

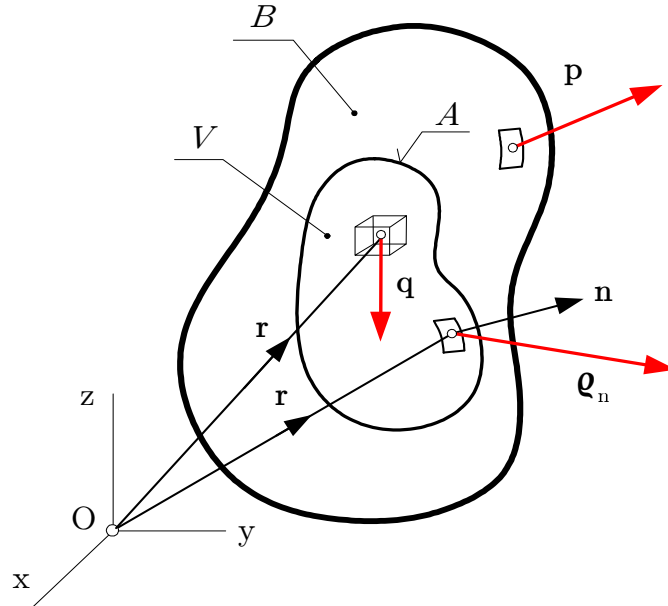
A szilárdságtan általános egyenletei

6.1. Bevezetés

A 2. Szilárdságtani alapfogalmak című fejezetben áttekintettük mindazokat a fogalmakat és mennyiséget, amelyek alkalmasak a vizsgálat tárgyát képező szilárd test egy tetszőlegesen kivágott pontjában a mechanikai állapot leírására. Mivel a test állapota a testet alkotó anyagi pontok állapotainak összessége rendelkezésünkre állnak azok az eszközök, melyekkel leírhatjuk a teljes test szilárdságtani állapotát. Az idézett fejezet erősen kvantitatív jellegű leíró módszerével szemben a jelen fejezetben egzaktabb és egyben általánosabb tárgyalásmódban vesszük sorra a már megismert fogalmakat és mennyiségeket.

6.2. Egyenletek feszültségekre

6.2.1. Feszültségi tenzormező: az egyensúly lokális feltételei. A test feszültségi állapotát Cauchy tétele alapján a $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ feszültségmező szabja meg, hiszen ennek ismeretében a test valamely anyagi pontjára illeszkedő bármilyen $\mathbf{n}$ normálisú síkon ki tudjuk számítani a $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektort. Felmerül azonban azonnal az a kérdés, vajon milyen feltételeknek kell, hogy eleget tegyen a $\mathbf{T}(\mathbf{r})$ feszülsténzör, ha a test tartós nyugalomban, egyensúlyban van. A felfeltett probléma tisztázása a vizsgálat tárgyát képező és a 6.1. ábrán vázolt B test tetszőlegesen kiválasztott V résztartománya esetén – ezt az A felület határolja – az egyensúlyi viszonyok vizsgálatát igényli. A V tartomány külső normálisát $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$ jelöli. Mivel a test nyugalomban van, annak bármely V résztartománya is nyugalomban kell, hogy legyen. A nyugalomnak szükséges feltétele, hogy a V résztartományon működő és a tartományt tekintve külső ER – ezt az A felületen ébredő $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségek által alkotott felületen megoszló ER, valamint a test térfogatán megoszló $\mathbf{q}$ térfogati ER V -n működő része alkotja – egyensúlyi legyen. Az ábra a későbbiek kedvéért, előre utalunk itt a 6.5.1. szakaszra, a feltünteteti a test palástján működő $\mathbf{p}$ felületen megoszló ER-t is, noha ez nem játszik közvetlen szerepet a gondolatmenetben.



6.1. ábra.

Ha egyensúlyi a $\boldsymbol{\rho}_n \in A$ és $\mathbf{q} \in V$ ER, akkor (a) zérus az eredője, és (b) zérus az origóra számított nyomatéka.

(a) Az *eredő eltűnését* az

$$\int_A \boldsymbol{\rho}_n dA + \int_V \mathbf{q} dV = 0 \quad (6.1)$$

egyenlet fejezi ki. A (2.79) alatti Cauchy tétel helyettesítésével átírható a felületi integrál integrandusza:

$$\int_A \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \mathbf{q} dV = 0. \quad (6.2)$$

A kapott egyenlet további átalakítása érdekében érdemes felidézni a Gauss-Osztrogradszkij tételt. Legyen a $\mathbf{C}$ valamilyen másodrendű tenzor. Legyen továbbá a $*$ műveleti jel a $\mathbf{C}$ tenzor és az A felület $\mathbf{n}$ külső normálisa között értelmezett valamilyen szorzási művelet műveleti jele (skaláris szorzás esetén például pontot kell gondolnunk $*$ helyett). A Gauss-Osztrogradszkij tétel szerint

$$\int_A \mathbf{C} * \mathbf{n} dA = \int_V \mathbf{C} * \nabla dV. \quad (6.3)$$

A Gauss-Osztrogradszkij tétel értelemszerű felhasználásával – a $\mathbf{C}$ helyére $\mathbf{T}$ -t, a $*$ helyére a skaláris szorzás $\cdot$ műveleti jelét gondoljuk – az

$$\int_V (\mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{q}) dV = 0. \quad (6.4)$$

alakban adódik az eredő eltűnésének feltétele. Mivel a fenti integrál a B jelű test bármely V résztartományán zérus értékű el kell tűnnie az integrandusznak:

$$\boxed{\mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{q} = 0.} \quad (6.5)$$

A kapott egyenlet az egyensúly első lokális feltétele, vagy röviden az *egyensúlyi egyenlet*.

(b) Az O origóra számított *eredő nyomaték eltűnését* az

$$\int_A \mathbf{r} \times \boldsymbol{\rho}_n dA + \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{q} dV = 0 \quad (6.6)$$

egyenlet fejezi ki. A (2.79) Cauchy tétel helyettesítésével és a (6.3) Gauss-Osztrogradszkij tétel felhasználásával kapjuk innen, hogy

$$\int_A \mathbf{r} \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \mathbf{r} \times \mathbf{q} dV = \int_V \{[\mathbf{r} \times \mathbf{T}] \cdot \nabla + \mathbf{r} \times \mathbf{q}\} dV = 0, \quad (6.7)$$

azaz – kihasználva V tetszőlegességét és a szorzatderiválás szabályát –, hogy

$$\downarrow \mathbf{r} \times \mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{r} \times \downarrow \mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{r} \times \mathbf{q} = 0. \quad (6.8)$$

A lefelé irányított nyíl azokra a mennyiségekre mutat, amelyeket deriválni kell.

A baloldalon álló első tag tovább alakítható, ha helyettesítjük a ∇ differenciáloperátor értékét:

$$\begin{aligned} \downarrow \mathbf{r} \times \mathbf{T} \cdot \nabla &= \downarrow \mathbf{r} \times \mathbf{T} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) = \\ &= \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x}}_{\mathbf{e}_x} \times \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_x}_{\boldsymbol{\rho}_x} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}}_{\mathbf{e}_y} \times \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_y}_{\boldsymbol{\rho}_y} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}}_{\mathbf{e}_z} \times \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{\boldsymbol{\rho}_z} = \\ &= 2 \left[-\frac{1}{2} (\boldsymbol{\rho}_x \times \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\rho}_y \times \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\rho}_z \times \mathbf{e}_z) \right] = 2\mathbf{t}_a, \end{aligned}$$

ahol a (2.81) képlettel összhangban $\mathbf{t}_a$ a feszültségi tenzor vektorinvariánsa. A kapott eredmény (6.8)-ba történő visszahelyettesítése, az $\mathbf{r}$ vektor kiemelése és a (6.5) egyensúlyi egyenlet kihasználása után a

$$2\mathbf{t}_a + \mathbf{r} \times (\mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{q}) = 2\mathbf{t}_a = 0 \quad (6.9)$$

egyenletet kapjuk második lokális egyensúlyi feltételként. Eszerint a feszültségi tenzor vektorinvariánsának eltűnése (és ebből következően a feszültségi tenzor tenzor szimmetriája) a nyomatéki egyensúly lokális feltétele. Úgy is fogalmazhatunk, hogy automatikusan fennáll a nyomatéki egyensúly, ha szimmetrikus a feszültségi tenzor.

Tovább alakítható a (6.5) egyensúlyi egyenlet, ha helyettesítjük a ∇ operátort a skalárszorzatban:

$$\mathbf{T} \cdot \nabla = \mathbf{T} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_x}_{\rho_x} + \frac{\partial}{\partial y} \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_y}_{\rho_y} + \frac{\partial}{\partial z} \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{\rho_z}$$

Az utóbbi képlettel vektoriális formában kapjuk az egyensúlyi egyenletet:

$$\boxed{\frac{\partial \rho_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho_z}{\partial z} + \mathbf{q} = 0} \quad (6.10)$$

Az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokkal történő skaláris szorzással pedig a fenti vektoregyenlettel egyenértékű skaláris egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + q_x &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.2.2. Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram: a szerkesztés. A 4. fejezetben – a részleteket illetően a 91. oldalon kezdődő 4.1.3. szakaszra utalunk – áttekintettük a részleges Mohr-féle kördiagram szerkesztésével kapcsolatos ismereteket. A Mohr-féle részleges kördiagramon a kör pontjai olyan elemi felületekhez tartozóan adják meg előjelhelyesen a σ_n normálfeszültség és a τ_{nn} nyírófeszültség értékét, amelyek normálisai valamelyik (előre ismert) főirányra merőleges síkban (feszültségi fősíkban) változnak.

Felvetődik a kérdés, hogy nem lehet-e a szilárd test valamely pontjában, mondjuk a P pontban, a tetszőleges $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$, normálisú felületelemen ébredő ρ_n feszültségvektor (2.66) és (2.67a,b) szerinti

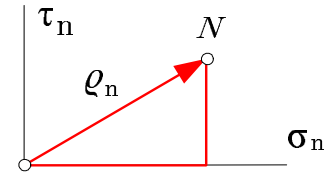
$$\rho_n = \sigma_n \mathbf{n} + \tau_n \quad (6.12)$$

felbontásában az előjeles σ_n normálfeszültséget, és a $\tau_n = |\tau_n| = \sqrt{\rho_n^2 - \sigma_n^2}$ nyírófeszültséget, mindkét mennyiséget mint az $\mathbf{n}$ függvényét, síkbeli diagram segítségével ábrázolni, hasonló módon, mint a részleges Mohr kör esetén.

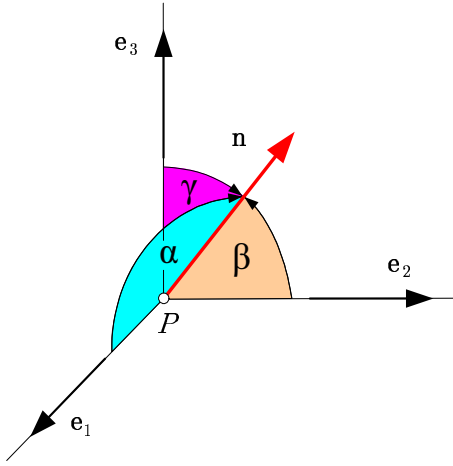
A megfogalmazott feladat megoldása a pontbeli feszültségi állapotot szemléltető úgynevezett teljes Mohr-féle feszültségi kördiagram. Ennek az abcissa tengelyén, összhangban a 6.2. ábrával, a σ_n normálfeszültséget, pozitív ordináta tengelye mentén pedig a τ_n nyírófeszültséget mérjük. A ρ_n feszültségvektor N képeinek tehát – az N betű azon felületelem normálisára utal, amelyiken feszültségvektor ébred – $\sigma_n = \sigma$ az abcisszája és $\tau_n = \tau$ az ordinátája. Az n indexet – amint azt az előző két sorban lévő képletek szedése is mutatja – sokszor el szokás hagyni.

Az origó és az $N[\sigma_n, \tau_n]$ pont között a feszültségvektor $\rho_n = |\rho_n|$ hossza jelenik meg az ábrán

Nyilvánvaló, hogy a Mohr-féle kördiagramról vett σ_n, τ_n koordinátakettős ismerete nem elég – a ρ_n tényleges térbeli helyzetének visszaállításához az elemi felületen.



6.2. ábra.



6.3. ábra.

A Mohr-féle teljes kördiagram előállításához, alapvető tulajdonságainak tisztázásához a feszültségi tenzor főteengelyeinek irányát kijelölő $\mathbf{e}_i$, $|\mathbf{e}_i| = 1$, $i = 1, 2, 3$ bázisvektorok által kifeszített jobbsodratú KR-ben tekintjük a feszültségtenzort, ahol

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

a feszültségi tenzor mátrixa. A továbbiakban egyelőre kikötjük, összhangban a fenti képlettel, hogy különböznek egymástól a főfeszültségek.

A főteengelyek KR-ében a tetszőleges irányú

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \beta \mathbf{e}_2 + \cos \gamma \mathbf{e}_3, \quad \alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi] \quad (6.13)$$

egységvektorra merőleges P pontbeli felületelemen (α , β és γ rendre az $\mathbf{n}$ 1, 2 és 3 jelű főteengelyekkel bezárt szöge – v.ö.: 6.3. ábra)

$$\boldsymbol{\rho}_n = \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} = \sigma_1 \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sigma_2 \cos \beta \mathbf{e}_2 + \sigma_3 \cos \gamma \mathbf{e}_3 \quad (6.14)$$

a feszültségvektor. Mivel az $\mathbf{n}$ egységvektor fennáll az $\mathbf{n}^2 = 1$, azaz a

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \quad (6.15a)$$

egyenlet. Az $\mathbf{n}$ normálisú felületelemen

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \beta + \sigma_3 \cos^2 \gamma \quad (6.15b)$$

a normálfeszültség és a $(\boldsymbol{\rho}_n)^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$ képlet alapján fennáll, hogy

$$\boldsymbol{\rho}_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2 \alpha + \sigma_2^2 \cos^2 \beta + \sigma_3^2 \cos^2 \gamma. \quad (6.15c)$$

A (6.15a,b,c) egyenletek adott σ_n és τ_n mellett meghatározzák azon felületelemek normálisát, amelyeken a vonatkozó σ_n és τ_n ébred. (a képletek szerint azon normálisok jöhetnek szóba, amelyekre nézve az egyes iránykoszínuszok négyzetei azonosak: Lásd később a (6.24b) képlet utáni szöveget.)

Mivel mindössze háromismeretlenes lineáris egyenletrendszerrel van szó a $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$ és $\cos^2 \gamma$ ismeretlenekkel a megoldás némi figyelmet kívánó és itt nem részletezett számításokkal meghatározható. A

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} (\sigma_n^2 + \tau_n^2 + \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_n - \sigma_3 \sigma_n) = \\ &= \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3)} \underbrace{\left[\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 \right]}_{f_1(\sigma_n, \tau_n)} \end{aligned} \quad (6.16a)$$

$$\begin{aligned} \cos^2 \beta &= \frac{1}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} (\sigma_n^2 + \tau_n^2 + \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_n - \sigma_3 \sigma_n) = \\ &= \frac{1}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \underbrace{\left[\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 \right]}_{f_2(\sigma_n, \tau_n)} \end{aligned} \quad (6.16b)$$

$$\begin{aligned}\cos^2 \gamma &= \frac{1}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1)} (\sigma_n^2 + \tau_n^2 + \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_n - \sigma_2 \sigma_n) = \\ &= \frac{1}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1)} \underbrace{\left[\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 \right]}_{f_3(\sigma_n, \tau_n)}\end{aligned}\quad (6.16c)$$

megoldások egyben a σ_n , τ_n és az $\mathbf{n}$ közötti keresett kapcsolatot is jelentik. A kapcsolat jellegének tisztázására átrendezzük a fenti összefüggéseket:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \alpha}_{R^2(\alpha)}, \quad (6.17a)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1) \cos^2 \beta}_{R^2(\beta)}, \quad (6.17b)$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2 + (\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_1) \cos^2 \gamma}_{R^2(\gamma)}. \quad (6.17c)$$

Mivel $\mathbf{n}^2 = 1$, a $\cos^2 \alpha$, $\cos^2 \beta$ és $\cos^2 \gamma$ -ra vonatkozó megoldásoknak pozitívnak, vagy zérusnak kell lenniük. Következésképp – figyelemmel a $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ feltételre is – teljesülnie kell a megoldást adó és a (6.16a, b, c) képletekkel értelmezett f_i ($i = 1, 2, 3$) mennyiségekkel kapcsolatos

$$\begin{aligned}f_1(\sigma_n, \tau_n) &\geq 0, \quad f_2(\sigma_n, \tau_n) \leq 0, \\ f_3(\sigma_n, \tau_n) &\geq 0\end{aligned}\quad (6.18)$$

egyenlőtlenségeknek. Ha f_1 zérus, akkor $\cos^2 \alpha = 0$, $\alpha = \pi/2$ és az $\mathbf{n}$ normális a 2 és 3 jelű fő tengelyek által kifeszített fősíkban fekszik; ha f_2 zérus, akkor $\cos^2 \beta = 0$, $\beta = \pi/2$ és az $\mathbf{n}$ normális az 1 és 3 jelű fő tengelyek által kifeszített fősíkban fekszik, végezetül pedig ha f_3 zérus, akkor $\cos^2 \gamma = 0$, $\gamma = \pi/2$ és az $\mathbf{n}$ normális az 1 és 2 jelű fő tengelyek által kifeszített fősíkban van.

