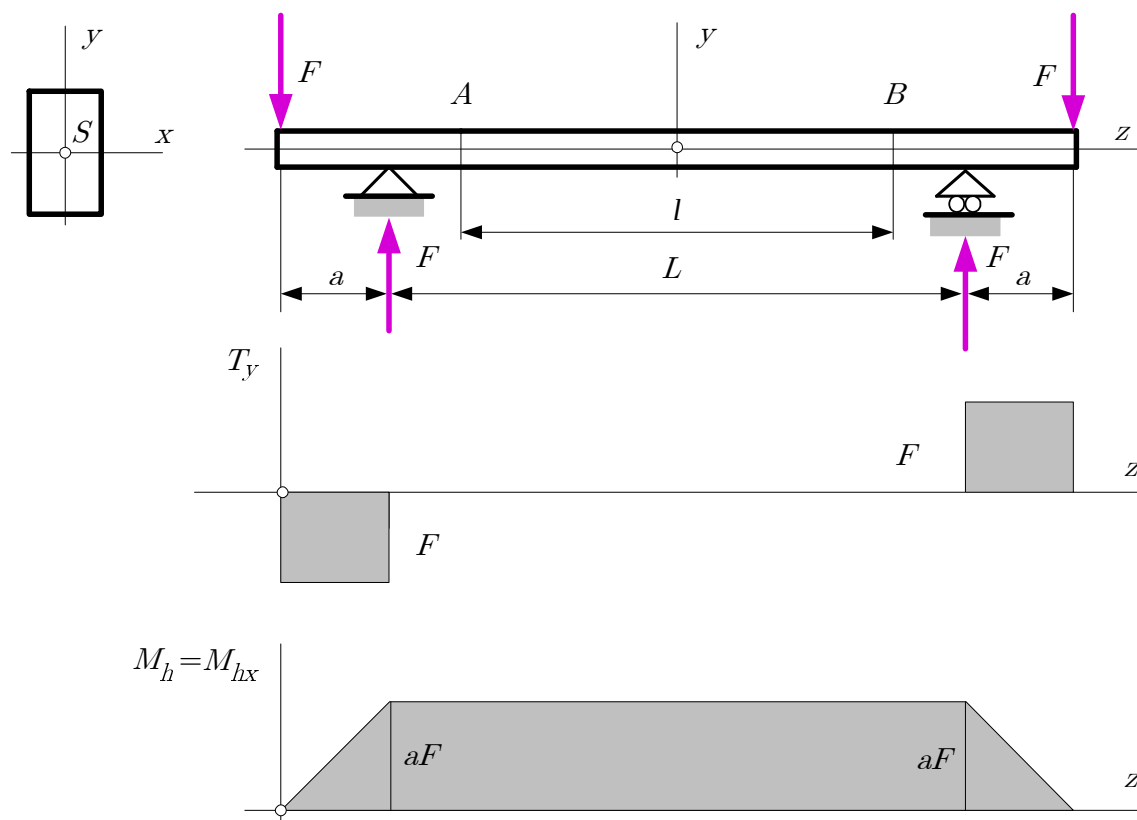


A szilárdságtan alapkísérletei III. Tiszta hajlítás

5.1. Egyenes prizmatikus rúd tiszta egyenes hajlítása

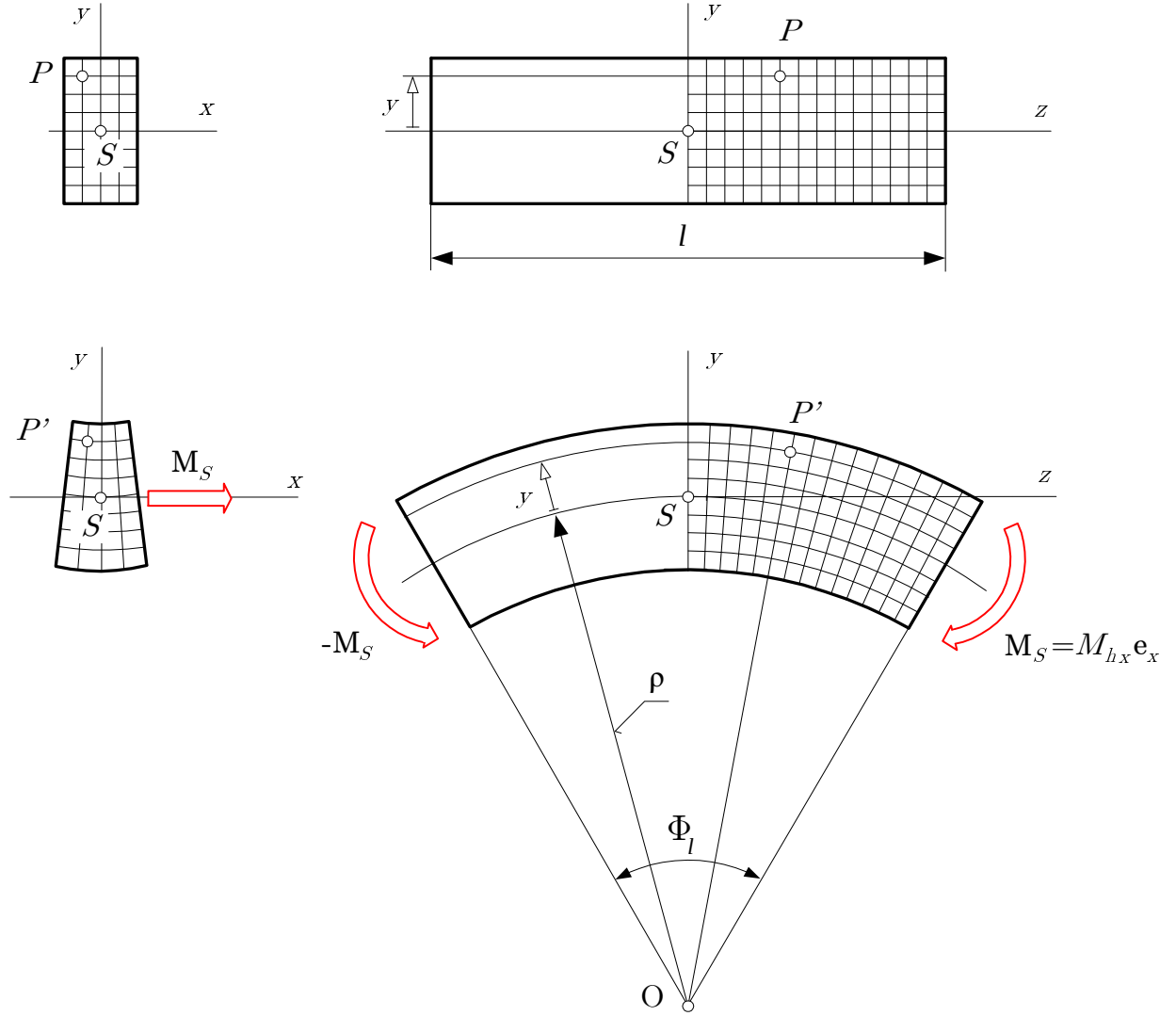
5.1.1. Bevezető megjegyzések. Tiszta hajlításról beszélünk, ha a rúd egy adott szakasza csak hajlításra van igénybe véve. Másként fogalmazva, ha az adott szakaszon belül a rúd minden egyes keresztmetszetének egyetlen, a keresztmetszet síkjában fekvő hajlítónyomaték az igénybevétele. A jelen 5.1. szakasz célja tiszta egyenes hajlításnak¹ kitett prizmatikus rúd alakváltozási és feszültségi állapotának a tisztázása. A kezdetben feltételezzük, hogy a rúdnak van szimmetriasíkja, amely egybeesik a KR yz síkjával. Magát a KR-t a megszokott módon vesszük fel, azaz a vízszintes z tengely a rúd hossz tengelye, az y tengely pedig felfelé mutat. A tiszta hajlítás feladatával összefüggésben szó esik a keresztmetszetek másodrendű nyomatékairól is.

5.1.2. Tiszta egyenes hajlításra igénybevett rúd szilárdságtani állapota. Az 5.1. ábra egy téglalapkeresztmetszetű rudat, a rúd terhelését, valamint a rúd T_y nyíróerő és M_{hx} nyomatéki ábráját szemlélteti. Leolvasható az igénybevételi ábrákról, hogy a rúd két támasz közötti szakaszának tiszta hajlítás az igénybevétele. Tegyük fel, hogy a rúd A és B keresztmetszetei



5.1. ábra.

¹Az egyenes jelző jelentését az (5.16) képletet követő második bekezdésben – v.ö.: 130. o. – tisztázzuk.



5.2. ábra.

elegendő távolságra vannak a támaszoktól ahhoz, hogy ne legyen hatással a két támasz – összhangban a Saint Venant elvvel – az AB rúdszakasz szilárdságtani állapotára.

A továbbiakban az AB rúdszakasz a vizsgálatok tárgya.

