 0.784\,\varphi_1^1 = 1.108\,\varphi_2^1 \\ \varphi_1^1 = \frac{1.108}{0.784}\,\varphi_2^1 = 1.413\,\varphi_2^1 \quad \rightarrow \underline{\varphi}^1 = \begin{bmatrix}1.413\\1\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$\alpha_2$-höz tartozó sajátvektor:

$$\begin{aligned}(1-2\cdot 1.32)\ \varphi_1^2 + (-1-1.32)\ \varphi_2^2 = 0 \\ -1.64\,\varphi_1^2 = 2.32\,\varphi_2^2 \\ \varphi_1^2 = -\frac{2.64}{1.64}\,\varphi_2^2 = -1.414\,\varphi_2^2 \quad \rightarrow \underline{\varphi}^2 = \begin{bmatrix}1.414\\-1\\0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

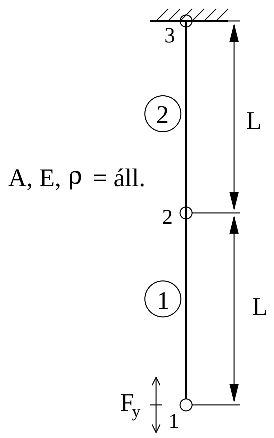



8.2. ábra. Sajátvektorok lengésképe

# 9. gyakorlat

# Dinamikai feladatok végeselemes tárgyalásához II.

## 9.1. Állandósult rezgés vizsgálata




9.1. ábra. pl. búvárszivattyú esete

Adatok az előző heti feladat alapján.

$$\underline{\underline{K}}^e = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{M}}^e = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

A gerjesztő erő felírható, mivel

$$\omega = 2\,\frac{rad}{s}, \quad \text{illetve} \quad F_0 = 2\,N$$

$$F_y = F_0 \cos\omega t = 2\cos 2t$$

A mozgás egyenlet:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{q}} + \underline{\underline{K}} \cdot \underline{q} = \underline{f}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2+2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u}_{g1} \\ \ddot{u}_{g2} \\ \ddot{u}_{g3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{g1} \\ u_{g2} \\ u_{g3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos\omega t$$

A kinematikai peremfeltétel (KPF) értelmében $u_{g3} = \ddot{u}_{g3} = 0$, mely alapján az előbbi egyenletben a harmadik sorok és oszlopok törölhetőek.

Az állandósult rezgésre a következő egyenlet adódik:

$$\left(\underline{\underline{K}} - \omega^2 \underline{\underline{M}}\right) \cdot \underline{q}_0 \cos\omega t = \underline{f}_0 \cos\omega t$$

Tehát a megoldandó egyenletrendszer:

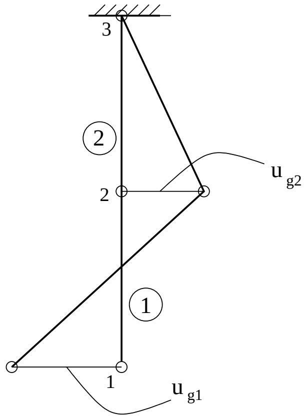
$$\begin{bmatrix} (1 - 2\cdot 4) & (-1-4) \\ (-1-4) & (2 - 4\cdot 4) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{g1} \\ u_{g2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -7\,u_{g1} - 5\,u_{g2} &= 2 \qquad \rightarrow 19.6\,u_{g2} - 5\,u_{g2} = 2 \Rightarrow u_{g2} = 0.137 \\ -5\,u_{g1} - 14\,u_{g2} &= 0 \qquad \rightarrow u_{g1} = -\frac{14}{5}\,u_{g2} = -2.8\,u_{g2} = -0.383 \end{aligned}$$

A lengéskép tehát a

$$\underline{q}_0 = \begin{bmatrix} -0.383 \\ 0.137 \\ 0 \end{bmatrix}$$

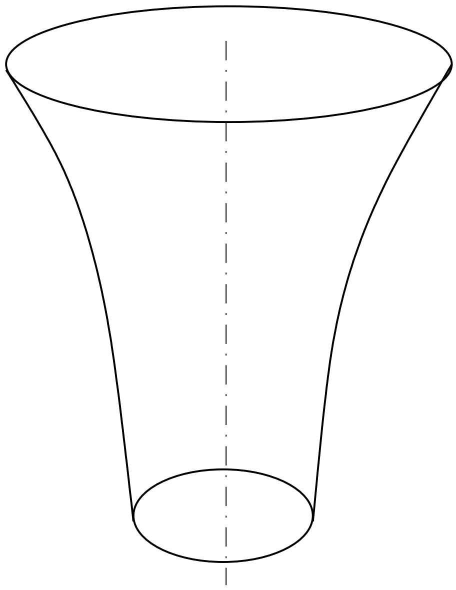
elmozdulás vektor szerint alakul.




9.2. ábra. Az állandósult lengéskép

## 9.2. I-DEAS használata sajátfrekvenicák meghatározására

Határozzuk meg a rézből készült kürt 15 legkisebb sajátfrekvenciáját.



9.3. ábra. Kürt vázlata

A fenti ábrán vázolt kürt csak egy jelleghelyes ábra, a konkrét méretezését a mellőzzük. Anyaga réz, a következő anyagjellemzőkkel:

Modulus of Elasticity: $E = 115\,GPa$ Poissons ratio: $\nu = 0.36$ Mass Density: $\rho = 8900\,\dfrac{kg}{m^3}$

A feladat végrehajtásához használandó főbb funkciók, parancsok:

**Simulation → Master Modeller**
`Options` → `Units` mm[Newton]
`Lines` $A(2,1)$ tengely rajzolása
`Splines` $B(4,1)$ a kürt oldal rajzolásához
`Dimension` $A(4,1)$ méretezés
`Modify Entity` $B(2,1)$ méretek megváltoztatása
`Revolve` $A(3,1)$ kontúr forgatás
`Name Parts...` $B(4,2)$ alkatrész elnevezés
– Mentés `Ctrl-S`
**Simulation → Meshing**
`Create FE Model...` $B(4,2)$ VEM modell definiálás
`Materials` $B(5,1)$ anyagjellemzők beállítása
`Physical Property` – falvastagság beállítása
`Define Shell Mesh` $A(1,1)$ háló generálás
– Mentés `Ctrl-S`
**Simulation → Boundary Conditions**
`Displacement Restraint` $A(4,2)$ KPF előírása
`Boundary Conditions` $A(7,1)$ `Normal Mode Dynamics - Lanczos`
– Mentés `Ctrl-S`
**Simulation → Model Solution**
`Solution Set` $A(1,2)$ mennyi sajátfrekvenciát számoljon?
`Solve` $A(2,1)$ megoldás
`New Visualizer` $A(6,2)$