Kiolvasható a (6.17a, b, c) egyenletekből, hogy az $f_i = 0$, ($i = 1, 2, 3$) esetben a σ_n , $\tau_n > 0$ ordinátájú és abcisszájú pontok által meghatározott síkgörbék félkörök, nevezetesen

az $f_1 = 0$ esetben $\cos^2 \alpha = 0$ ($\mathbf{n} \perp$ az 1. fő tengelyre):

$$\text{ez az } O_1 \left(\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}; 0 \right) \text{ középpontú és } R = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \text{ sugarú félkör;}$$

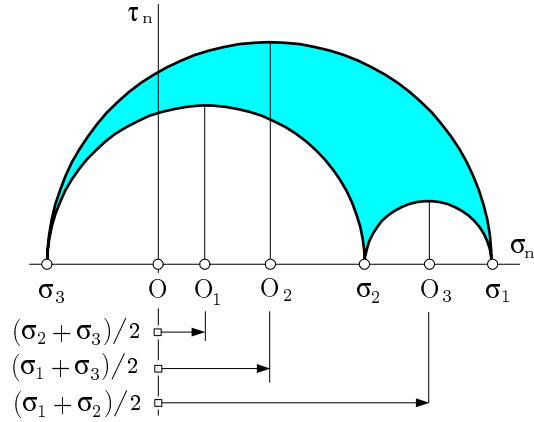
az $f_2 = 0$ esetben $\cos^2 \beta = 0$ ($\mathbf{n} \perp$ a 2. fő tengelyre):

$$\text{ez az } O_2 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}; 0 \right) \text{ középpontú és } R = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \text{ sugarú félkör;}$$

és végül

az $f_3 = 0$ esetben $\cos^2 \gamma = 0$ ($\mathbf{n} \perp$ a 3. fő tengelyre):

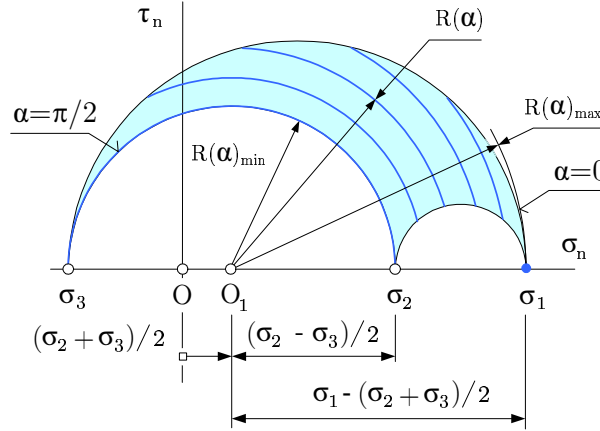
$$\text{ez az } O_3 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}; 0 \right) \text{ középpontú és } R = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \text{ sugarú félkör.}$$



6.4. ábra.

Figyeljük meg, hogy a félkörök középpontjaiban [az O_i ($i = 1, 2, 3$) pontokban] rendre teljesülnek az $f_1, f_3 > 0$ és $f_2 < 0$ egyenlőtlenségek és ezért az $f_1, f_3 > 0$ egyenlőtlenségek csak a $\tau_n > 0$ felsík megfelelő félkörökön kívüli, míg az $f_2 < 0$ egyenlőtlenség csak a felsík megfelelő félkörön belüli részén áll fenn. A mondottak fényében azonnal következik a (6.18) egyenlőtlenségekből, hogy a tetszőleges $\mathbf{n}$ normálisú elemi felületen ébredő σ_n és τ_n feszültségek által meghatározott $N(\sigma_n, \tau_n)$ pont a 6.4. ábrán türkiz színnel kiemelt körívháromszögön belül, vagy annak peremén kell, hogy legyen.

Keressük meg most azon $\mathbf{n}$ normálisokhoz tartozó $N(\sigma_n, \tau_n)$ pontok mértani helyét a $\sigma_n, \tau_n > 0$ felsíkon, amelyekre nézve $\alpha = \text{állandó}$ (ez azt jelenti, hogy az $\mathbf{n}$ egy olyan forgáskúpon helyezkedik el, melynek az 1. főtengety a tengelye, csúcspontja pedig a P pont – v.ö.: a 6.3. ábra).



6.5. ábra.

A (6.17a) képlet szerint a kérdéses pontok a

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = R^2(\alpha) \quad (6.19)$$

$$R(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \right)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) \cos^2 \alpha}$$

egyenletű, azonos O_1 középpontú köríveken helyezkednek el – v.ö.: a 6.5. ábra. A kék színű megrajzolt körívek, összhangban a korábban mondottakkal, a 6.4. ábrán már megrajzolt körívháromszögön belül, vagy annak peremén kell, hogy fekszenek.

A szélső esetekben,

ha $\alpha = 0$, akkor:

$$R(\alpha) = \sigma_1 - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2} = R(\alpha)_{\max}$$

(a körív egyetlen pontot, a $(\sigma_1; 0)$ pontot tartalmazza);

ha $\alpha = \pi/2$, akkor:

$$R(\alpha) = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = R(\alpha)_{\min}$$

(a körív félkörív).

Hasonló gondolatmenettel kapjuk a $\beta = \text{állandó}$ és $\gamma = \text{állandó}$ esetekben az $\mathbf{n}$ normálisokhoz tartozó $N(\sigma_n, \tau_n)$ pontok mértani helyét a $\sigma_n, \tau_n > 0$ felsíkon: ha $\beta = \text{állandó}$ a kérdéses pontok a (6.17b) egyenletű O_2 középpontú, $R(\beta)$ sugarú köríveken helyezkednek el; ha $\gamma = \text{állandó}$ a kérdéses pontok a (6.17c) egyenletű O_3 középpontú, $R(\beta)$ sugarú köríveken találhatók (a körívek (6.17b), (6.17c) egyenleteit most nem ismételtük meg). Hangsúlyozzuk, hogy a körök középpontjainak rendre

$$O_2 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0 \right), \quad \text{illetve} \quad O_3 \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}, 0 \right)$$

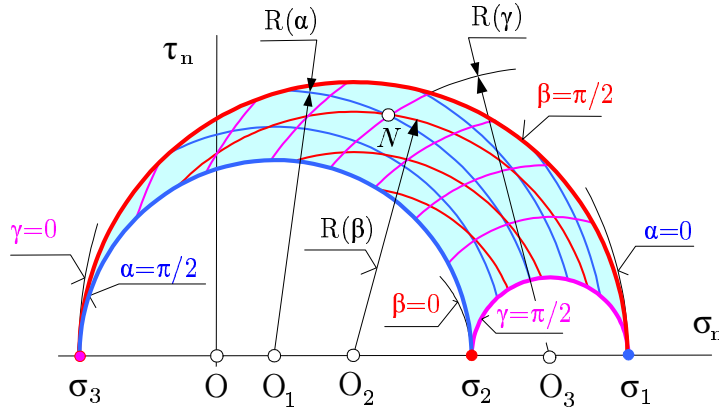
a koordinátái, a körök sugarai pedig a

$$\left| \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} - \sigma_2 \right| = R(\beta)_{\min} \leq R(\beta) \leq R(\beta)_{\max} \leq \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

valamint a

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = R(\gamma)_{\min} \leq R(\gamma) \leq R(\gamma)_{\max} \leq \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_3$$

korlátok között változhatnak.



6.6. ábra.

A viszonyokat szemléltető fenti ábrán kék (összhangban a 6.5. ábrával), vörösesbarna, illetve lila szín szemlélteti az $\alpha = \text{állandó}$, $\beta = \text{állandó}$ és $\gamma = \text{állandó}$ értékekhez tartozó körívseregeket.

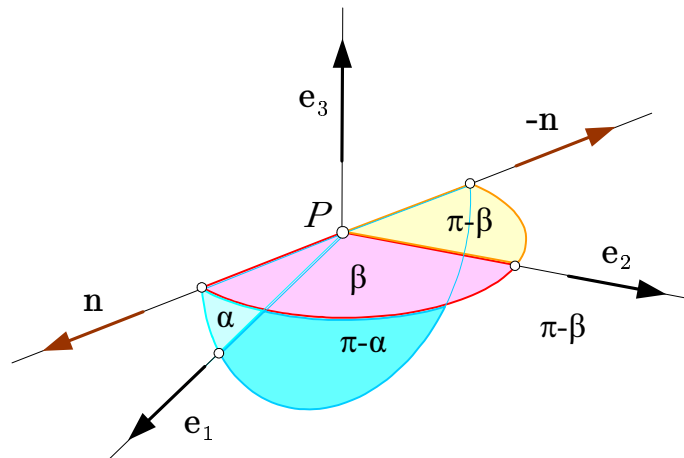
A tetszőleges α, β, γ irányszögű $\mathbf{n}$ normálisához tartozó $N(\sigma_n, \tau_n)$ pontot a fentiek szerint az O_1 középpontú $R(\alpha)$ ($\alpha = \text{állandó}$) sugarú (kék körív a 6.6. ábrán), az O_2 középpontú $R(\beta)$ ($\beta = \text{állandó}$) sugarú (vörösesbarna körív a 6.6. ábrán), valamint az O_3 középpontú $R(\gamma)$ ($\gamma = \text{állandó}$) sugarú (lila körív a 6.6. ábrán)

körök N metszéspontja adja. A σ_n, τ_n félsík fenti három körívsereghez tartozó pontjai képezik a Mohr féle kördiagramot, amelyet az O_1, O_2 és O_3 középpontú félkörívek (főkörök) által alkotott körívháromszög határol. A 6.6. ábrán vastag vonal jelzi a főköröket.

Mivel $\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$ következik a (6.17a) képletből, hogy az $\alpha = \text{állandó}$ és $\pi - \alpha = \text{állandó}$ körívek sugarai azonosak:

$$R(\alpha) = R(\pi - \alpha),$$

azaz egybeesik a két körív. Ugyanígy esnek egybe a (6.17b,c) képletek szerint a $\beta = \text{állandó}$ és $\pi - \beta = \text{állandó}$, valamint a $\gamma = \text{állandó}$ és $\pi - \gamma = \text{állandó}$ körívek. A 6.7 ábra szerint ez azt



6.7. ábra.

jelenti, hogy az $\mathbf{n}$ és $-\mathbf{n}$ normálisoknak a Mohr-féle kördiagram ugyanazon N pontja felel meg. Emiatt elegendő valamelyik feltérbe, pl. a $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ feltérbe eső normálisok seregét vizsgálni.

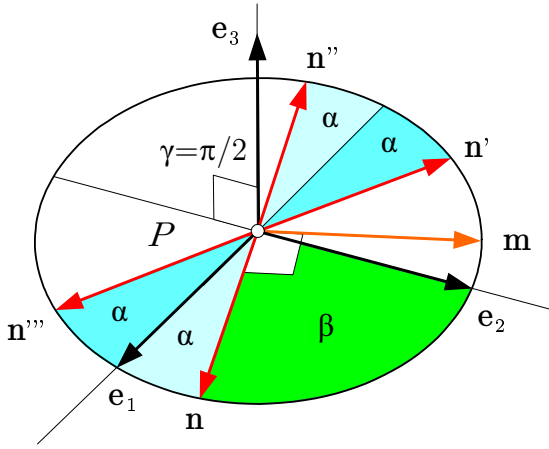
Ha $\gamma = \pi/2$, akkor az

$$\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2$$

normálisok az 1 és 2 jelű fő tengelyek által kifeszített síkban helyezkednek el. Ezeket a viszonyokat a 6.8. ábra szemlélteti. A vonatkozó O_3 középpontú (σ_1, σ_2) főkör egyenlete a (6.17c) képlet alapján

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \right)^2. \quad (6.20)$$

A tetszőleges α szöghöz tartozó σ_n és τ_n pedig a (6.15b,c) képletekből adódik annak figyelembevételével, hogy most $\beta = \pi/2 - \alpha$. Némi figyelmet kívánó



6.8. ábra.

algebrai átalakításokkal, a (4.19) alatti összefüggés, továbbá a

$$\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha = \sin^2 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha$$

trigonometrikus képletek kihasználásával kapjuk az

$$\sigma_n = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (6.21a)$$

$$\tau_n = \sqrt{\rho_n^2 - \sigma_n^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} |\sin 2\alpha| \quad (6.21b)$$

eredményt. Vegyük észre, hogy a (6.21a,b) egyenletek félkör paraméteres egyenletei a σ_n, τ_n síkon.

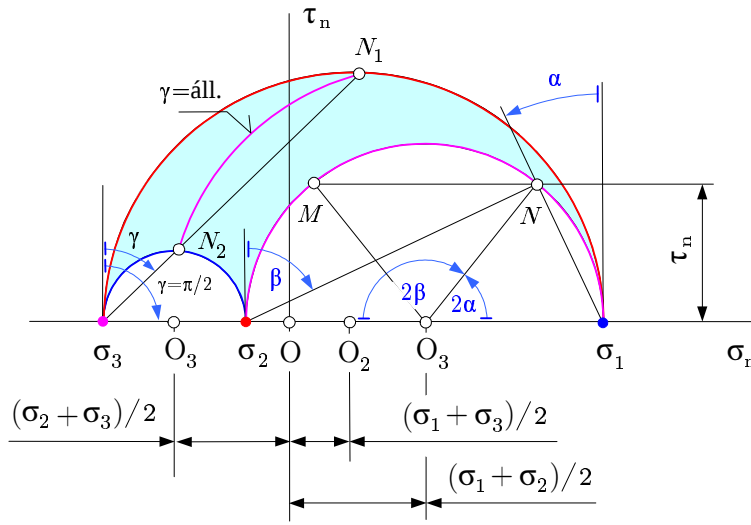
Visszaidézve a részleges Mohr körrel kapcsolatos 4.1.3 szakaszt, érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy (i) a (6.20) egyenlet azonnal megkapható a (4.21) egyenletből, (ii) a (6.21a,b) egyenletek pedig azonnal megkaphatók a (4.20a,b) egyenletekből, ha τ_{mn} helyére τ_n -et, φ helyére pedig α -t gondolunk. Ezen túlmenően érdemes azt is hangsúlyozni, hogy a (6.20) és (6.21a,b) képletek levezethetők a (4.21) és (4.20a,b) képleteket adó gondolatmenet szószerinti ismétlésével, hiszen mindkét esetben a σ_3 főfeszültségre merőleges fősíkban vizsgáltuk ugyanolyan módon a feszültségi állapotot.

A 6.9. ábra a Mohr-féle kördiagram további sajátosságait szemlélteti. Következik a (6.21a,b) egyenletekből, hogy $\gamma = \pi/2$ esetén, amint az α a 0 és $\pi/2$ között (a hozzá tartozó β pedig a $\pi/2$ és 0 között) változik, a megfelelő N pont a (σ_1, σ_2) főkörön a $[\sigma_1, 0]$ pontból 2α szöggel fordul el és végül eléri a $[\sigma_2, 0]$ pontot. A (6.21a,b) egyenletek szerint az $\mathbf{n}$ -re merőleges $\alpha + \pi/2$ irányú $\mathbf{m}$ vektornak

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha, \quad (6.22a)$$

$$\tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} |\sin 2\alpha| \quad (6.22b)$$

a koordinátái. A megfelelő M pont tehát a főkörön az N -hez viszonyítva az O_3 pontból húzott függőlegesre szimmetrikusan helyezkedik el. Ugyancsak a (6.21a,b)-ből következik, hogy a $\pm \alpha$ szögekhez ugyanazon N pont tartozik. Figyelembe véve még azt is, hogy bármely $\mathbf{n}$ és $-\mathbf{n}$



6.9. ábra.

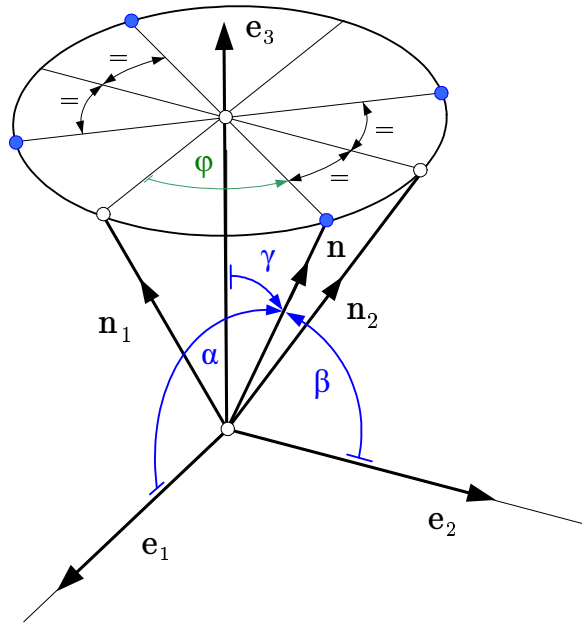
normálisnak azonos pont felel meg a kördiagramon, következik, hogy a 6.8. ábrán feltüntetett $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}''$ és $\mathbf{n}'''$ összesen négy normálishoz a 6.9. ábra (σ_1, σ_2) főkörének ugyanazon N pontja tartozik (a vonatkozó négy elemi felületen azonos a σ_n és a τ_n). A (σ_1, σ_2) főkörön kétféleképpen is megszerkeszthető az α -hoz tartozó N pont. Egyrészt úgy, hogy a $[\sigma_1, 0]$ pontban húzott függőlegessel az ugyanezen pontban α szöget bezáró egyenest rajzolunk és ezzel elmetszük a főkört, másrészt úgy, hogy a $[\sigma_2, 0]$ pontban húzott függőlegessel ugyanezen pontban β szöget bezáró egyenest rajzolunk, amivel aztán elmetszük a főkört.