A vizsgálatok megkönnyítése érdekében az xy , xz és yz koordinátesíkokkal párhuzamos síksorok segítségével elemi kockákra bontjuk fel gondolatban az AB rúdszakaszt. Az 5.2. ábra a rúdszakasz jobboldalára nézve szemlélteti a tényleges viszonyokat érzékeltető erős nagyításban a felosztást mind az alakváltozás előtti, mind pedig az alakváltozás utáni állapotra nézve.

Az alakváltozási viszonyokat illetően az alábbiakat figyelhetjük meg:

1. A terhelés előtt z tengellyel párhuzamos anyagi vonalak (egyenesek) körívekké görbülnek. A terhelés előtt azonos y koordinátájú anyagi vonalaknak azonos a görbületi sugara az alakváltozás után. A felső anyagi vonalak megnyúlnak, az alsó anyagi vonalak megrövidülnek, az alakváltozás előtt $y = 0$ koordinátájú anyagi vonalak hossza azonban változatlan marad.
2. A terhelés előtt x tengellyel párhuzamos anyagi vonalak (egyenesek) is körívekké görbülnek. Figyeljük meg – baloldali ábrarészlet –, hogy a terhelés előtt azonos y koordinátájú anyagi vonalaknak is azonos a görbületi sugara az alakváltozás után. A felső anyagi vonalak megrövidülnek, az alsó anyagi vonalak megnyúlnak, az alakváltozás előtt $y = 0$

koordinátájú anyagi vonalak hossza pedig változatlan marad. Az y tengellyel párhuzamos anyagi vonalak egyenesek maradnak az alakváltozás során, de elfordulnak. Az x és y tengelyekkel párhuzamos anyagi vonalak által alkotott háló ortogonális marad.

3. Az xy síkkal párhuzamos síkok olyan síkok maradnak, melyeknek az O ponton átmenő és az x tengellyel párhuzamos egyenes a közös tartóegyenese. Az ábra a véglapok és a P pont esetén feltünteteti ezeket az élben látszó síkokat. Jól látszik az ábrán, hogy a keresztmetszetek úgy fordulnak el az x irány körül, hogy a körívekké görbült z irányú szájakra minden pontban merőlegesek maradnak.
4. Az eredetileg kockákból felépülő hálóból, összhangban a fentebb mondottakkal, új ortogonális háló jön létre.

Az alakváltozási viszonyok tekintetében abból a körülményből, hogy a háló ortogonális marad azonnal következik, hogy zérus értékűek a szögtorzulások:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0. \quad (5.1)$$

Ami a fajlagos nyúlásokat illeti a mérési megfigyelések szerint a z tengelyre merőleges (keresztirányú), $\varepsilon_k = \varepsilon_x = \varepsilon_y$ fajlagos nyúlások és a z tengellyel párhuzamos (hosszirányú) ε_z fajlagos nyúlás között az első alapkísérlet kapcsán már szereplő – v.ö.: (3.6) – összefüggés áll fenn:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z \quad (5.2)$$

A fentiek szerint, ellentétben az első alapkísérlet során vizsgált húzás (nyomás) esetével, nem homogén az alakváltozási állapot, hanem függ a helytől az alakváltozási tenzor, hiszen pl. pozitív y esetén pozitív az ε_z , negatív y esetén pedig negatív az ε_z .

További megfigyelés, hogy az adott y koordinátájú a terhelés előtt a z -vel párhuzamos hosszirányú szál minden egyes pontjában azonos az ε_z fajlagos nyúlás. A viszonyok tisztázása érdekében számítsuk ki ezt az értéket. Az alakváltozás után, amint az jól leolvasható az ábráról, $(\rho + y)\Phi_l$ az $y = 0$ koordinátájú hosszirányú szál mérete, ahol ρ az $y = 0$ szál görbületi sugara az alakváltozás előtti méret pedig

$$l = \rho\Phi_l \quad (5.3)$$

hiszen nincs hosszváltozás, ha az $y = 0$. Következésképp

$$\varepsilon_z = \frac{(\rho + y)\Phi_l - l}{l} = \frac{(\rho + y)\Phi_l - \rho\Phi_l}{\rho\Phi_l},$$

ahonnan

$$\boxed{\varepsilon_z = \frac{y}{\rho}}. \quad (5.4)$$

Az (5.1), (5.2) és (5.4) képletek alapján

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad (5.5a)$$

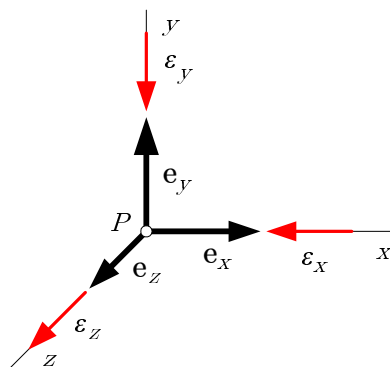
$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z = -\nu\frac{y}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{y}{\rho} \quad (5.5b)$$

az alakváltozási tenzor mátrixa. A teljesség kedvéért diadikus alakban is felírjuk az alakváltozási tenzort:

$$\mathbf{A} = \varepsilon_x \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \varepsilon_y \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y + \varepsilon_z \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z. \quad (5.5c)$$