Általános szabály, hogy a fősíkokban fekvő $\mathbf{n}$ normálisokhoz főkörökön lévő pontok tartoznak. A fősíkokban adott $\mathbf{n}$ -hez, összhangban a fentebb mondottakkal, úgy szerkesztjük meg a megfelelő pontot a vonatkozó főkörön, hogy az $\mathbf{n}$ és szóba jövő $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$) közötti szöggel a főkör $[\sigma_i, 0]$ pontjában emelt függőlegeshez egyenest rajzolunk és ezzel metszük el a főkört.

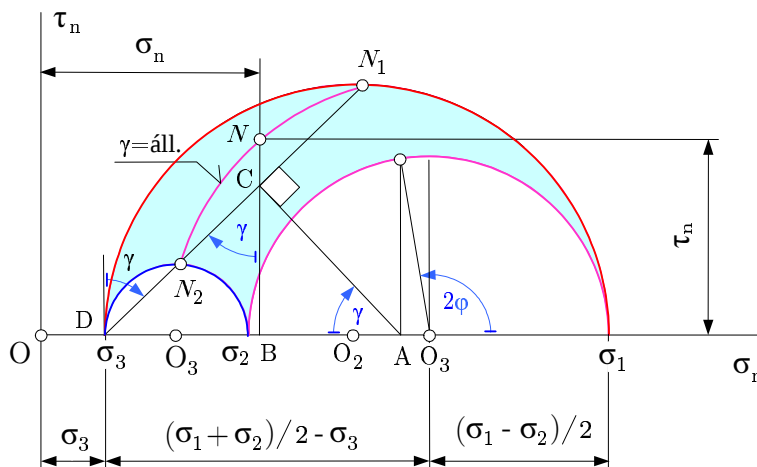
A $\gamma = \text{áll.} \leq \pi/2$ esetben, amikor is a normálisok az $\mathbf{e}_3$ tengelyű γ félnyílásszögű kúpfelület alkotói – v.ö.: 6.10. ábra –, a vonatkozó $[\sigma_n, \tau_n]$ pontok az O_3 középpontú $\gamma = \text{áll.}$ jelzésű körív-re esnek. A körív (σ_1, σ_3) főkörre eső N_1 , valamint a (σ_2, σ_3) főkörre eső N_2 pontjait, ezek az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ fősíkokban fekvő $\mathbf{n}_1$, illetve az $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ fősíkokban fekvő $\mathbf{n}_2$ normálisokhoz tartoznak, a $[\sigma_3, 0]$ pontban húzott függőlegessel γ szöget bezáró egyenes metszi ki a 6.9. ábrán.

Tulajdonképpen a (σ_1, σ_2) főkört meghatározó $[\sigma_1, 0]$ és $[\sigma_2, 0]$ pontok is úgy tekinthetők, mint amelyeket a $\gamma = \pi/2$ egyenes metsz ki a (σ_1, σ_3) és (σ_2, σ_3) főkörökből. Az (N_1, N_2) körív tetszőleges $\mathbf{n}$ -hez tartozó pontjának megszerkesztéséhez ($\varphi = \text{tetszőleges}$, $\gamma = \text{áll.}$) vegyük figyelembe, hogy az ábra alapján

$$\mathbf{n} = (\cos \varphi \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \mathbf{e}_2) \sin \gamma + \cos \gamma \mathbf{e}_3. \quad (6.23)$$



6.10. ábra.



Az $\mathbf{n}$ normálvektor (6.23) alatti előállítását felhasználva, tekintettel a (6.14) és (6.15b) összefüggésekre, azt kapjuk, hogy

$$\sigma_n = (\sigma_1 \cos^2 \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi) + \sigma_3 \cos^2 \gamma = \sigma_3 + \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_3 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi \right) \sin^2 \gamma . \quad (6.24a)$$

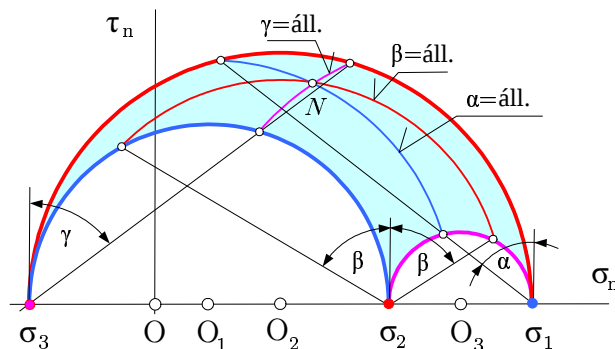
a normálfeszültség. A fenti képlet alapján a szerkesztés a 6.11 ábrán követhető, ha még azt is figyelembe vesszük, hogy

$$O_3 A = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} |\cos 2\varphi|, \quad DA = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \sigma_3 + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\varphi, \\ DC = DA \sin \gamma, \quad DB = DA \sin^2 \gamma. \quad (6.24b)$$

Mivel $\gamma = \text{áll. rögzíti}$ az (N_1, N_2) körívet, és a (6.24a) összefüggés szerint a $\pm\varphi$ és $\pm(\pi/2 - \varphi)$ szögekhez ugyanakkora σ_n tartozik, következik az előző szerkesztés alapján, hogy ugyanazon N pont négy különböző $\mathbf{n}$ egységvektorhoz rendelhető hozzá. Ezek végpontjait kitöltött nullkörök jelölik a 6.10. ábrán, de a négy vektor közül csak egyet szemléltet az ábra.

Tekintettel még az $\mathbf{n}$ és $-\mathbf{n}$ vektorokhoz tartozó N pontok azonosságára állíthatjuk mostmár, hogy a Mohr-féle kördiagram nem főkörön lévő pontjai nyolc különböző tényolcadba eső normálisnak felelnek meg. Emiatt a Mohr-féle kördiagrammal csak egy tényolcadba, az $\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3$ helyi KR első tényolcadába eső $\mathbf{n}$ vektorokat szokás vizsgálni.

Adott, egyébként tetszőleges α, β, γ irányszögű $\mathbf{n}$ normálishoz tartozó N pontot, az $\alpha = \text{áll.}$ és $\beta = \text{áll.}$, vagy az $\alpha = \text{áll.}$ és $\gamma = \text{áll.}$, vagy pedig a $\beta = \text{áll.}$ és $\gamma = \text{áll.}$ körívek metszéspontjaként is megszerkeszthetjük. A szerkesztést a 6.12. ábra szemlélteti.



Egybeeső főfeszültségek esetén leegyszerűsödik a Mohr-féle kördiagram. Ha pl. $\sigma_2 = \sigma_3$, akkor a $[\sigma_2, 0]$ és $[\sigma_3, 0]$ pontok egybeesnek, következésképpen a (σ_2, σ_3) főkör eltűnik, a (σ_1, σ_2) és (σ_1, σ_3) főkörök pedig egybeesnek. Ez a helyzet forog fenn a húzás és tiszta hajlítás egytengelyű feszültségi állapotainál, mivel a másik két főfeszültség, ha $\sigma_1 = \sigma_z > 0$: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

Végül, ha mindhárom főfeszültség azonos, azaz $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, vagyis az izotróp feszültségi állapot esetén ponttá zsugorodik a Mohr-féle feszültségi kördiagram.

6.2.3. Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram: a τ_n iránya. A Mohr-féle kördiagram előjelhelyesen (azaz irányhelyesen) adja meg a σ_n normálfeszültséget. Ugyanakkor a diagramról leolvasható τ_n csak a τ_n nyírófeszültség abszolút értéke. A τ_n vektor irányának meghatározása tehát további megfontolásokat kíván meg.

A 6.13. ábra a test egy P pontjában szemlélteti azt az egységsugarú gömböt, amelyen a P pontra illeszkedő elemi felületek $\mathbf{n}$ normálisa végigfut. Tekintsünk egy a gömbön elhelyezkedő sima térgörbét. Ennek $\mathbf{n} = \mathbf{n}(s)$ az egyenlete, amelyben az s ívkoordinátát tekintjük a görbe paraméterének. Jelölje $\mathbf{t}$ az $\mathbf{n}(s)$ térgörbe érintő egységvektorát. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{n}}{ds}.$$

Az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$ feltételből azonnal következik, hogy

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0.$$

A fenti geometriai jellegű összefüggések áttekintése után tekintsük most a σ_n értékét adó

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$$

összefüggést. Figyelembevétel a feszültségi tenzor szimmetriáját is, innen kapjuk, hogy

$$d\sigma_n = \frac{d\mathbf{n}}{ds} \cdot \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}}_{\boldsymbol{\rho}_n} ds + \underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}}_{\boldsymbol{\rho}_n} \cdot \frac{d\mathbf{n}}{ds} ds = 2\mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\rho}_n ds = 2\mathbf{t} \cdot (\sigma_n \mathbf{n} + \tau_n) ds,$$

azaz, hogy

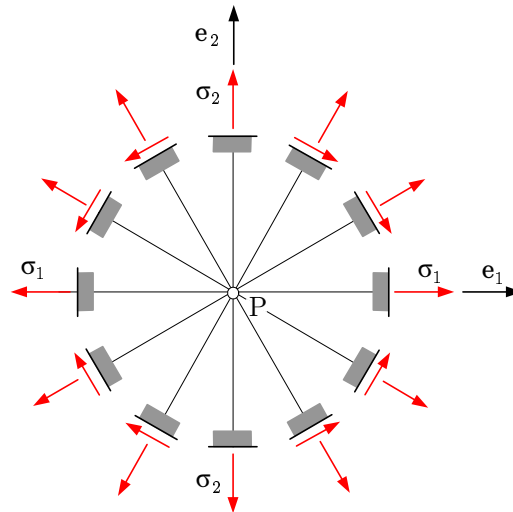
$$d\sigma_n = 2\mathbf{t} \cdot \tau_n ds. \quad (6.25)$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy

$$\text{ha } d\sigma_n > 0, \quad \text{akkor} \quad 0 < [\angle \mathbf{t}, \tau_n] < \pi/2. \quad (6.26)$$

Mással, ha növekszik a $\mathbf{t}$ irányában történő felületelem változaskor a normálfeszültség, azaz ha $(d\sigma_n > 0)$, akkor a τ_n a növekvő σ_n normálfeszültségű szomszédos elemi felület normálisa felé mutat.

A 6.14. ábra a σ_1, σ_2 főfeszültségek által kifeszített főkikban az $\mathbf{n}$ normálisokra merőleges felületelemeken – ezek a P ponttól eltávolítottan és egy kör mentén rendezetten vannak megrajzolva az ábrán – szemlélteti a σ_n és τ_n feszültségek irányát. Mivel az $\mathbf{e}_2$ -től az $\mathbf{e}_1$ felé az óramutató járásával egyezően elforduló normálisokhoz rendelt N pontok a (σ_1, σ_2) főkörön a $[\sigma_2, 0]$ ponttól a $[\sigma_1, 0]$ pont felé mozdulnak el (lásd a 6.9. ábrát), vagyis a megfelelő felületelemeken a σ_n normálfeszültség fokozatosan növekszik, következik, hogy τ_n mindenütt a σ_1 főfeszültséget hordozó elemi felület $\mathbf{e}_1$ normálisa felé mutat.

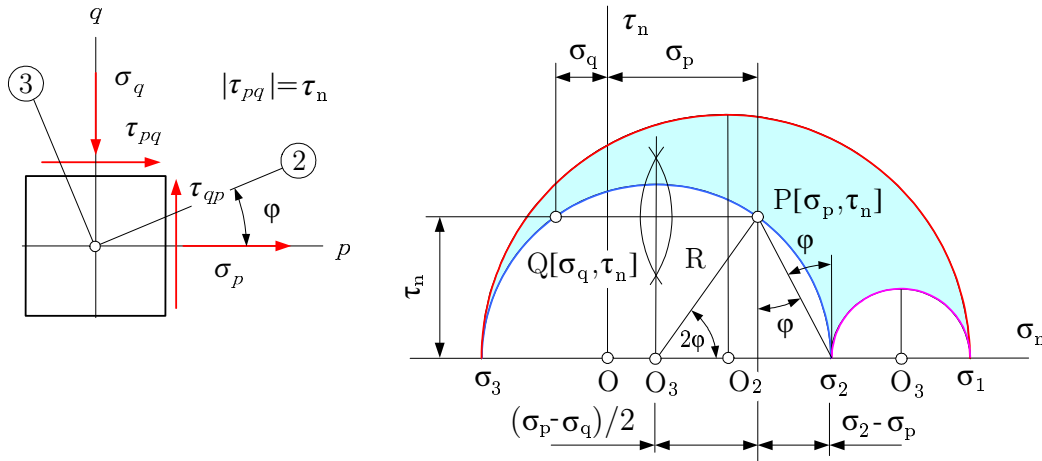


6.14. ábra.

6.2.4. A teljes feszültségi kördiagram szerkesztése, ha ismert egy feszültségi főirány. A 4.1.4. szakaszban sablont adtunk a hiányzó két főtengely és a főfeszültségek megkeresésére a részleges Mohr-féle feszültségi kördiagram segítségével.

Az alábbiak a 6.2.2. szakaszban bemutatott eredmények felhasználásával a fentebb idézett 4.1.4. szakaszhoz hasonló tárgyalásmódban sablonszerűen mutatják be a hiányzó főfeszültségek és főirányok meghatározását a teljes Mohr-féle feszültségi kördiagram segítségével. A tárgyalásmódban általános megközelítést alkalmazunk, de nem térünk ki részletesen minden lehetséges esetre. A gondolatmenet lezárásaként azonban elegendő eligazítást adunk majd az utóbbi esetek tekintetében is.

Legyen a vizsgált test egy adott P pontjában ismeretes a feszültségállapot a ponthoz kötött p, q és r koordinátatengelyek által alkotott karteziuszi KR-ben (a p, q, r koordinátatengelyek valójában vagy az x, y, z , vagy az y, z, x , vagy pedig a z, x, y koordinátatengelyekkel esnek egybe). Legyen ismert ugyanebben a pontban a feszültségi állapot: $\rho_r = \sigma_r \mathbf{e}_r$ a feszültségvektor az r normálisú felületelemen (vagyis az r irány főirány), $\sigma_p > 0$, $\tau_{pq} = \tau_{qp} > 0$ és $\sigma_q < 0$. Feltételezzük továbbá, hogy $\sigma_r = \sigma_1$.



6.15. ábra.

A szerkesztés lépéseit pontokba szedve ismertetjük.

1. Megrajzoljuk az ismert r főirány felől nézve az elemi kockát. Érdemes eközben ügyelni arra, hogy az r -t követő első koordinátairány, azaz a p irány vízszintesen jobbra, a q pedig függőlegesen felfelé mutasson az ábrán, úgy ahogyan azt a 6.15. ábra baloldali részén szemléltetjük.
2. Mivel az r irány főirány a másik két főtengely a reá merőleges, azaz a p és q irányokat kijelölő egységvektorok által kifeszített síkban fekszik. Ez a sík fősík és a benne fekvő $\mathbf{e}_p$ és $\mathbf{e}_q$ normálisok egymásra merőlegesek. Következésképp a ρ_p és ρ_q feszültségvektorokhoz tartozó $P[\sigma_p, \tau_n]$, illetve $Q[\sigma_q, \tau_n]$ pontok (a $\mathbf{e}_p$ és $\mathbf{e}_q$ normálisok képei a σ_n, τ_n síkon) főkörön helyezkednek el, szimmetrikusan a főkör középpontjában húzott függőleges egyenesre (emlékeztetjük itt az olvasót a 6.9. ábra M és N pontjainak szerkesztésével kapcsolatos magyarázatra). A fentiek alapján a Mohr-féle feszültségi kördiagram megrajzolása első lépéseként megszerkesztjük a $P[\sigma_p, \tau_n]$, illetve $Q[\sigma_q, \tau_n]$ pontokat a σ_n, τ_n KR-ben.
3. A $P[\sigma_p, \tau_n]$ és $Q[\sigma_q, \tau_n]$ pontokat összekötő egyenes felező merőlegese kimetszi a $P[\sigma_p, \tau_n]$ és $Q[\sigma_q, \tau_n]$ pontokat tartalmazó főkör középpontját.
4. A főkör középpontját a $P[\sigma_p, \tau_n]$ (vagy $Q[\sigma_q, \tau_n]$) pontjával összekötő egyenes hossza a főkör R sugara. Ennek birtokában megrajzoljuk a főkört. A főkör σ_n tengellyel történő metszéspontjai megadják a keresett főfeszültségeket. (A jelen esetben, tekintettel a $\sigma_r = \sigma_1$ feltevésre és a főfeszültségek sorrendjével kapcsolatos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ szabályra (a) a σ_2 és σ_3 főfeszültségeket kapjuk, (b) a megszerkesztett főkörnek pedig O_1 a középpontja.)

5. A három főfeszültség ismeretében megszerkesztjük a hiányzó két főkört. (A jelen esetben a (σ_1, σ_2) és (σ_1, σ_3) főköröket.)
6. Az első megszerkesztett főkör segítségével meghatározhatjuk a főtengelek KR-ét, mivel a főkör segítségével megkapott nagyobbik főfeszültség (a jelen esetben a $[\sigma_2, 0]$ pont) és a $P[\sigma_p, \tau_n]$ közötti ívhez tartozó [kerületi szög] (középponti szög) a p tengely és a vonatkozó főtengelek által [bezárt szög] (bezárt szög kétszerese) – a jelen esetben φ , illetve ennek a duplája. A szöget az elemi kocka felülnézeti képén a p tengelytől mérjük fel a τ_{pq} feszültség irányában. Az ábrán a jobbkézsabálynak megfelelően jelöltük be a főtengeleket (az 1 jelű főtengelek kifelé mutat a papír síkjából).
7. A szerkesztés alapján elvégzett számítással

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_p - \sigma_q}{2}\right)^2 + \tau_{pq}^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_p + \sigma_q}{2} + R, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_p + \sigma_q}{2} - R, \quad (6.27a)$$

az R sugár és a két főfeszültség, a φ szög a

$$\tan \varphi = \frac{\sigma_2 - \sigma_p}{|\tau_{pq}|}, \quad \tan 2\varphi = \frac{2|\tau_{pq}|}{\sigma_p - \sigma_q} \quad (6.27b)$$

egyenletekből adódik, az keresett főtengelek irányvektorait pedig a

$$\mathbf{e}_2 = \cos \varphi \mathbf{e}_p + \sin \varphi \mathbf{e}_q \quad \text{és} \quad \mathbf{e}_3 = -\sin \varphi \mathbf{e}_p + \cos \varphi \mathbf{e}_q \quad (6.27c)$$

összefüggések adják meg.

Az előző gondolatmenet során feltevés volt, hogy az ismert főfeszültség megegyezik a legnagyobb főfeszültséggel ($\sigma_r = \sigma_1$). További eseteket jelent, bár a gondolatmenet lépései megegyeznek a fentebb pontokba szedett lépésekkel, ha $\sigma_r = \sigma_2$ vagy, ha $\sigma_r = \sigma_3$. Ezek a feladatok is megoldhatók tehát a fenti sablon követésével.

6.3. Alakváltozási állapot

6.3.1. Kinematikai egyenletek. A szilárd test elmozdulási és alakváltozási állapotával kapcsolatos ismereteket kellő részletességgel ismerteti a 2.2. Elmozdulási és alakváltozási állapot című szakasz. Az ott tárgyalt ismereteket tekintve kiemelt szerepe van az alakváltozások elméletében az alakváltozási tenzort az elmozdulásvektorral megadó (2.22) egyenletnek. Szokás ezt az egyenletet kinematikai, vagy geometriai egyenletnek nevezni.

6.3.2. A Mohr-féle alakváltozási kördiagram.

A 6.2.2., 6.2.3. és 6.2.4 szakaszokban leírtak mintájára a szilárd test egy P pontjának alakváltozási állapota az ún. Mohr-féle alakváltozási kördiagrammal szemléltethető. Az alakváltozási kördiagram abcissa tengelyére az előjelhelyesen vett

$$\varepsilon_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_n \quad (6.28a)$$

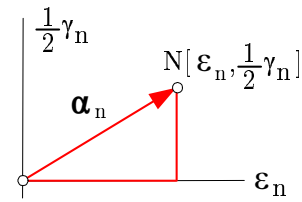
fajlagos nyúlást (a σ_n normálfeszültség analogonját), a felső fél ordinátatengelyre pedig a (2.56), (2.57a,b) alapján értelmezett

$$\frac{1}{2}\gamma_n = \frac{1}{2}|\boldsymbol{\gamma}_n| = |\boldsymbol{\alpha}_n - \varepsilon_n \mathbf{n}| \geq 0 \quad (6.28b)$$

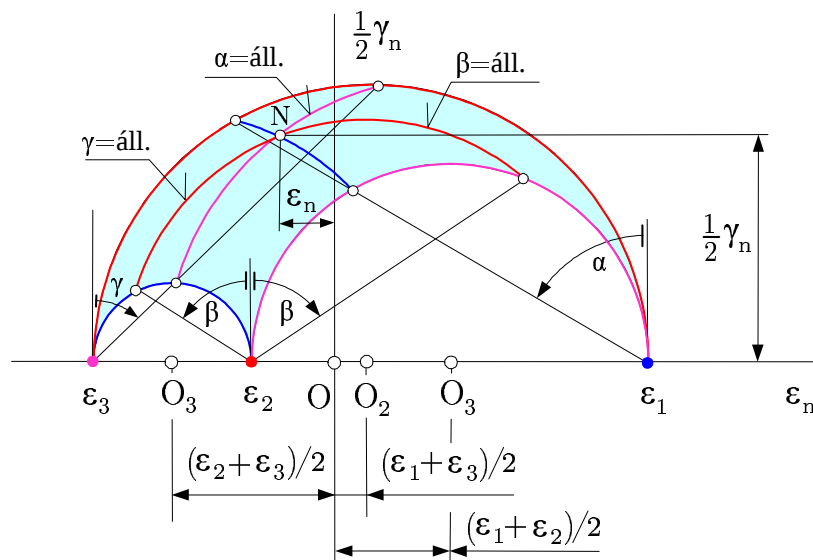
mennyiséget mérjük fel. Következik a $\boldsymbol{\gamma}_n$ vektor (2.56) alatti értelmezéséből, hogy $\boldsymbol{\gamma}_n/2$ az $\boldsymbol{\alpha}_n$ alakváltozási vektor $\mathbf{n}$ vektorra merőleges összetevője. A 2.14. ábra jelleghelyesen szemlélteti az $\boldsymbol{\alpha}_n$ -t adó $\varepsilon_n \mathbf{n}$ és $\boldsymbol{\gamma}_n/2$ vektorokat. A P pontra illeszkedő $\mathbf{n}$ egységvektor végpontjának az elemi környezet tiszta alakváltozásából adódó

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \varepsilon_n \mathbf{n} + \boldsymbol{\gamma}_n/2 \quad (6.29)$$

elmozdulása az alakváltozási kördiagramon az $N[\varepsilon_n, \gamma_n/2]$ pontot határozza meg, ugyanúgy, mint a feszültségi kördiagram esetén a $\boldsymbol{\rho}_n = \sigma_n \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n$ feszültségvektor: N az $\mathbf{n}$ képe az $\varepsilon_n, \gamma_n/2$ síkon.



6.16. ábra.



A fentiek alapján értelemszerűen alkalmazhatók a másodrendű $\mathbf{T}$ feszültségi tenzort szemléltető Mohr-féle feszültségi kördiagram kapcsán a 6.2.2., 6.2.3 és 6.2.4 szakaszokban leírtak az ugyancsak másodrendű $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzor Mohr-féle alakváltozási kördiagramjának szerkesztésekor.

A 6.17. ábra egy Mohr-féle alakváltozási kördiagramot szemléltet. A diagram feltünteti a tet-
szőleges $\mathbf{n} = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \cos \beta \mathbf{e}_y + \cos \gamma \mathbf{e}_z$ irányvektorhoz tartozó alakváltozási vektor $N[\varepsilon_n, \gamma_n/2]$
képének szerkesztését.

A 6.4.3 szakaszban megmutatjuk majd, hogy izotróp, lineárisan rugalmas anyagú testek és kis alakváltozás esetén egyetlen diagramban egyesíthető a feszültségi és alakváltozási Mohr-féle kördiagram.

6.4. Általános Hooke törvény

6.4.1. Egytengelyű feszültségi állapotok. A szilárdságtan első alapkísérletének tanúsága szerint a homogén izotróp anyagú téglalap szelvényű rúd húzásakor (nyomásakor) kis alakváltozások esetén az egyszerű Hooke törvényt összegező (3.20) anyagegyenlet szerint kölcsönösen egyértelmű lineáris függvénykapcsolat áll fenn az alakváltozási és a feszültségi tenzor között. Megjegyezzük, hogy ez esetben egytengelyű (egy főfeszültség különbözőt zérustól) feszültségi állapot ébred a rúdban.

A szilárdságtan második alapkísérlete esetén csavarónyomatékkal terheltük a homogén izotróp anyagú vékonyfalú csövet. A kísérleti eredmények alapján kapott (4.17) anyagegyenlet ismét azt igazolja, hogy most is kölcsönösen egyértelmű lineáris függvénykapcsolat áll fenn az alakváltozási és a feszültségi tenzor között, ha kicsik az alakváltozások. Megjegyezzük, hogy az utóbbi esetben speciális kéttengelyű feszültségi állapotot (a két főfeszültség azonos) idézett elő a csőben a csavarónyomaték.

Azt várjuk a fentebb visszaidézett kísérleti eredmények alapján, hogy homogén, izotróp szilárd testben kis alakváltozások esetén mindig lineáris az $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{T})$ függvénykapcsolat, függetlenül attól a körülménytől, hogy hány tengelyű a feszültségi állapot.

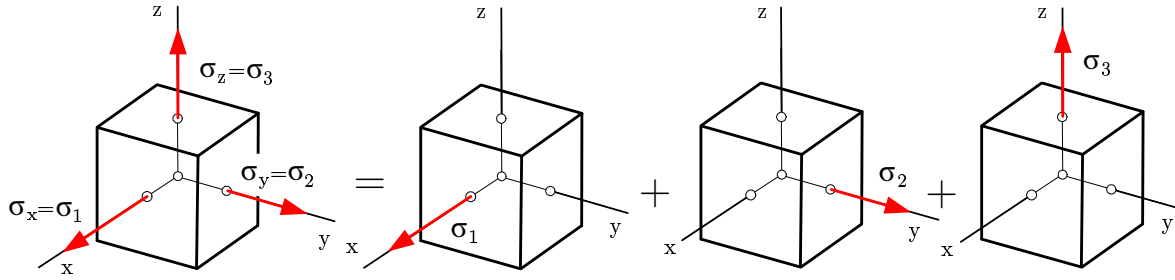
Az $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{T})$ függvénykapcsolat lineáris voltának levezetésénél a következőket vesszük figyelembe:

1. A szilárd test egyensúlyi viszonyait leíró egyenletek linearitása miatt bármely háromtengelyű feszültségi állapot három egytengelyű feszültségi állapotra bontható.
2. Mivel az anyag izotróp az így nyert három egytengelyű feszültségi állapotra külön-külön alkalmazható a (3.20) anyagegyenlet.

3. Kis alakváltozások esetén lineárisak az alakváltozási állapottal kapcsolatos egyenletek. Ez azt jelenti, hogy a három egytengelyű feszültségi állapothoz tartozó alakváltozási tenzorok összege a tényleges alakváltozási tenzor.

6.4.2. Általános Hooke törvény: levezetés a szuperpozíció elv felhasználásával.

Tegyük fel, hogy háromtengelyű a feszültségi állapot és az (x, y, z) KR egybeesik a főténgelyek KR-ével: $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$. A háromtengelyű feszültségi állapot egytengelyű feszültségi



6.18. ábra.

állapotokra történő felbontását a 6.18. ábra szemlélteti. Jelölje a három egytengelyű feszültségi állapothoz tartozó feszültségi és alakváltozási tenzorokat rendre $\underline{T}_1$, $\underline{T}_2$ és $\underline{T}_3$, illetve $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ és $\underline{A}_3$. Nyilvánvaló az ábra alapján, hogy a három feszültségi tenzornak

$$\underline{T}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{T}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

a mátrixa. Az egytengelyű feszültségi állapotra vonatkozó (3.20) anyagegyenlet értelemszerű felhasználásával kapjuk az $\underline{A}_1$, $\underline{A}_2$ és $\underline{A}_3$ alakváltozási tenzorok mátrixait:

$$\underline{A}_1 = \frac{1}{2G} \left[\underline{T}_1 - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_x \underline{E} \right], \quad \underline{A}_2 = \frac{1}{2G} \left[\underline{T}_2 - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_y \underline{E} \right]$$

$$\underline{A}_3 = \frac{1}{2G} \left[\underline{T}_3 - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_z \underline{E} \right].$$

A szuperpozíció elv alapján képezzük most a fenti három egyenlet összegét. Kapjuk, hogy

$$\underbrace{\underline{A}_1 + \underline{A}_2 + \underline{A}_3}_{\underline{A}} = \frac{1}{2G} \left[\underbrace{\underline{T}_1 + \underline{T}_2 + \underline{T}_3}_{\underline{T}} - \frac{\nu}{1+\nu} \underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{T_I} \underline{E} \right],$$

azaz, hogy

$$\underline{A} = \frac{1}{2G} \left[\underline{T} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \underline{E} \right], \quad (6.30)$$

vagy kirésztevezve – ennek során a tényleges értéktől függetlenül kiírjuk az alakváltozási tenzor mátrixának valamennyi elemét –, hogy

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2G} \left\{ \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Kiolvasható az utóbbi képletből (a jobboldal szerint $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$), hogy az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ vektorok nemcsak a feszültségi állapotnak, hanem az alakváltozási állapotnak is főirányai.

A (3.20) és (4.17) anyagegyenleteket kísérleti úton kaptuk meg. A mátrix alakú (6.30) anyagegyenlet a húzókísérlet eredményére támaszkodó elméleti megfontolások eredménye. Visszaadja azonban a vékonyfalú cső csavarásával kapcsolatos (4.17) anyagegyenletet is, hiszen annál a feladatnál zérus értékű volt a feszültségi tenzor első skalárinvariánsa.

A mátrix alakban felírt (6.29) anyagegyenlet a más kísérleti eredmények tanúsága szerint, tenzoriális alakú egyenletként is fennáll homogén izotróp testre kis alakváltozások esetén. A szakirodalomban ez az egyenlet az alakváltozási tenzorra felírt általános Hooke törvény néven ismert:

$$\boxed{\mathbf{A} = \frac{1}{2G} \left[\mathbf{T} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \mathbf{E} \right]} . \quad (6.31a)$$

Tenzoriális egyenletként alakját tekintve változatlanul, azaz a lokális KR-től függetlenül, fennáll az alakváltozási tenzorra vonatkozó általános Hooke törvény. Másként fogalmazva (a) teljesül az a természetes követelmény, hogy a (6.31a) anyagegyenlet, amely a homogén izotróp szilárd test terhelésre adott lokális válaszát írja le kis alakváltozások mellett, KR független egyenlet (b) és ennek folyományaként a lokális KR-t kifeszítő egymásra merőleges $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ egységvektorok nem kell, hogy egybeessenek a főirányokkal. Az utóbbi esetben tömören felírva

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2G} \begin{bmatrix} \sigma_x - \frac{\nu T_I}{1+\nu} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \frac{\nu T_I}{1+\nu} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \frac{\nu T_I}{1+\nu} \end{bmatrix} , \quad T_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad (6.31b)$$

a törvény mátrix alakja. Kiolvasható az utóbbi egyenletből, hogy

$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{2G} \left[\underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{T_I} - \frac{3\nu}{1+\nu} T_I \right] = \frac{1}{2G} \left[\frac{1+\nu}{1+\nu} - \frac{3\nu}{1+\nu} \right] T_I$$

azaz, hogy

$$\boxed{A_I = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} T_I , \quad \text{vagy, hogy} \quad T_I = 2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} A_I .} \quad (6.32)$$

A fenti képletek az invariánsok között fennálló összefüggések. A

$$K = 2G \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \quad (6.33)$$

térfogati rugalmassági tényező bevezetésével az invariánsok közötti (6.33)₁ összefüggés az

$$A_I = \frac{1}{3K} T_I$$

alakba írható át. (K elnevezése onnan származik, hogy a (2.54) képlet szerint A_I az ε_V fajlagos térfogatváltozás.)

Kiindulva az alakváltozási tenzorra vonatkozó (6.31a) általános Hooke törvényből a

$$\mathbf{T} = 2G \mathbf{A} + \frac{\nu}{1+\nu} T_I \mathbf{I} = 2G \mathbf{A} + \frac{\nu}{1+\nu} \underbrace{2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} A_I}_{T_I} \mathbf{I}$$

átalakítással kapjuk az általános Hooke törvényt a feszültségi tenzorra:

$$\boxed{\mathbf{T} = 2G \left[\mathbf{A} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \mathbf{E} \right]} . \quad (6.34a)$$

A vonatkozó mátrix egyenlet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} = 2G \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \frac{\nu A_I}{1-2\nu} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \frac{\nu A_I}{1-2\nu} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \frac{\nu A_I}{1-2\nu} \end{bmatrix} , \quad A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (6.34b)$$

alakú.

Legyen $\mathbf{n}$ és $\mathbf{m}$ az $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = 0$, továbbá az $|\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = 1$ feltételeket kielégítő egyébként tetszőleges irányvektor. Felhasználva a (2.43), (2.44) és a (2.83a,b) összefüggéseket, valamint az alakváltozási tenzorra vonatkozó (6.31a) Hooke törvényt az $\boldsymbol{\alpha}_n$ alakváltozási vektor ε_n , γ_{mn} elemeire az

$$\begin{aligned}\varepsilon_n &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{2G} \left[\underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}}_{\sigma_n} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \mathbf{n} \cdot \underbrace{\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}}_{\mathbf{n}} \right], \\ \gamma_{mn} &= 2\mathbf{m} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{G} \left[\underbrace{\mathbf{m} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}}_{\tau_{mn}} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \mathbf{m} \cdot \underbrace{\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}}_{\mathbf{n}} \right]\end{aligned}$$

vagyis az

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2G} \left[\sigma_n - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \right], \quad \gamma_{mn} = \frac{\tau_{mn}}{G} \quad (6.35)$$

képleteket kapjuk.

Hasonló gondolatmenettel használva fel a (2.83a,b) és a (2.43), (2.44) összefüggéseket, valamint a feszültségi tenzorra vonatkozó (6.34a) Hooke törvényt a $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor σ_n , τ_{mn} elemeire pedig

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = 2G \left[\underbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}_{\varepsilon_n} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \mathbf{n} \cdot \underbrace{\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}}_{\mathbf{n}} \right], \\ \tau_{mn} &= 2G \left[\underbrace{\mathbf{m} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}}_{\gamma_{mn}/2} + \frac{\nu}{1-2\nu} T_I \mathbf{m} \cdot \underbrace{\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}}_{\mathbf{n}} \right]\end{aligned}$$

vagyis

$$\sigma_n = 2G \left[\varepsilon_n + \frac{\nu}{1-2\nu} T_I \right], \quad \tau_{mn} = 2G \frac{\gamma_{mn}}{2} \quad (6.36)$$

az eredmény.