Mivel valamennyi szögtorzulás zérus a rúd minden egyes pontjában párhuzamosak az alakváltozási tenzor főtengelei a választott KR x , y és z koordináta tengelyeivel. Vegyük azt is észre, hogy a fajlagos nyúlások az y koordináta lineáris függvényei. Ebből a függvénykapcsolatból következik, hogy $y = 0$ esetén, azaz az un. semleges rétegben, zérus az alakváltozási tenzor.

Az alakváltozási tenzort azzal a feltevessel szemlélteti fentiek alapján az 5.3. ábra az elemi triéderen, hogy pozitív az y koordináta, azaz pozitív az ε_z is.



5.3. ábra.

Nyilvánvaló, hogy a fajlagos nyúlások képleteiben szereplő ρ görbületi sugár az M_{hx} nyomaték függvénye, hiszen a nagyobb nyomaték jobban meggömbösi az AB rúdszakaszt. A függvénykapcsolat jellegét a feszültségek ismeretében tisztázzuk majd.

Ami a feszültségek számítását illeti abból kell kiindulni, hogy a (3.18) egyenlet szerint fennáll a

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1+\nu}{E} \underline{\mathbf{T}} - \nu \varepsilon_z \underline{\mathbf{E}}$$

összefüggés, ahonnan

$$\underline{\mathbf{T}} = \frac{E}{1+\nu} \underline{\mathbf{A}} + \frac{\nu E}{1+\nu} \varepsilon_z \underline{\mathbf{E}}.$$

Az utóbbi egyenletből, az (5.5a,b) képletek helyettesítésével, a

$$\underline{\mathbf{T}} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} -\nu \frac{y}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{y}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y}{\rho} \end{bmatrix} + \frac{\nu E}{1+\nu} \frac{y}{\rho} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\nu) \frac{y}{\rho} \end{bmatrix},$$

vagy ami ugyanaz, a

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E \frac{y}{\rho} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

eredmény következik. Skalár alakban írva

$$\sigma_z = E \varepsilon_z = E \frac{y}{\rho} \quad (5.7a)$$

és

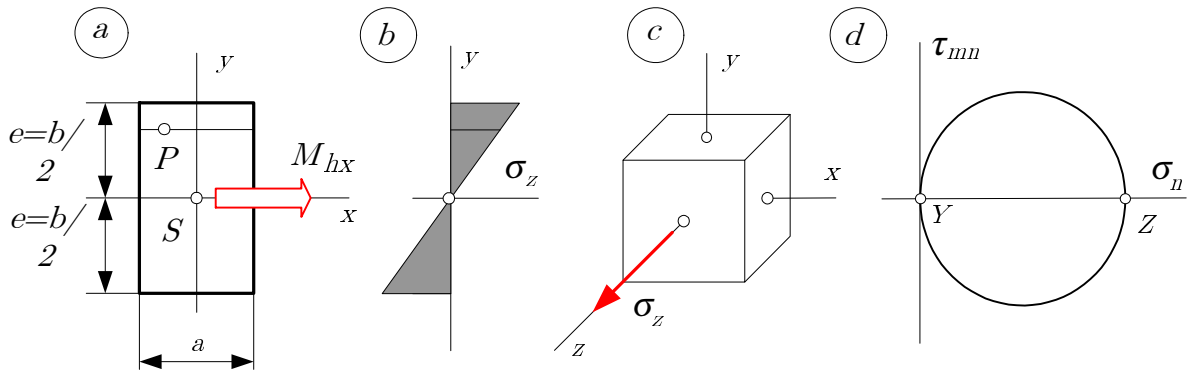
$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (5.7b)$$

a feszültségek értéke. Diádokkal írva

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\rho}_z \circ \underline{\mathbf{e}}_z = \underbrace{\sigma_z \underline{\mathbf{e}}_z}_{\underline{\rho}_z} \circ \underline{\mathbf{e}}_z \quad (5.8)$$

a feszültségi tenzor. Nyilvánvaló fentiek alapján, hogy a rúd bármely pontjában a feszültségi tenzor egy főirányhármását adják az x , y és z koordináta-tengelyekkel párhuzamos egyenesek. Maga a feszültségi állapot egytengelyű.