6.4.3. Egyesített Mohr-féle feszültségi és alakváltozási kördiagram. A (6.29) összefüggés alapján, felhasználva a (2.58), (6.31a), (6.35)₁ és (6.12) képleteket, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}G\gamma_n &= 2G \frac{\gamma_n}{2} = 2G(\boldsymbol{\alpha}_n - \varepsilon_n \mathbf{n}) = 2G(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} - \varepsilon_n \mathbf{n}) = (2G\mathbf{A} - 2G\varepsilon_n \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = \\ &= \left[\left(\mathbf{T} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \mathbf{E} \right) - \left(\sigma_n - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \right) \mathbf{E} \right] = \boldsymbol{\rho}_n - \sigma_n \mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_n.\end{aligned}$$

A kapott képlet szerint $\boldsymbol{\tau}_n$ a γ_n alakváltozási mértékkel arányos. Visszaideézve, hogy $\gamma_n = |\gamma_n|$ és hogy $\tau_n = |\tau_n|$ a fenti egyenletből a

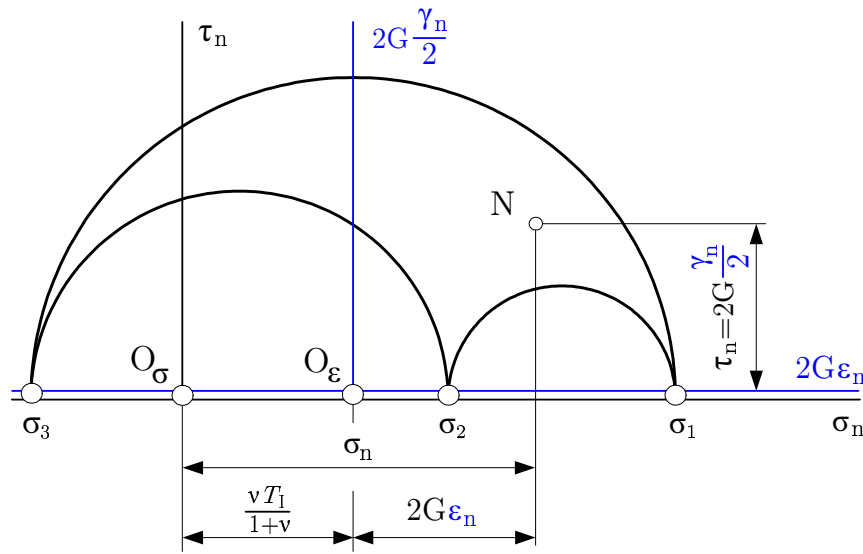
$$2G \frac{\gamma_n}{2} = \tau_n \quad (6.37a)$$

összefüggés következik. Társítsuk ezt az összefüggést a (6.35)₁ egyenlet alapján írható

$$2G\varepsilon_n = \sigma_n - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \quad (6.37b)$$

összefüggéssel.

A (6.37) képletek tanúsága szerint a Mohr-féle feszültségi kördiagram Mohr-féle alakváltozási kördiagramként is szolgálhat, ha (a) eltoljuk az origót az abcissa tengelyen a $T_I \nu / (1 + \nu)$ értékkel (pozitív irányba, ha $T_I \nu / (1 + \nu) > 0$, ellenkező esetben negatív irányba); (b) az $O_\varepsilon = [T_I \nu / (1 + \nu), 0]$ kezdőpontú új abcisszatengelyen a σ_n helyett $2G\varepsilon_n$ -et mérünk; (c) az O_ε kezdőpontú ordinátatengelyen a τ_n helyett az alakváltozási Mohr kör $\gamma_n/2$ -jének $2G$ -szeresét mérjük (vagyis mindkét új tengelyen a $2G$ -vel skálázunk). Az *egyesített feszültségi és alakváltozási Mohr-féle kördiagramot* a 6.19. ábra szemlélteti. Az új KR-t kék szín különbözteti meg a régítől.



6.19. ábra.

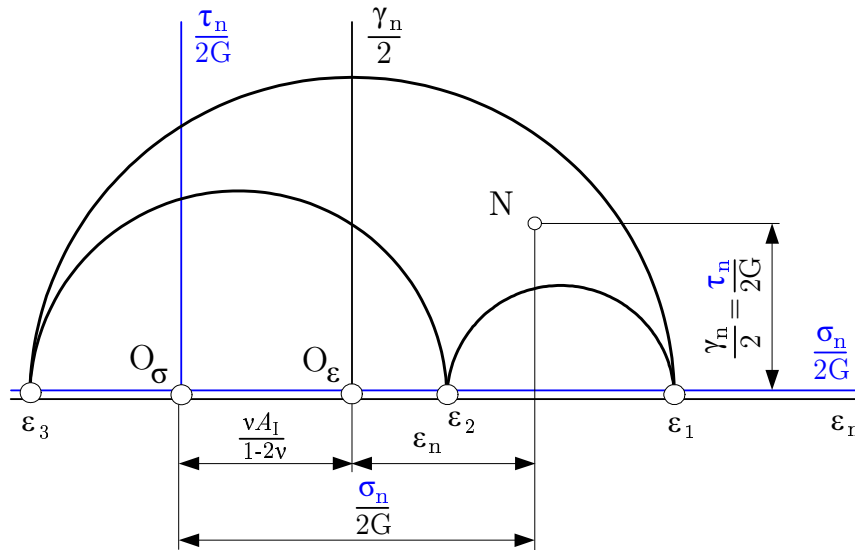
A (6.37a) átrendezésével kapott

$$\frac{\tau_n}{2G} = \frac{\gamma_n}{2} \quad (6.38a)$$

képlethez a (6.36)₁ egyenlet alapján írható

$$\frac{\sigma_n}{2G} = \varepsilon_n + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \quad (6.38b)$$

egyenletet érdemes társítani. Megismételve a 6.19. ábrára vezető gondolatmenetet az a következtetés adódik a (6.38) képletekből, hogy a Mohr-féle alakváltozási kördiagram Mohr-féle feszültségi kördiagramként is használható, ha (a) eltoljuk az origót az abcissa tengelyen az $A_I \nu / (1 - 2\nu)$ értékkel (negatív irányba, ha $A_I \nu / (1 - 2\nu) > 0$, ellenkező esetben pozitív irányba); (b) az $O_\sigma = [-A_I \nu / (1 - 2\nu), 0]$ kezdőpontú új abcisszatengelyen a ε_n helyett $\sigma_n / 2G$ -t mérünk; (c) az O_σ kezdőpontú ordinátatengelyen a $\gamma_n / 2$ helyett a feszültségi Mohr kör τ_n -jének $1/2G$ -szeresét mérjük (vagyis mindkét új tengelyen $1/2G$ -vel skálázunk). Az *egyesített alakváltozási és feszültségi Mohr-féle kördiagramot* a 6.20. ábra szemlélteti. Az új KR-t most is kék szín különbözteti meg a régitől.



6.20. ábra.

6.5. Energetikai állapot

6.5.1. Rugalmas test fajlagos alakváltozási energiája. A 2.4.2. pontban rámutattunk, hogy hőhatások hiányában a rugalmas test egy pontja elemi környezetének energetikai állapotát az u fajlagos alakváltozási energia határozza meg. A test energetikai állapotát pedig, visszautalunk itt a 2.6. szakaszban mondottakra, az $u(\mathbf{r})$ skalárfüggvény, azaz a fajlagos alakváltozási energia mező határozza meg. Néhány speciális esetben: (a) húzott vagy nyomott rúd (3.25) összefüggés, (b) vékonyfalú körgyűrűkeresztmetszetű csavart rúd (4.32) összefüggés, tisztáztuk az u fajlagos alakváltozási energia számításának módját. A képletek szerint az u az $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzor, illetve a $\mathbf{T}$ feszültségi tenzor elemeinek függvénye. Várható tehát, hogy általános esetben is az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{T}$ ismeretében számítható az u . A kérdés az, hogy hogyan.

Tegyük fel, hogy a 6.1. ábrán vázolt és a vizsgálat tárgyát képező homogén, lineárisan rugalmas B testet, a $\mathbf{q}$ sűrűségű térfogat ER, valamint a felületén megoszló $\mathbf{p}$ ER terheli és elhanyagolhatók a hőhatások. Feltesszük továbbá, hogy a terhelő erőrendszer sűrűségvektorai a zérus értékből kiindulva lassan végbemenő folyamatként (kvázistatikus terhelésként) úgy érik el végleges értéküket, hogy változásuk a terhelési folyamat során egyetlen monoton növekvő skaláris paraméterrel leírható (egyparaméteres a terhelés). Mivel a test lineárisan rugalmas ez azt eredményezi, hogy kétszer akkora terhelés esetén kétszer akkorák az egyes pontok elmozdulásai, kétszer akkorák az alakváltozások (az alakváltozási tenzor elemei), és kétszer akkorák a feszültségek (a feszültségi tenzor elemei).

Jelölje τ a terhelési paramétert. Feltesszük, hogy a $\tau = 0$ érték a terhelési folyamat kezdetének (a terheletlen állapotnak), a $\tau = 1$ érték pedig a terhelési folyamat végének (a teljes terhelésnek) felel meg: $0 \leq \tau \leq 1$. Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\tau &= \tau \mathbf{q}, & \mathbf{p}_\tau &= \tau \mathbf{p}, \\ \mathbf{u}_\tau &= \tau \mathbf{u}, & \boldsymbol{\rho}_{n\tau} &= \tau \boldsymbol{\rho}_n, \end{aligned} \quad (6.39)$$

a jellemző mennyiségek értéke, ahol a τ index nélkül írt értékek a terhelési folyamat végéhez tartoznak.

Tekintsük a továbbiakban a B test V résztartományát. Mivel ez teljes egészében a test belsejében fekszik, térfogatát a $\mathbf{q}$ sűrűségű ER, A felületét pedig a $\boldsymbol{\rho}_n = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$ sűrűségű ER terheli. Más szavakkal ez a két ER a V résztartomány külső ER-e.

A (2.95) összefüggés szerint a V résztartományban felhalmozódott U rugalmas energiára nézve fennáll az

$$U = \int_V u \, dV = W_K \quad (6.40)$$

egyenlet. Szavakban: a felhalmozódott rugalmas energia megegyezik a kiragadott résztartományon működő külső ER munkájával. Nyilvánvaló, hogy a terhelési folyamat során a τ paraméter $d\tau$ megváltozásához az elmozdulásmező $d\mathbf{u} = \mathbf{u} d\tau$ megváltozása tartozik, és eközben

$$dW_K = \int_V \mathbf{q}_\tau \cdot d\mathbf{u} \, dV + \int_A \boldsymbol{\rho}_{n\tau} \cdot d\mathbf{u} \, dA$$

a V résztartományon az aktuális τ -hoz tartozó időpontban működő $\mathbf{q}_\tau$ és $\boldsymbol{\rho}_{n\tau}$ külső ER munkája. A (6.39) képletek felhasználásával kapjuk innen, hogy

$$dW_K = \left(\int_V \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \, dV + \int_A \boldsymbol{\rho}_n \cdot \mathbf{u} \, dA \right) \tau d\tau$$

hiszen a τ paraméter független a helytől (vagyis a térfogati és felületi integráloktól). A V résztartományon működő teljes külső ER munkáját a dW_K elemi munka $\tau = 0$ és $\tau = 1$ határok között vett τ szerinti integrálja adja. A $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor képletét és az

$$\int_{\tau=0}^{\tau=1} \tau d\tau = \frac{1}{2}$$

integrált felhasználva kapjuk, hogy

$$\boxed{U = W_K = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{q} \cdot \mathbf{u} \, dV + \frac{1}{2} \int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, dA.} \quad (6.41)$$

A képlet jobboldalán álló felületi integrál térfogati integrállá alakítható át, ha felhasználjuk a (6.3) alatti Gauss-Osztrogradszkij tételt:

$$\int_A \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} \, dA = \int_V (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) \cdot \nabla \, dV .$$

A szorzatderiválás szabályának alkalmazásával és a (2.7) összefüggés figyelembevételével tovább alakítható a térfogati integrál integrandusza:

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{T}) \cdot \nabla &= \\ &= \downarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{u} \cdot \downarrow \mathbf{T} \cdot \nabla = \downarrow \mathbf{u} \cdot \mathbf{T} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{u} \cdot \downarrow \mathbf{T} \cdot \nabla = \\ &= \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}}_{\mathbf{u}_x} \cdot \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_x}_{\boldsymbol{\rho}_x} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}}_{\mathbf{u}_y} \cdot \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_y}_{\boldsymbol{\rho}_y} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}}_{\mathbf{u}_z} \cdot \underbrace{\mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z}_{\boldsymbol{\rho}_z} + \mathbf{u} \cdot \downarrow \mathbf{T} \cdot \nabla = \\ &= \mathbf{u}_x \cdot \boldsymbol{\rho}_x + \mathbf{u}_y \cdot \boldsymbol{\rho}_y + \mathbf{u}_z \cdot \boldsymbol{\rho}_z + \mathbf{u} \cdot \downarrow \mathbf{T} \cdot \nabla . \end{aligned}$$

A kapott eredménnyel, kihasználva a (6.5) egyensúlyi egyenletet és a (6.40) energia egyenletet, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} W_K &= \frac{1}{2} \int_V \underbrace{[(\mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{q}) \cdot \mathbf{u}]}_{=0} + \mathbf{u}_x \cdot \boldsymbol{\rho}_x + \mathbf{u}_y \cdot \boldsymbol{\rho}_y + \mathbf{u}_z \cdot \boldsymbol{\rho}_z \, dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{u}_x \cdot \boldsymbol{\rho}_x + \mathbf{u}_y \cdot \boldsymbol{\rho}_y + \mathbf{u}_z \cdot \boldsymbol{\rho}_z) \, dV = \int_V u \, dV = U . \end{aligned}$$

Innen

$$u = \frac{1}{2} (\mathbf{u}_x \cdot \boldsymbol{\rho}_x + \mathbf{u}_y \cdot \boldsymbol{\rho}_y + \mathbf{u}_z \cdot \boldsymbol{\rho}_z) \quad (6.42)$$

a fajlagos alakváltozási energia számításának formulája.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért bevezetjük két másodrendű tenzor ún. energia típusú szorzatát (kettős skaláris szorzatát). Tekintsük az elmozdulásmező derivált tenzorának és a feszültségi tenzornak diadikus alakjait az (x, y, z) KR-ben:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{u}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{u}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{u}_z \circ \mathbf{e}_z , \\ \mathbf{T} &= \boldsymbol{\rho}_x \circ \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\rho}_y \circ \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\rho}_z \circ \mathbf{e}_z . \end{aligned}$$

A két tenzor energia típusú szorzatát az

$$\boxed{\mathbf{U} \cdot \cdot \mathbf{T} = \mathbf{u}_x \cdot \boldsymbol{\rho}_x + \mathbf{u}_y \cdot \boldsymbol{\rho}_y + \mathbf{u}_z \cdot \boldsymbol{\rho}_z} \quad (6.43)$$

kifejezés értelmezi. (A képlet baloldala jelölésbeli megállapodás, a jobboldala pedig az értelmezés.) Vegyük észre, hogy (a) az energia típusú szorzat skalár, (b) az értelmezés bármely két másodrendű tenzorra érvényes hiszen az összetartozó képvektorok skalárszorzatainak összege áll a jobboldalon (c) az értelmezésből adódik, hogy a fenti szorzás kommutatív művelet:

$$\mathbf{U} \cdot \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{U} . \quad (6.44)$$

Néhány a szorzattal kapcsolatos és a későbbiekben felhasználásra kerülő összefüggést az alábbiak ismertetnek:

1. Számítsuk ki az $\mathbf{U}$ alakváltozási tenzor és az $\mathbf{E}$ egységtenzor energia típusú szorzatát:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} \cdot \cdot \mathbf{E} &= (\mathbf{u}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{u}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{u}_z \circ \mathbf{e}_z) \cdot \cdot (\mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z) = \\ &= \mathbf{u}_x \cdot \mathbf{e}_x + \mathbf{u}_y \cdot \mathbf{e}_y + \mathbf{u}_z \cdot \mathbf{e}_z = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = U_I . \end{aligned}$$

A kapott eredmény szerint valamely tenzor és az egységtenzor energia típusú szorzata a tenzor első skalárinvariánsa. Következésképp fennállnak az

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{E} &= A_I, & \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{E} &= T_I, \\ \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{E} &= 3 \end{aligned} \quad (6.45a)$$

összefüggések.

2. Képezzük a későbbiek kedvéért a (2.28), (2.29) és (2.30) összefüggések figyelembevételével a szimmetrikus $\mathbf{T}$ feszültségi tenzor és a ferdeszimmetrikus $\boldsymbol{\psi}$ forgástenzor energia típusú szorzatát. Ha kihasználjuk a szimmetriát és a ferdeszimmetriát, akkor kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \cdot \boldsymbol{\psi} &= (\boldsymbol{\rho}_x \circ \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\rho}_y \circ \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\rho}_z \circ \mathbf{e}_z) \cdot \cdot (\boldsymbol{\psi}_x \circ \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\psi}_y \circ \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\psi}_z \circ \mathbf{e}_z) = \\ &= \boldsymbol{\rho}_x \cdot \boldsymbol{\psi}_x + \boldsymbol{\rho}_y \cdot \boldsymbol{\psi}_y + \boldsymbol{\rho}_z \cdot \boldsymbol{\psi}_z = \tau_{xy}(\psi_{yx} + \psi_{xy}) + \tau_{yz}(\psi_{yz} + \psi_{zy}) + \tau_{zx}(\psi_{zx} + \psi_{xz}) = 0. \end{aligned} \quad (6.45b)$$

Szavakban: zérus értékű a szimmetrikus és ferdeszimmetrikus tenzorok energia típusú szorzata.

Az energia típusú szorzat (6.43) alatti értelmezését felhasználva a (6.42) összefüggésből

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{U} = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \cdot (\mathbf{A} + \boldsymbol{\psi}) = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{A}$$

a fajlagos belső energia számításának képlete. A képlet felírása során kihasználtuk, hogy a (2.15) felbontási tétel szerint $\mathbf{U} = \mathbf{A} + \boldsymbol{\psi}$ továbbá, hogy fennáll a (6.45b) összefüggés.

A (6.45b) összefüggésre vezető gondolatmenet alapján nem nehéz belátni, hogy

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\rho}_x \cdot \boldsymbol{\alpha}_x + \boldsymbol{\rho}_y \cdot \boldsymbol{\alpha}_y + \boldsymbol{\rho}_z \cdot \boldsymbol{\alpha}_z) = \\ &= \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) . \end{aligned} \quad (6.46)$$

A fajlagos alakváltozási energia az általános Hooke törvény felhasználásával kifejezhető vagy csak a $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$ és τ_{zx} feszültségekkel, vagy csak az $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$ és γ_{zx} fajlagos alakváltozásokkal. A (6.35) képletek helyettesítésével kapjuk, hogy

$$u = \frac{1}{4G} \left[\sigma_x \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \right) + \sigma_y \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \right) + \sigma_x \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \right) + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2 \right]$$

Rendezés után a T_I skalárinvariáns (6.31b)₂ alatti értékét is helyettesítve

$$u = \frac{1}{4G} \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 + 2(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] \quad (6.47)$$

az eredmény. Az u fajlagos alakváltozási energia alakváltozások függvényében történő előállítását gyakorlatra hagyjuk.

6.5.2. Fajlagos torzítási-, és térfogatváltozási energia. A

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \frac{A_I}{3} \mathbf{E} \quad \text{és} \quad \mathbf{S} = \mathbf{T} - \frac{T_I}{3} \mathbf{E} \quad (6.48)$$

összefüggések az $\mathbf{A}$ alakváltozási-, és a $\mathbf{T}$ feszültségtenzor deviátorait (deviátortenzorait) értelmezik. A (6.45a) képletek alapján

$$D_I = \mathbf{D} \cdot \cdot \mathbf{E} = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{E}}_{A_I} - \frac{A_I}{3} \underbrace{\mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{E}}_3 = 0. \quad (6.49a)$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$S_I = 0. \quad (6.49b)$$

A (6.49) képletek szerint zérus a deviátortenzorok első skaláris invariánsa.

A $\mathbf{D}$ alakváltozási és az $\mathbf{S}$ feszültségi deviátor, illetve a vonatkozó A_I és T_I invariánsok ismeretében deviátoros és gömbi részre bontható fel az alakváltozási és feszültségi tenzor:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \underbrace{\frac{1}{3} A_I \mathbf{E}}_{\mathbf{A}_g} \quad \text{és} \quad \mathbf{T} = \mathbf{S} + \underbrace{\frac{1}{3} T_I \mathbf{E}}_{\mathbf{T}_g} . \quad (6.50)$$

A gömbi jelző arra utal, hogy az $\mathbf{A}_g$ és $\mathbf{T}_g$ gömbi tenzorok gömböt gömbre képeznek le torzításmentesen. Ez egyben azt is jelenti, hogy (a) az alakváltozási tenzor deviátoros része csak a tiszta torzulást írja le hiszen zérus az első invariánsa, azaz nem tartozik hozzá fajlagos térfogatváltozás, (b) az alakváltozási tenzor gömbi része pedig a tiszta térfogatváltozást adja, hiszen nem tartozik hozzá torzulás.

Írjuk fel a feszültségi tenzorra vonatkozó (6.34a) Hooke törvényt a (6.50) felbontás alapján a deviátorokkal. Ha még az invariánsok közötti (6.32)₂ összefüggést is kihasználjuk, akkor kapjuk, hogy

$$\underbrace{\mathbf{S} + \frac{T_I}{3} \mathbf{E}}_{\mathbf{T}} = 2G \left[\underbrace{\mathbf{D} + \frac{A_I}{3} \mathbf{E}}_{\mathbf{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \mathbf{E} \right] = 2G \mathbf{D} + \underbrace{2G \frac{1+\nu}{1-2\nu} \frac{A_I}{3}}_{T_I/3}$$

azaz, hogy

$$\boxed{\mathbf{S} = 2G \mathbf{D}} . \quad (6.51)$$

Az utóbbi egyenlet a deviátorokkal kapcsolatos Hooke törvény.

A fajlagos alakváltozási energia is felírható a deviátorokkal. Kihasználva a (6.45a) és (6.49) összefüggéseket a (6.46) és (6.50) képletek egybevetése során az

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{S} + \frac{T_I}{3} \mathbf{E} \right) \cdot \cdot \left(\mathbf{D} + \frac{A_I}{3} \mathbf{E} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D} + \underbrace{\frac{T_I S_I}{6}}_{=0} + \underbrace{\frac{A_I D_I}{6}}_{=0} + \frac{T_I A_I}{18} \mathbf{E} \cdot \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D} + \frac{T_I A_I}{6} \end{aligned}$$

eredmény adódik. Az utóbbi képlet alapján két részre bontható a fajlagos alakváltozási energia:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= u_T + u_V , \\ u_T &= \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{D} , \quad u_V = \frac{T_I A_I}{6} . \end{aligned}} \quad (6.52)$$

Az u_T -vel jelölt rész az ún. *fajlagos torzítási energia*. Az elnevezés arra utal, hogy ez a képletrész a deviátor tenzorokból adódik, ahol is $\mathbf{D}$ a tiszta torzulást írja le, míg $\mathbf{S}$ a (6.49) Hooke törvény szerint a $\mathbf{T}$ feszültségi tenzor $\mathbf{D}$ -hez tartozó része.

Az u_V -vel jelölt rész az ún. *fajlagos térfogatváltozási energia*. Az elnevezésnek az a magyarázata, hogy ez az energia az összetartozó $\mathbf{T}_g$ és $\mathbf{A}_g$ gömbi részekből származik. Itt $\mathbf{A}_g$ a tiszta térfogatváltozást írja le.

A deviátorokkal kapcsolatos (6.49) Hooke törvény és az invariánsok között fennálló (6.32)₁ összefüggéssel

$$u_T = \frac{1}{4G} \mathbf{S} \cdot \cdot \mathbf{S} , \quad u_V = \frac{1}{12G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} T_I^2 \quad (6.53)$$

a fajlagos alakváltozási energia két része. Az utóbbi képletek lehetőséget adnak arra, hogy az u_T -t és u_V energiarészeket a feszültségi tenzor elemeivel fejezzük ki. Az átalakítások során felhasználjuk, hogy:

- (a) Az u -t adó (6.46) képlet és az u_T -t adó (6.53)₁ összefüggés egybevetése alapján azonnal felírható az u_T az $\mathbf{S}$ tenzor elemeivel: σ_n helyére s_n -et, τ_{mn} helyére s_{mn} -et; ε_n helyére s_n -et, γ_{mn} helyére $2s_{mn}$ -et kell írunk a (6.46) képlet jobboldalán, ahol $m, n = x, y, z$; $m \neq n$. Az eredmény:

$$u_T = \frac{1}{4G} \left[s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2(s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2) \right] . \quad (6.54a)$$

(b) A (6.48)₂ értelmezés alapján

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \frac{2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \frac{2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y}{3} \end{bmatrix} \quad (6.54b)$$

az $\mathbf{S}$ tenzor mátrixa.

(c) A lenti képlet baloldalán elvégzett négyzetre emelés és rendezés szerint fennáll a

$$\begin{aligned} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z)^2 + (2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z)^2 + (2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y)^2 = \\ = [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] \end{aligned} \quad (6.54c)$$

összefüggés.

Helyettesítsük mostmár a (6.54b)-ből s_n és s_{mn} értékeit a σ_n és τ_{mn} feszültségekkel kifejezve az u_T -t adó (6.54a) képletbe, majd vegyük figyelembe a (6.54c) átalakítást. Az eredmény az u_T fajlagos torzítási energia a feszültségekkel:

$$u_T = \frac{1}{12G} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] \quad (6.55)$$

A (6.53)₂ képletből T_I skalárinvariáns (6.31b)₂ alatti értékének helyettesítése után

$$u_V = \frac{1}{12G} \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)^2 \quad (6.56)$$

a fajlagos térfogatváltozási energia feszültségekkel kifejezett értéke.

6.5.3. Fajlagos alakváltozási energia rudak egyszerű igénybevételeire. Az általános érvényű (6.47) képlet alapján számítható ezekben az esetekben a fajlagos alakváltozási energia.

Húzás (nyomás): N = állandó. Figyelembe véve a feszültségi tenzor mátrixát adó (3.12) összefüggést, a σ_z -t adó (3.15) összefüggést, valamint az anyagállandók között fennálló (4.27) egyenletet kapjuk, hogy

$$u = \frac{1}{4G(1 + \nu)} \sigma_z^2 = \frac{1}{2} \frac{\sigma_z^2}{E} = \frac{1}{2} \frac{N^2}{A^2 E} \quad (6.57)$$

Hajlítás: $M_h = M_{hx}$ = állandó, a keresztmetszet x és y súlyponti tengelyei a főtengek, egytengelyű feszültségi állapot, σ_z az egyetlen nem zérus feszültség. Értéke az (5.15) képlettel számítható. Mivel egytengelyű a feszültségi állapot használható az előző képlet első része. Következésképp

$$u = \frac{1}{2} \frac{\sigma_z^2}{E} = \frac{1}{2} \frac{M_{hx}^2}{I_x^2 E} y^2 \quad (6.58)$$

Csavarás: Kör és körgyűrűkeresztmetszetű rudat tekintünk HKR-ben. A csavarónyomaték M_c . A nem zérus $\tau_{R\varphi}$ feszültség (4.45) alatti értékével a HKR-ben érvényes (6.69) egyenletből

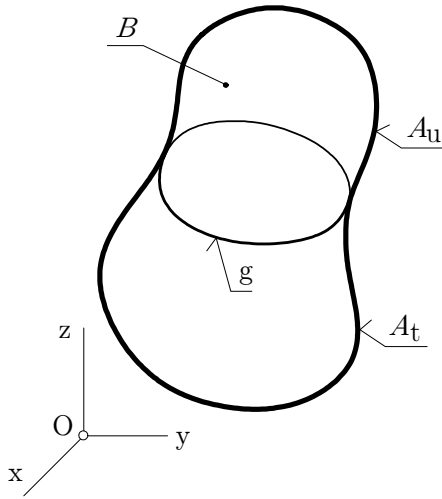
$$u = \frac{1}{2} \frac{\tau_{R\varphi}^2}{G} = \frac{1}{2} \frac{M_c^2}{I_p^2 G} R^2 \quad (6.59)$$

6.6. A rugalmasságtan alapegyenlet-rendszere

A homogén izotróp szilárd test kis alakváltozás melletti mechanikai állapotának leírására szolgáló és a 2.6. szakaszban összegezésszerűen felsorolt $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ elmozdulásmező (3 skaláris ismeretlen), $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r})$ alakváltozási tenzormező (6 skaláris ismeretlen a szimmetria miatt), $\mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{r})$ feszültségi tenzormező (6 skaláris ismeretlen a szimmetria miatt), valamint az $u = u(\mathbf{r})$ fajlagos alakváltozási energia (1 skaláris ismeretlen), mint a hely függvénye összesen 3+6+6+1=16 ismeretlent jelent.

Az első 15 ismeretlen meghatározására szolgáló teljes egyenletrendszer (a) mezőegyenletekből, és (b) a csatlakozó peremfeltételekből épül fel.

Az ábrán vázolt B jelű szilárd test A_u és A_t jelű részekre bontott. A két részt a g görbe választja el egymástól.



6.21. ábra.

A keresett $\mathbf{u}$ elmozdulásmező, $\mathbf{A}$ és $\mathbf{T}$ alakváltozási és feszültségi tenzorok között a szilárd test minden egyes pontjában fennállnak, mint mezőegyenletek

- a (2.16) egyenlet szerinti

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{u} \circ \nabla + \nabla \circ \mathbf{u}) \quad (6.60a)$$

tenzoriális alakú kinematikai egyenlet (összesen 6 skaláris egyenlet);

- a (6.34a) képlettel adott

$$\mathbf{T} = 2G \left[\mathbf{A} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \mathbf{E} \right] \quad (6.60b)$$

tenzoriális anyagegyenlet (összesen 6 skaláris egyenlet);

- a (6.5) képlet szerinti

$$\mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{q} = 0 \quad (6.60c)$$

vektoriális alakú egyensúlyi egyenlet (összesen 3 skaláris egyenlet).

Ez összesen 15 egyenlet a 15 ismeretlent jelentő $\mathbf{u}$ elmozdulásmezőre, $\mathbf{A}$ alakváltozási tenzormezőre és $\mathbf{T}$ feszültségi tenzormezőre.

Tegyük fel, hogy A_u jelű peremrészen az elmozdulásmező az előírt, és $\tilde{\mathbf{u}}$ jelöli az előírt elmozdulást. Feltesszük továbbá, hogy az A_t jelű peremrészen felületen megosztó terhelés működik. Ennek sűrűségvektorát $\tilde{\mathbf{p}}$ jelöli. Nyilvánvaló, hogy a megoldásként adódó $\mathbf{u}$ elmozdulásmező meg kell, hogy egyezzen A_u -n az ott előírt elmozdulásmezővel. Ugyanígy adódik, hogy csak akkor lehetséges lokális egyensúly az A_t peremfelületen, ha a ρ_n feszültségvektor megegyezik ugyanitt az előírt peremterheléssel. Következőleg a (6.60) mezőegyenleteket ki kell egészíteni az

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \tilde{\mathbf{u}} \quad \text{az } A_u\text{-n,} \\ \rho_n &= \mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \tilde{\mathbf{p}} \quad \text{az } A_t\text{-n} \end{aligned} \quad (6.61)$$

alakú peremfeltételekkel. Szokás az első peremfeltételt elmozdulási, a másodikat pedig feszültségi peremfeltételnek nevezni.

A (6.60) mezőegyenletek és (6.61) peremfeltételek által meghatározott peremértékfeladat megoldásának ismeretében a (6.46) szerinti

$$u = \frac{1}{2} (\rho_x \cdot \alpha_x + \rho_y \cdot \alpha_y + \rho_z \cdot \alpha_z) \quad (6.62)$$

képletből adódik 16-ik ismeretlenként a fajlagos alakváltozási energia.

A (6.60) mezőegyenletek és a (6.61) peremfeltételek a rugalmasságtan alap-egyenletrendszerét képezik. Ezek megoldása speciális és a mérnöki gyakorlatban fontos esetekben részint analitikusan, részint numerikus módszerekkel kereshető meg. Az utóbbiak közül érdemes ehelyütt is megemlíteni a végelem módszert és a peremelem módszert.

6.7. Mintafeladatok

6.1. Írja fel HKR-ben az egyensúlyi egyenleteket!

A (2.104) és a (2.99) képletek helyettesítésével az

$$\mathbf{T} \cdot \nabla + \mathbf{q} = (\rho_R \circ \mathbf{e}_R + \rho_\varphi \circ \mathbf{e}_\varphi + \rho_z \circ \mathbf{e}_z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial R} \mathbf{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) + \mathbf{q} = 0$$

egyenlet következik a (6.5) egyensúlyi egyenletből. Elvégezve a kijelölt deriválásokat, a skaláris szorzást és kihasználva eközben az $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\varphi$ egységvektorok deriválásával kapcsolatos (2.98a,b) összefüggéseket kapjuk,

hogy

$$\frac{\partial \rho_R}{\partial R} + \frac{\rho_R}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \rho_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \rho_z}{\partial z} + \mathbf{q} = 0 . \quad (6.63)$$

Az $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokkal történő további skaláris szorzás után, tekintettel a ρ_R , ρ_φ és ρ_z feszültségvektorok (2.103a,b,c) alatti értelmezésére, a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{\sigma_R - \sigma_\varphi}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zR}}{\partial z} + q_R &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} + \frac{\tau_{\varphi R} + \tau_{R\varphi}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + q_\varphi &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{zR}}{\partial R} + \frac{\tau_{zR}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0 \end{aligned} \quad (6.64)$$

alakban adódnak a skaláris egyensúlyi egyenletek.

6.2. Milyen térfogati terhelés esetén elégíti ki az egyensúlyi egyenleteket a feszültségi tenzor, ha

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} x^2 & 2xy & 0 \\ 2xy & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \quad (6.65)$$

a mátrixa az (x, y, z) KR-ben.

A (6.11) egyensúlyi egyenletek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} q_x &= -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -4x , \\ q_y &= -\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -4y , \\ q_z &= -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 . \end{aligned}$$

6.3. Az ábrán vázolt téglalapkeresztmetszetű – a téglalap szélessége egységnyi, magassága b , a rúd hossza pedig l – prizmatikus rúdban

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 0 , \quad \sigma_y = \frac{3f}{2b} \left(y - \frac{4y^3}{3b^2} + \frac{b}{3} \right) , \\ \sigma_z &= \frac{3fl^2}{2b^3} \left(1 - \frac{4z^2}{l^2} \right) y \end{aligned} \quad (6.66a)$$

a normálfeszültségek, és

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 , \quad \tau_{yz} = -\frac{3fz}{2b} \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right) \quad (6.66b)$$

a nyírófeszültségek értéke, ahol az f feladatparaméter. A rúdon nem működik térfogati terhelés.