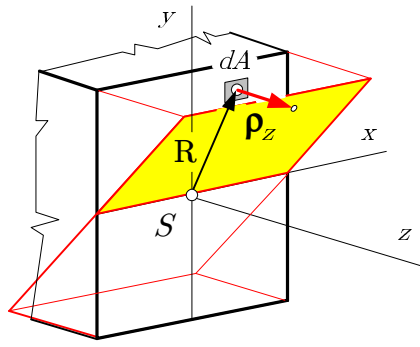
A tetszőleges P pont keresztmetszetét igénybevételével együtt az 5.4.(a) ábra, a $\sigma_z(x, y) = \sigma_z(y)$ lineáris feszültség eloszlást pedig az 5.4.(b) ábra szemlélteti. Az ábra feltünteteti emellett a P pont feszültségi állapotát szemléltető elemi kockát, valamint a Mohr-féle részleges feszültségi kördiagramot is.



5.4. ábra.

Összhangban a fentiekkel a rúd bármely pozitív, azaz $\underline{\mathbf{e}}_z$ normálisú keresztmetszetén

$$\underline{\rho}_z = \sigma_z \underline{\mathbf{e}}_z = E \frac{y}{\rho} \underline{\mathbf{e}}_z \quad (5.9)$$



5.5. ábra.

a feszültségvektor. A keresztmetszet azon egyenesét, ahol zérus értékű a feszültségvektor (ez a $\sigma_z(x, y)$ felület és a keresztmetszet síkjának metszésvonala) *semleges tengelynek*, vagy *zérusvonalnak* nevezzük. A jelen esetben ez az x tengellyel esik egybe.

Az 5.5. ábra a rúd egy A keresztmetszetén megoszló ρ_z belső erőrendszert és a zérusvonalat axonometrikus képen szemlélteti.

Mivel a keresztmetszeten megoszló ρ_z belső erőrendszer keresztmetszet S súlypontjába redukált $[\mathbf{F}_S, \mathbf{M}_S]$ redukált vektorkettőse egyetlen $M_{hx}\mathbf{e}_x$ erőpárral kell, hogy legyen egyenértékű fenn kell állnia az 5.5. ábra alapján írható

$$\mathbf{F}_S = \int_A \rho_z dA = 0, \quad \mathbf{M}_S = \int_A \mathbf{R} \times \rho_z dA = M_{hx}\mathbf{e}_x \quad (5.10)$$

egyenleteknek. Az (5.9) képlet helyettesítésével az (5.10)₁ egyenletben álló integrálra, az eredőre, valóban a kívánt

$$\mathbf{F}_S = \int_A \rho_z dA = \frac{E}{\rho} \underbrace{\int_A y dA}_{S_x} \mathbf{e}_z = 0 \quad (5.11)$$

eredmény adódik, hiszen a megjelölt képletrész a keresztmetszet x súlyponti tengelyére vett S_x statikai nyomatéka és az azonosan zérus. Az $\mathbf{F}_S$ eredő zérus volta a magyarázata annak, hogy a keresztmetszetek geometriai középpontjait (súlypontjait) összekötő középvonal (a súlyponti szál) nem változtatja meg a hosszát a hajlítás során.

Az (5.9) képlet és a helyvektort adó $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ összefüggés helyettesítésével az (5.10)₂ egyenletben álló integrál, az eredő nyomaték, az alábbiak szerint alakítható tovább:

$$\mathbf{M}_S = \int_A \mathbf{R} \times \rho_z dA = \frac{E}{\rho} \int_A (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) \times y\mathbf{e}_z dA = \frac{E}{\rho} \left[\underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} \mathbf{e}_x - \underbrace{\int_A xy dA}_{I_{xy}} \mathbf{e}_y \right] \quad (5.12)$$

A fenti egyenletben megjelölt első képletrész az A keresztmetszet x súlyponti *tengelyre* számított (vett) *másodrendű nyomatékát* értelmezi:

$$I_x = \int_A y^2 dA > 0. \quad (5.13a)$$

Mivel az integrandusz mindig pozitív az x tengelyre számított másodrendű nyomaték is csak pozitív mennyiség lehet. Az (5.12) egyenlet második megjelölt képletrésze az A keresztmetszet $x - y$ súlyponti *tengelypárra* számított (vett) *másodrendű nyomatékát* – más elnevezés szerint a *vegyes másodrendű nyomatékot* – értelmezi:

$$I_{xy} = \int_A xy dA. \quad (5.13b)$$

Ez a mennyiség pozitív, nulla és negatív egyaránt lehet. Vegyük észre, hogy a fentiekben definiált másodrendű nyomatékok csak a keresztmetszet geometriai jellemzőitől – annak alakjától és méreteitől – függenek. A jelen esetben, amint azt az 5.4. Mintafeladatban is megmutatjuk majd – lásd a 145. o. –, zérus a vegyes másodrendű nyomaték, mivel az y tengely szimmetriatengely. Ennek figyelembevételével vetve egybe az (5.10)₂ és az (5.12) képleteket kapjuk, hogy