Ellenőrizze, hogy teljesülnek-e az egyensúlyi egyenletek? Mekkora a rúd felső, alsó és oldallapjain működő terhelés? Mi az előző kérdésre adott válasz fényében az f feladatparaméter jelentése?

Ha behelyettesítjük a

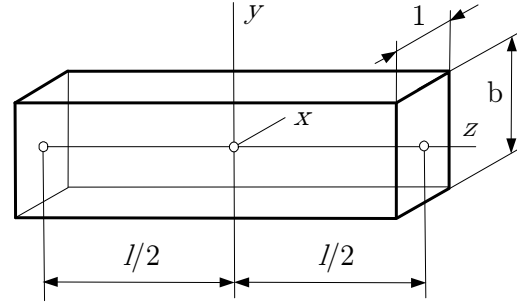
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \frac{3f}{2b} \left(1 - \frac{4y^2}{3b^2} \right) , \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{12fyz}{b^3}$$

és

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = 0 , \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{3f}{2b} \left(1 - \frac{4y^2}{3b^2} \right) , \quad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = \frac{12fyz}{b^3}$$

deriváltakat a (6.11) skaláris egyensúlyi egyenletekbe, akkor azonnal adódik, hogy az első egyenlet identikusan teljesül, a második és harmadik egyenlet pedig ugyancsak teljesül:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + q_y &= 0 + \frac{3f}{2b} \left(1 - \frac{4y^2}{3b^2} \right) - \frac{3f}{2b} \left(1 - \frac{4y^2}{3b^2} \right) + 0 = 0 , \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + q_z &= 0 + \frac{12fyz}{b^3} - \frac{12fyz}{b^3} + 0 = 0 . \end{aligned}$$



6.22. ábra.

Az x és $-x$ normálisú oldallapokon $\rho_x = 0$ és $-\rho_x = 0$ a feszültségvektor. Következésképp terhelten a két oldallap. Az alulsó lapon

$$-\rho_y|_{-b/2} = -\sigma_y|_{-b/2}\mathbf{e}_y - \tau_{yz}|_{-b/2}\mathbf{e}_z = -\frac{3f}{2b} \left(-\frac{b}{2} - \frac{b}{6} + \frac{b}{3} \right) \mathbf{e}_y + \frac{3fz}{2b} (1-1) \mathbf{e}_z = 0,$$

tehát ugyancsak zérus a feszültségvektor. Következésképp az alulsó lap is terheletlen. A felülső lapon pedig, összhangban az

$$\rho_y|_{b/2} = \sigma_y|_{b/2}\mathbf{e}_y + \tau_{yz}|_{b/2}\mathbf{e}_z = \frac{3f}{2b} \left(\frac{b}{2} - \frac{b}{6} + \frac{b}{3} \right) \mathbf{e}_y - \frac{3fz}{2b} (1-1) \mathbf{e}_z = f\mathbf{e}_y$$

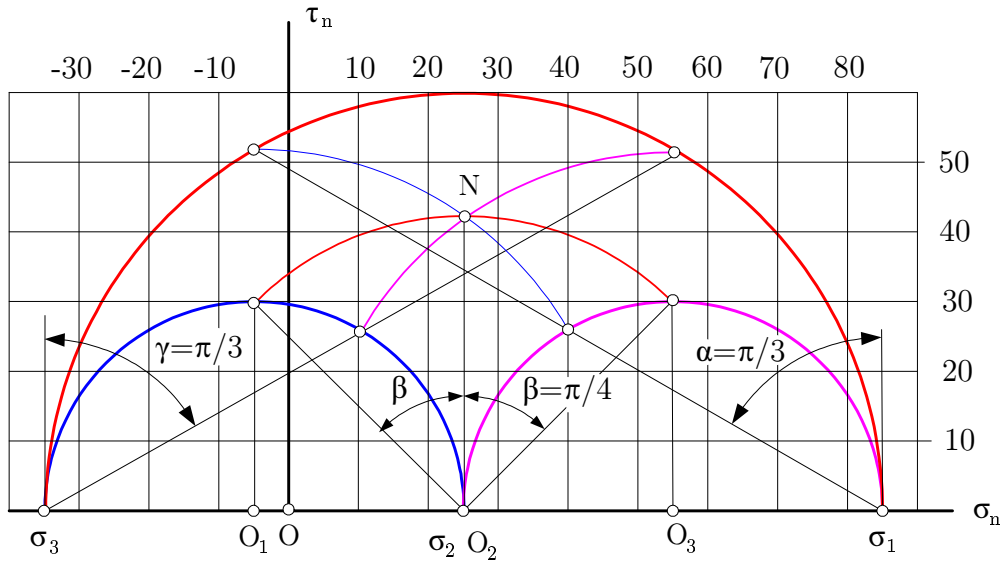
számítással konstans megoszló terhelés működik.

6.4. A vizsgálat tárgyat képző test adott P pontjában

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 85 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad \text{és} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_y + \frac{1}{2}\mathbf{e}_z$$

a feszültségi tenzor mátrixa és egy a tekintett pontra illeszkedő felületelem normális egységvektora. Határozza meg a teljes feszültségi Mohr kör segítségével szerkesztéssel, valamint számítással a felületelemen ébredő σ_n és τ_n normál-, illetve nyírófeszültséget.

Vegyük észre, hogy az x , y és z tengelyek feszültségi főteengelyek és, hogy $\sigma_x = \sigma_1 = 85$ MPa, $\sigma_y = \sigma_2 = 25$ MPa és $\sigma_z = \sigma_3 = -35$ MPa a vonatkozó főfeszültségek. Ezek birtokában azonnal megszerkeszthető a Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram:



6.23. ábra.

A $\cos \alpha = n_x = 0.5$, $\cos \beta = n_y = \sqrt{2}/2$ és $\cos \gamma = n_z = 0.5$ trigonometrikus egyenleteknek $\alpha = \gamma = \pi/3$ és $\beta = \pi/4$ a számunkra érdekes megoldása. Az α , β és γ szögek ismeretében, követve a 6.12. ábra sémáját az alábbi lépésekkel megrajzoljuk az $\alpha = \pi/3 = \text{áll.}$ és $\gamma = \pi/3 = \text{áll.}$ köríveket: a $[\sigma_1, 0]$ és $[\sigma_3, 0]$ pontokban húzott függőlegesekkel α , illetve γ szöget bezáró egyeneseket szerkesztünk. Ezek (σ_1, σ_3) , (σ_1, σ_2) , valamint (σ_3, σ_1) , (σ_3, σ_2) főkörökkel való metszésein haladnak át az O_3 , valamint O_1 középpontú $\alpha = \pi/3 = \text{áll.}$ és $\gamma = \pi/3 = \text{áll.}$ körívek. Az utóbbiak metszéspontja kiadja az $N = [\sigma_n, \tau_n]$ pontot. (Az ábra az ellenőrzés kedvéért az O_2 középpontú $\beta = \pi/4 = \text{áll.}$ körív szerkesztését is feltünteti. Ez is áthalad az N ponton.) Leolvasható az ábráról, hogy $\sigma_n \approx 25.0$ MPa és $\tau_n \approx 42.5$ MPa.

Ami a számítást illeti a

$$\rho_n = \underline{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{n} = \frac{85}{2}\mathbf{e}_x + \frac{25\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_y - \frac{35}{2}\mathbf{e}_z$$

feszültségvektor ismeretében

$$\sigma_n = \mathbf{n} \cdot \rho_n = \frac{85}{4} + \frac{25 \times 2}{4} - \frac{35}{4} = 25 \text{ MPa}$$

a normálfeszültség, és

$$\tau_n = \sqrt{\rho_n^2 - \tau_n^2} = \sqrt{\left(\frac{85}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2}\right)^2 - 25^2} = 42.46 \text{ MPa}$$

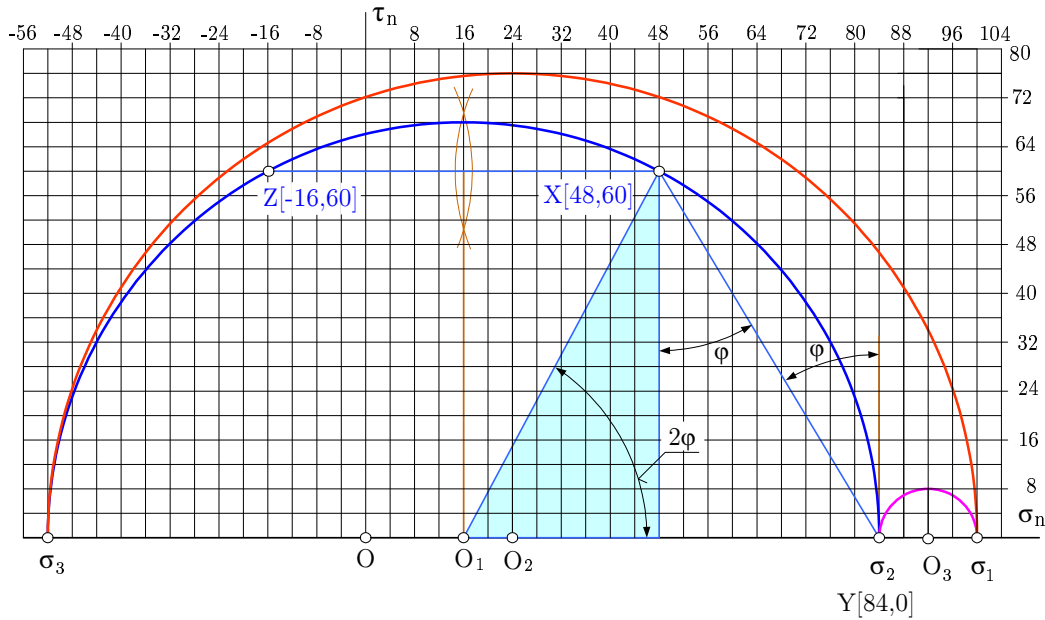
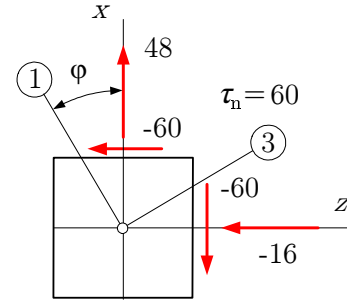
a nyírófeszültség. A kétféleképpen is meghatározott értékek jó egyezést mutatnak.

6.5. Ismertes a vizsgálat tárgyát képező test valamely P pontjában a feszültségi tenzor mátrixa az (x, y, z) KR-ben.

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 48 & 0 & -60 \\ 0 & 100 & 0 \\ -60 & 0 & -16 \end{bmatrix} [\text{MPa}].$$

Határozza meg Mohr-féle feszültségi kördiagram segítségével a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat.

A megoldás során a 6.2.4. szakaszban közölt sémát követjük. Nyilvánvaló, hogy az y irány főirány. Az r, p, q irányoknak most rendre az y, z, x irányok felelnek meg. A 6.24. ábra jobboldali felső része a pozitív y tengely felől nézve szemlélteti az elemi kockán ébredő feszültségeket. Leolvasható az elemi kockáról, hogy $\tau_n = 60$ MPa. A kördiagramot szerkesztve első lépésben megrajzoljuk



6.24. ábra.

az $\mathbf{e}_x$ és $\mathbf{e}_z$ normálisok $X[48, 60]$ és $Z[-16, 60]$ képeit. Az X, Z pontokat összekötő vízszintes felező merőlegese kimetszi a σ_n tengelyből az X, Z pontokon áthaladó főkör középpontját (mint később kiderül az O_1 pontot). Az O_1, X pontok közötti távolsággal, mint R sugárral megrajzolt O_1 középpontú kör és a σ_n tengely két metszéspontja megadja a hiányzó (a jelen esetben a σ_2 és σ_3) főfeszültségeket. A három főfeszültség birtokában megszerkeszthető a másik két, azaz a (σ_1, σ_2) és (σ_1, σ_3) főkör. Az 1 jelű főtengely és az x tengely által bezárt $\varphi = \varphi_{1x}$ szög a $[\sigma_2, 0]$ és az $X[48, 60]$ pontok által meghatározott körívhez tartozó kerületi szög. A vonatkozó 2φ nagyságú középponti szög a színezéssel kiemelt derékszögű háromszögben jelenik meg. A főtengelyek jobbsodratú KR-ének megszerkesztésekor a $\tau_{zx} = -60$ MPa feszültség irányába mértük fel a $\varphi = \varphi_{1x}$ szöget az elemi kockát szemléltető ábrarészleten.

Bár valamennyi érték leolvasható a kördiagramról, a keresett mennyiségek a megszerkesztett kördiagram alapján, a (6.27a,b,c) képletek értelemszerű alkalmazásával, számíthatók is. Az

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} = \sqrt{\left(\frac{48 + 16}{2}\right)^2 + 60^2} = 68 \text{ MPa}$$

sugár birtokában

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + R = \frac{48 - 16}{2} + 68 = 84 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} - R = \frac{48 - 16}{2} - 68 = -52 \text{ MPa}$$

a két hiányzó főfeszültség. A σ_1 normál feszültség ismeretében

$$\tan \varphi_{1x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_n} = \frac{84 - 48}{60} = 0.6, \quad \text{azaz} \quad \varphi_{1x} = \varphi = \arctan 0.6 = 0.54042 \text{ radián} = 30.964^\circ.$$

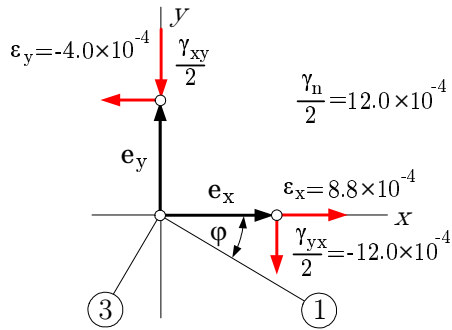
Következésképp

$$\sin \varphi = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{0.6}{\sqrt{1 + 0.36}} = 0.514496 \quad \text{és} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0.36}} = 0.857493.$$

Ezekkel az eredményekkel azonnal adódnak a keresett főteengelyek irányvektorai:

$$\mathbf{e}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_z = 0.857493 \mathbf{e}_x - 0.514496 \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{e}_3 = \sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_z = 0.514496 \mathbf{e}_x + 0.857493 \mathbf{e}_z.$$

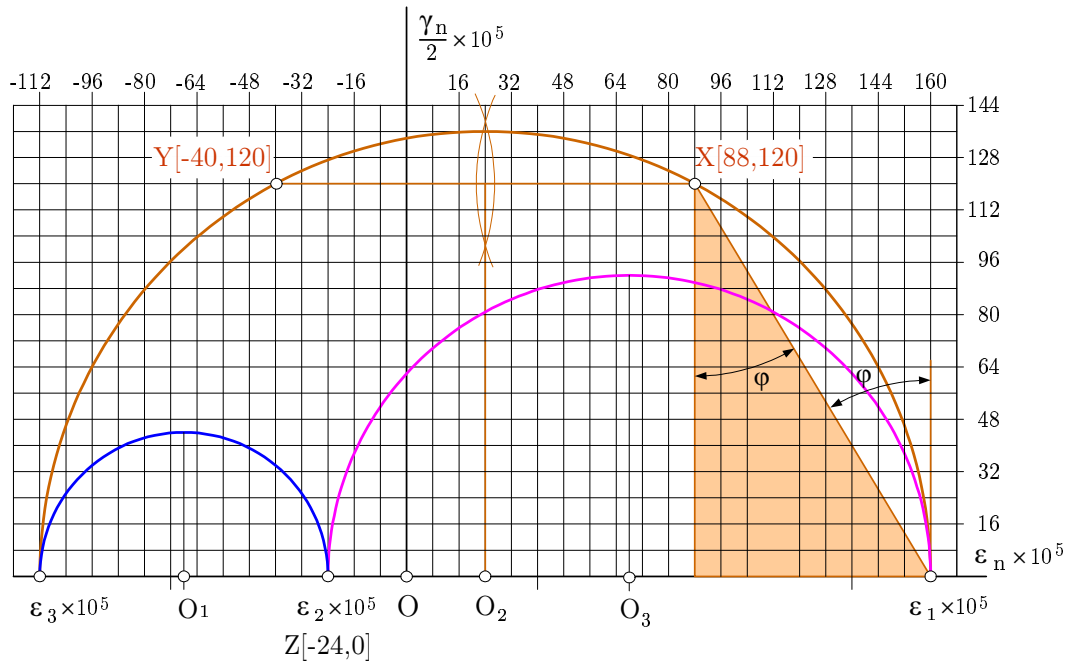


6.6. Ismertes a vizsgálat tárgyát képző test valamely P pontjában az alakváltozási tenzor mátrixa az (x, y, z) KR-ben.

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 8.8 & -12.0 & 0 \\ -12.0 & -4.0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.4 \end{bmatrix} \times 10^{-4}.$$

Határozza meg Mohr-féle alakváltozási kördiagram segítségével a főnyúlásokat és az alakváltozási főirányokat.