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_{hx}}{I_x E}. \quad (5.14)$$

Az utóbbi egyenlet a keresett kapcsolat a κ görbület, a ρ görbületi sugár és az M_{hx} hajlítónyomaték között. A kapott eredmény (5.4) és (5.7a) képletekbe történő helyettesítésével az ε_z fajlagos

nyúlás és a σ_z normálfeszültség az M_{hx} hajlítónyomatékkal fejezhető ki:

$$\varepsilon_z = \frac{M_{hx}}{I_x E} y, \quad \sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y. \quad (5.15)$$

A most felírt összefüggéseknek az a jelentősége, hogy numerikus összefüggéseket adnak a rudat terhelő M_{hx} hajlítónyomaték, a rúd anyagára jellemző E rugalmassági modulus, a rúd keresztmetszetének geometriai adataitól függő I_x , a ρ görbületi sugár, az ε_z fajlagos nyúlás, valamint a σ_z feszültség között.

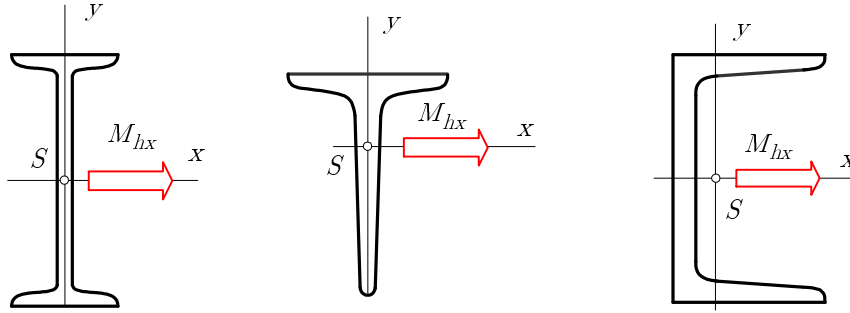
Bár nem mutatjuk meg formálisan, de az eddigi gondolatmenet és a vonatkozó képletek akkor is érvényesek maradnak, ha negatív az M_{hx} hajlítónyomaték.

Továbbmenve a kapott képletek a prizmatikus rudakra nézve akkor is igazak maradnak, ha

- ha a rúd nem téglalap keresztmetszetű,
- zérus értékű a vegyes másodrendű nyomaték, azaz fennáll az $I_{xy} = 0$ egyenlet (pl. az y vagy x tengely szimmetriatengely)
- $\mathbf{M}_S = M_{hx} \mathbf{e}_x$ a rúd igénybevétele (tiszta hajlítás esete forog fenn).

A későbbiekben igazoljuk, hogy nem szimmetrikus keresztmetszetek esetén is mindig található olyan súlyponthoz kötött egymásra kölcsönösen merőleges x , y tengelypár melyre nézve $I_{xy} = 0$. Ezeket a tengelyeket *tehetetlenségi főtengetyeknek* fogjuk nevezni.

Az 5.6. ábra olyan keresztmetszeteket szemléltet, melyekre nézve főtengetyek az x , y súlyponti tengelyek.



5.6. ábra.

A keresztmetszeten megoszló belső erőrendszer keresztmetszet S súlypontjára számított

$$\mathbf{M}_S = \underbrace{M_{hx} \mathbf{e}_x + M_{hy} \mathbf{e}_y}_{\mathbf{M}_{hS}} + M_c \mathbf{e}_z \quad (5.16)$$

nyomatékának a keresztmetszet síkjába eső és a fenti képletben külön is megjelölt $\mathbf{M}_{hS}$ része a hajlítónyomaték-vektor.

Egyenes hajlításról beszélünk akkor, ha a hajlítónyomaték vektor párhuzamos a keresztmetszet egyik súlyponti tehetetlenségi főtengetyével.

Ha nem párhuzamos a hajlítónyomaték vektor a keresztmetszet valamelyik súlyponti tehetetlenségi főtengetyével, akkor a hajlítást *ferde hajlításnak* nevezzük.

Nyilvánvaló az eddigiek alapján, hogy tiszta hajlítás esetén érvényesek és használhatók az (5.4), (5.5a,b), (5.6), (5.7a,b) (5.14) és (5.15) képletek, feltéve hogy a hajlítónyomaték $\mathbf{M}_{hS} = M_{hx} \mathbf{e}_x$ alakú, az x tengely tehetetlenségi főtengety a rúd pedig prizmatikus.

Az (5.15)₂ képlet szerint pozitív M_{hx} esetén a felső szélső száliban ébred a legnagyobb pozitív normálfeszültség (húzófeszültség) és az alsó szélső száliban kapjuk a legnagyobb abszolút értékű negatív normálfeszültséget (a legnagyobb nyomófeszültséget). Negatív M_{hx} esetén a viszonyok fordítottak, a felső szélső száliban negatív, az alsó szélső száliban pedig pozitív σ_z ébred.

Ha megszorozzuk a görbületet adó (5.14) képletet a rúd l hosszával és figyelembe vesszük az (5.3) összefüggést, akkor az AB rúdszakasz véglapjainak (szélső keresztmetszeteinek) egymáshoz viszonyított

$$\Phi_l = \frac{l}{\rho} = \frac{M_{hx}l}{I_x E} \quad (5.17)$$

szögelfordulását kapjuk.

A tiszta hajlításra igénybe vett AB rúdszakasz alakváltozási energiáját a (3.25) alapján felírt

$$u = \frac{1}{2} \frac{\sigma_z^2}{E}$$

fajlagos alakváltozási energia rúdszakasz V térfogatán vett integrálja adja, ha helyettesítjük a σ_z -t adó (5.15)₂ összefüggést:

$$U = \int_V u \, dV = \frac{1}{2} \int_l \int_A \frac{\sigma_z^2}{E} \, dA \, dz = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_{hx}^2}{I_x^2 E} \int_A y^2 \, dA \, dz.$$

Az I_x (5.13a) alatti értelmezését is helyettesítve

$$U = \frac{1}{2} \int_l \frac{M_{hx}^2}{I_x E} \, dz \quad (5.18)$$

az eredmény. Tovább egyszerűsödik a fenti képlet, ha figyelembe vesszük, hogy állandó az M_{hx} hajlítónyomaték:

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_{hx}^2 l}{I_x E}. \quad (5.19)$$

A fenti összefüggés egyúttal, összhangban a (2.96) és (5.17) képletekkel, az AB rúdszakaszra működő M_{hx} hajlítónyomaték W_K munkája a hajlítónyomaték hatására bekövetkező Φ_l szögelfordulás során:

$$U = W_K = \frac{1}{2} M_{hx} \Phi_l.$$

5.1.3. Ellenőrzés, méretezés. Az alábbiak a tiszta hajlításra igénybevett rúd feszültségcsúcsra történő ellenőrzésének és méretezésének kérdéseit tekintik át. A $\sigma_{\max}$ feszültséget a

$$\sigma_{\max} = \max |\sigma_z| \quad (5.20)$$

módon értelmezzük az A keresztmetszeten. Ha az anyag egyformán viselkedik húzásra és nyomásra, akkor azt fogjuk megkövetelni, hogy ez az érték előírt korlát alatt maradjon. Ha az anyag nem viselkedik egyformán a húzásra és nyomásra, akkor a húzófeszültségek és a nyomófeszültségek maximumai külön-külön előírt korlátok alatt kell, hogy legyenek. A jelen esetben ez a követelmény az úgynevezett feszültségcsúcsra történő ellenőrzés illetve méretezés alapja.

Ha egyforma a szélső szálak távolsága az x tengelytől a húzott illetve nyomott oldalakon, – ezt az esetet az 5.7. ábra az 5.6. ábrán is megrajzolt x tengelyre szimmetrikus I szelvénnel szemlélteti –, akkor

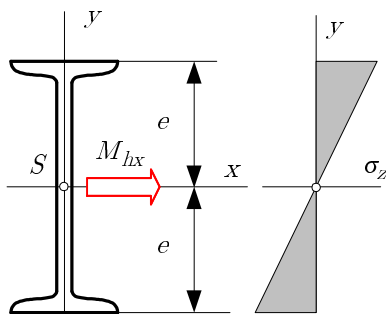
$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e = \frac{|M_{hx}|}{\frac{I_x}{e}} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}, \quad (5.21)$$