A megoldás során értelemszerűen követjük a 6.2.4. szakaszban közölt sémát, illetve a 6.5. Mintafeladat gondolatmenetét. Nyilvánvaló, hogy a z irány főirány. A r, p, q irányoknak tehát most rendre az z, x, y irányok felelnek meg. Első lépésként



6.25. ábra.

mindig megrajzoljuk az alakváltozási állapotot szemléltető elemi triédert az ismert főirány felől nézve, oly módon, hogy a p irány vízszintes legyen. A 6.25. ábra jobboldali felső része a pozitív z tengely, vagyis az ismert főirány felől nézve szemlélteti az elemi triéderen az α_x és α_y alakváltozási vektorokat. Leolvasható az elemi triéderről, hogy $\gamma_n/2 = 12.0 \times 10^{-4}$ MPa. Az alakváltozási kördiagramot szerkesztve első lépésben megrajzoljuk az α_x és α_y alakváltozási vektorokhoz tartozó $X[88, 120]$ és $Z[-40, 12]$ pontokat (Figyelem: az ábrán a tényleges értékek 10^5 hatvánnyal való szorzatai szerepelnek!). Az X, Y pontokat

Ugyan valamennyi érték leolvasható a kördiagramról, de a keresett mennyiségek a megszerkesztett kördiagram alapján számíthatók is. Az

sugár birtokában

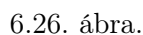
a keresett két főnyúlás. A ε_1 főnyúlás ismeretében a színezéssel kiemelt derékszögű háromszögből

Következésképp

Ezekkel az eredményekkel azonnal megkapjuk a keresett főtengelyek irányvektorait:

$$\mathbf{e}_1 = \cos \varphi \mathbf{e}_x - \sin \varphi \mathbf{e}_y = 0.640\,184 \mathbf{e}_x - 0.768\,221 \mathbf{e}_y$$

$$\mathbf{e}_3 = \sin \varphi \mathbf{e}_x + \cos \varphi \mathbf{e}_z = 0.768\,221 \mathbf{e}_x + 0.640\,184 \mathbf{e}_y.$$



6.26. ábráról leolvasható, hogy

$$\sigma_1 = 450 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = 250 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -50 \text{ MPa}.$$

6.7. Ismertes a feszültségi tenzor diadikus előállítás:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = & 250 \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \\ & + (50 \mathbf{e}_y - 200 \mathbf{e}_z) \circ \mathbf{e}_y + \\ & + (-200 \mathbf{e}_y + 350 \mathbf{e}_z) \circ \mathbf{e}_z \text{ MPa} \end{aligned}$$

Írja fel a feszültségi tenzor mátrixát, majd szerkessze meg az egyesített Mohr-féle feszültségi és alakváltozási kördiagramot, ha $G = 80 \times 10^3$ MPa és $\nu = 0.3$.

A feszültségi tenzor

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & -200 \\ 0 & -200 & 350 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

mátrixáról leolvasott adatokkal, követve a 6.5. Mintapélda lépéseit, könnyen megszerkeszthető a Mohr-féle feszültségi kördiagram. Ezért a szerkesztés lépéseit nem részletezzük. A kördiagramot szemléltető

Az 1 jelű főtengetly z tengellyel bezárt szöge:

$$\varphi_{1z} = \arctan \frac{\sigma_1 - \sigma_z}{|\tau_{yz}|} = \arctan \frac{450 - 350}{|200|} = \arctan 0.5 = 0.463\,648 \text{ radián} = 26.565^\circ.$$

A főtengetlyek KR-ét a megszokott módon az ismert főirány felől nézve szemlélteti a 6.27. ábra.

A 6.4.3. szakasz szerint a megrajzolt Mohr-féle feszültségi kördiagram Mohr-féle alakváltozási kördiagramként is szolgál, ha eltoljuk az origót az abcissa tengelyen a

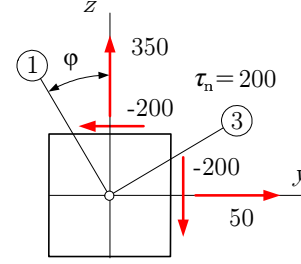
$$\frac{T_I \nu}{1 + \nu} = \frac{(250 + 50 + 350) \times 0.3}{1 + 0.3} = 150 \text{ MPa}$$

értékkel pozitív irányba, mivel $T_I \nu / (1 + \nu) > 0$. Az O_ε origójú új KR kék színű az ábrán. A vízszintes tengelyen σ_n helyett $2G\varepsilon_n$, a függőleges tengelyen pedig τ_n helyett $\gamma_n/2$ $2G$ -szerese olvasható le. Eszerint

$$2G\varepsilon_i = \sigma_i - \frac{\nu}{1 + \nu} T_I, \quad i = 1, 2, 3,$$

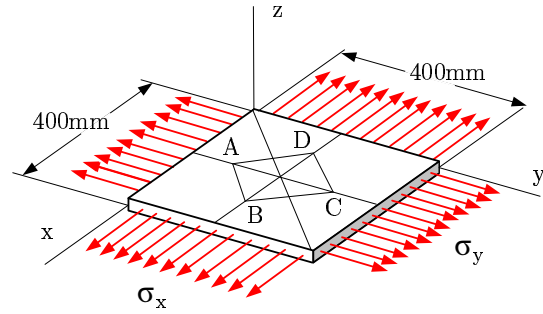
azaz

$$2G\varepsilon_1 = 300 \text{ MPa}, \quad 2G\varepsilon_2 = 100 \text{ MPa}, \quad 2G\varepsilon_3 = -200 \text{ MPa}.$$



6.27. ábra.

6.8. Az ábrán vázolt $b = 24$ mm vastag négyzet alakú alumíniumlemez felső lapjára ($G = 0.26 \times 10^5$ MPa, $\nu = 1/3$) acéltűvel négyzetet karcoltunk, oly módon, hogy az $ABCD$ négyzet átlóinak 200 mm a hossza. Az átlók egybeesnek a felső lap szimmetriatengelyeivel. A lemez oldal-lapjain a lemez síkjával párhuzamos egyenletesen megoszló ER működik. Az y tengellyel párhuzamos x normálisú oldalélen $\sigma_x = 78$ MPa, az x tengellyel párhuzamos y normálisú oldalélen pedig $\sigma_y = 130$ MPa a megoszló ER sűrűsége. (A negatív x és y normálisú oldaléleken az ER-ek ellentettjei hatnak.) A felső és alsó palástok terheletlenek. Határozza meg, hogy mennyi (a) az l_{AC} , l_{BD} átlók hosszváltozása, (b) az l_{AB} oldalél hosszváltozása, (c) a lemez b vastagságának megváltozása és (d) a lemez V térfogatának megváltozása a terhelés hatására.



6.28. ábra.

A terhelés módjából adódik, hogy homogén a lemez feszültségi állapota és, hogy

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 78 & 0 & 0 \\ 0 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

a feszültségi tenzor mátrixa. Mivel a feszültségi és alakváltozási tenzorok főirányai megegyeznek és az x , y és z tengelyek a feszültségi tenzor főtengetlyei következnek, hogy $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$. A főnyúlások pedig a (6.35) Hooke törvény alapján számíthatók:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_x - \frac{\nu}{1 + \nu} T_I \right] = \frac{1}{0.52 \times 10^5} \left(78 - \frac{1}{4} \times 208 \right) = 5.0 \times 10^{-4} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_y - \frac{\nu}{1 + \nu} T_I \right] = \frac{1}{0.52 \times 10^5} \left(130 - \frac{1}{4} \times 208 \right) = 1.5 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2G} \left[\sigma_z - \frac{\nu}{1 + \nu} T_I \right] = \frac{1}{0.52 \times 10^5} \left(0.0 - \frac{1}{4} \times 208 \right) = -1.0 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (6.67)$$

A főnyúlások birtokában

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 5.0 \times 10^{-4} + 1.5 \times 10^{-3} - 1.0 \times 10^{-3} = 0.001$$

a fajlagos térfogatváltozás. Az $\mathbf{e}_{AB} = e_{ABx} \mathbf{e}_x + e_{AB y} \mathbf{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_y$ irányvektorral pedig

$$\varepsilon_{AB} = \mathbf{e}_{AB} \cdot \underline{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{e}_{AB} = e_{ABx}^2 \varepsilon_x + e_{AB y}^2 \varepsilon_y = \frac{1}{2} (5.0 \times 10^{-4} + 1.5 \times 10^{-3}) = 0.001$$

az AB irányú fajlagos nyúlás. A kapott értékekkel

$$\lambda_{AC} = l_{AC} \varepsilon_x = 200 \times 5.0 \times 10^{-4} = 0.1 \text{ mm} ,$$

$$\lambda_{BD} = l_{BD} \varepsilon_y = 200 \times 1.5 \times 10^{-3} = 0.3 \text{ mm}$$

és

$$\lambda_{AB} = l_{AB} \varepsilon_{AB} = \sqrt{100^2 + 100^2} \times 0.001 = 0.141421 \text{ mm}$$

a hosszváltozások,

$$\lambda_b = b \varepsilon_z = 24 \times -1.0 \times 10^{-3} = -0.024 \text{ mm}$$

a vastagság megváltozása és

$$\lambda_V = V \varepsilon_V = 400 \times 400 \times 24 \times 0.001 = 3.84 \times 10^3 \text{ mm}^3$$

a térfogatváltozás.

Gyakorlatok

6.1. Igazolja, hogy zérus térfogati terhelés estén egyensúlyi a

$$\sigma_x = 2GA \left[\frac{y^2 + z^2}{r^3(r+z)} - \frac{x^2}{r^2(r+z)^2} \right] , \quad \sigma_x = 2GA \left[\frac{x^2 + z^2}{r^3(r+z)} - \frac{y^2}{r^2(r+z)^2} \right] , \quad \sigma_z = -2GA \frac{z}{r^3} ,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -2GA \frac{xy(z+2r)}{r^3(r+z)^2} , \quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -2GA \frac{x}{r^3} , \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -2GA \frac{y}{r^3}$$

feszültségmező. A képletekben A állandó és $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

6.2. A vizsgálat tárgyát képző test adott P pontjában

$$\underline{\mathbf{T}}_P = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad \text{és} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_z$$

a feszültségi tenzor mátrixa és egy a tekintett pontra illeszkedő felületelem normális egységvektora. Határozza meg a Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram segítségével szerkesztéssel, majd ezt követően számítással a σ_n és τ_n feszültségek értékét.

6.3. Ismertes a vizsgálat tárgyát képző test valamely P pontjában a feszültségi tenzor mátrixa és egy a tekintett pontra illeszkedő felületelem normális egységvektora:

$$\underline{\mathbf{T}}_P = \begin{bmatrix} 58.4 & 0.0 & -28.8 \\ 0.0 & -40.0 & 0.0 \\ -28.8 & 0.0 & 41.6 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad \text{és} \quad \mathbf{n} = 0.7 \mathbf{e}_x + 0.1 \mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_z .$$

Határozza meg (a) a Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram segítségével szerkesztéssel a főfeszültségeket és a főirányokat, illetve a σ_n és τ_n feszültségeket és (b) az utóbbi két értéket, ellenőrzés céljából, számítsa is ki. (Érdemes az $\mathbf{n}$ vektort a főtengelek KR-ébe transzformálni az N pont szerkesztése előtt.)

6.4. Határozza meg az alábbi, az (x, y, z) KR-ben mátrixaikkal adott feszültségi tenzorok esetén: (a) a Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram megszerkesztése alapján a főfeszültségeket, (b) a főtengelek KR-ét a főirányok elemi kockán történő bejelölésével, és (c) a főirányok irányvektorait.

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \\ 0 & -30 & 32 \end{bmatrix} [\text{MPa}] , \quad \underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 70 & 40 & 0 \\ 40 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix} [\text{MPa}] ,$$

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 44 & 0 & 60 \\ 0 & -12 & 0 \\ 60 & 0 & -20 \end{bmatrix} [\text{MPa}] , \quad \underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -48 \\ 0 & 112 & 0 \\ -48 & 0 & 32 \end{bmatrix} [\text{MPa}] .$$

6.5. A vizsgálat tárgyát képző test adott P pontjában

$$\underline{\mathbf{A}}_P = \begin{bmatrix} 10.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -2.0 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad \text{és} \quad \mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathbf{e}_x + \frac{1}{2} \mathbf{e}_y + \frac{1}{2} \mathbf{e}_z$$

az alakváltozási tenzor mátrixa és egy a tekintett ponthoz kötött irányvektor. Határozza meg a Mohr-féle teljes alakváltozási kördiagram segítségével szerkesztéssel és ezt követően számítással az ε_n és $\gamma_n/2$ alakváltozások értékét.

6.6. Határozza meg az alábbi, az (x, y, z) KR-ben mátrixaikkal adott alakváltozási tenzorok esetén: (a) a Mohr-féle teljes alakváltozási kördiagram megszerkesztése alapján a főnyúlásokat, (b) a főtengelek

KR-ét a főirányok elemi tiéderen történő bejelölésével, (c) az ismeretlen főirányok irányvektorait, és (b) a főfeszültségeket az általános Hooke törvény felhasználásával, ha $E = 2 \times 10^5$ MPa és $\nu = 0.25$.

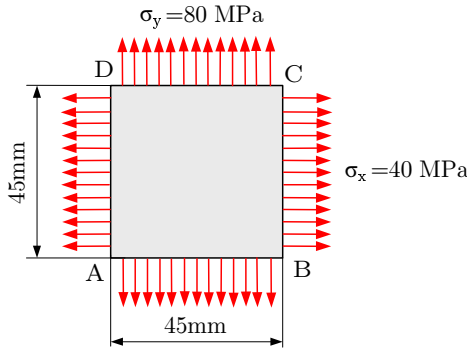
$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -12.0 & -30.0 & 0.0 \\ -30.0 & 20.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 60.0 \end{bmatrix} \times 10^{-5}, \quad \underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 32.0 & 0.0 & 20.0 \\ 0.0 & -36.0 & 0.0 \\ 20.0 & 0.0 & 2.0 \end{bmatrix} \times 10^{-5},$$

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 5.6 & 0.0 & 6.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 6.0 & 0.0 & -0.8 \end{bmatrix} \times 10^{-3}, \quad \underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -20.0 & 0.0 & -48.0 \\ 0.0 & -98.0 & 0.0 \\ -48.0 & 0.0 & 20.0 \end{bmatrix} \times 10^{-4}.$$

6.7. Szerkessze meg az egyesített Mohr-féle feszültségi és alakváltozási kördiagramot a 6.4. Gyakorlat feszültségtenzorai esetén, ha $G = 0.8 \times 10^2$ és $\nu = 1/3$. Számítsa ki a kördiagram felhasználásával a főnyúlásokat és ezek ismeretében a fajlagos térfogatváltozást.

6.8. Szerkessze meg az egyesített Mohr-féle alakváltozási és feszültségi kördiagramot a 6.6. Gyakorlat alakváltozási tenzorai esetén. Számítsa ki a kördiagram felhasználásával a főfeszültségeket.

6.9. Szerkessze meg az egyesített Mohr-féle alakváltozási és feszültségi kördiagramot a 6.6. Gyakorlat alakváltozási tenzorai esetén. Számítsa ki a kördiagram felhasználásával a főfeszültségeket.



6.29. ábra.

6.10. Nyomástartó edény oldalára terheletlen állapotban acéltűvel $40 \times 40 \text{ mm}^2$ nagyságú négyzetet karcoltunk. Miután a nyomás elérte a tartós üzemi értéket az ábrán vázolt kéttengelyű feszültségi állapot alakult ki a négyzetben. Számítsa ki az AB és BC oldalélek, valamint az AC átló hosszváltozását, ha $G = 0.8 \times 10^5$ MPa és $\nu = 1/3$ (vagyis acélból készült a tartály).

6.11. Mutassa meg, hogy HKR-ben

$$u = \frac{1}{2} \mathbf{T} \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{2} (\sigma_R \varepsilon_R + \sigma_\varphi \varepsilon_\varphi + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{R\varphi} \gamma_{R\varphi} + \tau_{\varphi z} \gamma_{\varphi z} + \tau_{zR} \gamma_{zR}) . \quad (6.68)$$

a fajlagos alakváltozási energia.

6.12. Igazolja, hogy HKR-ben

$$u = \frac{1}{4G} \left[\sigma_R^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_z^2 - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_R + \sigma_\varphi + \sigma_z)^2 + 2 (\tau_{R\varphi}^2 + \tau_{\varphi z}^2 + \tau_{zR}^2) \right] \quad (6.69)$$

a fajlagos alakváltozási energia a feszültség-koordinátákkal kifejezve.

6.13.* Mutassa meg, hogy az alakváltozási tenzor ismeretében a

$$u = \frac{1}{4G} \left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)^2 + \frac{1}{2} (\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2) \right] \quad (6.70)$$

módon számítható a fajlagos alakváltozási energia.

6.14.* Igazolja az előző képlet felhasználásával, hogy csak akkor pozitív a fajlagos alakváltozási energia, ha teljesülnek a $G > 0$ és $0 \leq \nu < 0.5$ egyenlőtlenségek. Miben áll a két egyenlőtlenség jelentősége?

6.15.* Mutassa meg, hogy homogén izotróp testek esetén a G/E hányados eleget tesz az $1/3 < G/E < 1/2$ egyenlőtlenségnek.

6.16.* Igazolja, kiindulva a fajlagos alakváltozási energia (6.70) alatti képletéből, hogy a

$$\sigma_n = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_n}, \quad \text{és} \quad \tau_{mn} = \frac{\partial u}{\partial \gamma_{mn}/2}$$

deriváltak – $m, n = x, y, z$, $m \neq n$ – az általános Hooke törvény skaláregyenleteit adják vissza. Mi lehet ennek az eredménynek a jelentősége?