ahol

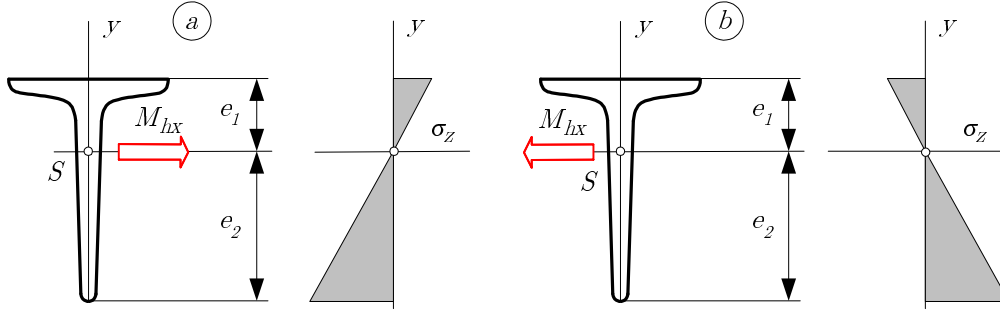
$$K_x = \frac{I_x}{e} \quad (5.22)$$

az x tengelyre vonatkozó *keresztmetszeti tényező*.

Ha nem egyforma a szélső szálak távolsága az x tengelytől a húzott illetve nyomott oldalakon, – ezt az esetet az 5.8. ábra az 5.6. ábrán is megrajzolt T szelvénnel szemlélteti –, akkor két keresztmetszeti té-



5.7. ábra.



5.8. ábra.

nyezőt érdemes bevezetni. Jelölje, összhangban az ábrával, e_1 és e_2 a szélső szálak x tengelytől mért távolságát. Az (5.22) képlet alapján a két keresztmetszeti tényezőt a

$$K_1 = \frac{I_x}{e_1}, \quad \text{valamint a} \quad K_2 = \frac{I_x}{e_2}$$

képletek értelmezik. A fenti adatokkal a

$$K_x = K_{\min} = \min(K_1, K_2). \quad (5.23)$$

képlet értelmezi K_x -et.

Tegyük fel egyelőre, hogy *egyformán viselkedik az anyag a húzásra és nyomásra*.

Felhasználva a keresztmetszeti tényező fogalmát – ha azonos a szélső szálak x tengelytől mért távolsága, akkor az (5.22), ha nem azonos, akkor pedig az (5.23) képlettel kell dolgozni – írhatjuk, hogy

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}. \quad (5.24)$$

Következőleg *ellenőrzés esetén* – hivatkozva ehelyütt a 3.2.7. szakaszra a σ_{jell} feszültség és az n előírt biztonsági tényező fogalmát illetően – a

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x} \leq \sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{n} \quad (5.25)$$

relációnak kell fennállnia.

Legyen

$$K_{sz} = \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\text{meg}}} \quad (5.26)$$

a *szükséges* keresztmetszeti tényező.

Következőleg *méretezés esetén* az (5.25) és az (5.26) összefüggések egybevetése alsó korlátot ad a keresztmetszeti tényezőre:

$$K_x \geq K_{sz} = \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\text{meg}}} \quad (5.27)$$

Érdemes hangsúlyozni, hogy ez a szükséges (minimális) keresztmetszeti tényező csak akkor határozza meg egyértelműen a keresztmetszet alakját, ha a választott alak csak egy geometriai paraméter (méret) függvénye (pl. körkeresztmetszet). Ha a választott alak több geometriai paraméter (méret) függvénye, akkor további szempontok is figyelembe vehetők a keresztmetszet méreteinek megválasztása során.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy *nem viselkedik egyformán az anyag a húzásra és nyomásra*.

Legyen $\sigma_{\text{meg}}^{\text{húzás}}$ és $\sigma_{\text{meg}}^{\text{nyomás}}$ rendre a húzó-, illetve nyomófeszültségre vonatkozó megengedett feszültség. Megjegyezzük, hogy a rideg anyagok – ilyen pl. az öntöttvas, vagy pedig a beton – nyomásra lényegesen nagyobb feszültséget képesek maradó károsodás nélkül elviselni. Ebből adódóan ezen anyagok esetén fennáll a $\sigma_{\text{meg}}^{\text{húzás}} \leq \sigma_{\text{meg}}^{\text{nyomás}}$ reláció.

Legyen továbbá $\sigma_{\max}^{\text{húzás}}$ és $\sigma_{\max}^{\text{nyomás}}$ rendre a maximális húzó-, illetve nyomófeszültség.

Ha azonos a szélső szálak x tengelytől mért távolsága, akkor megegyezik egymással ez a két érték, azaz fennáll a $\sigma_{\max \text{ húzás}} = \sigma_{\max \text{ nyomás}} = \sigma_{\max}$ reláció.

Ha nem azonos a két szélső szál x tengelytől mért távolsága, akkor a nyomaték előjelét is figyelembe véve – ez dönti ugyanis el melyik a húzott és melyik a nyomott oldal – kell számítani a $\sigma_{\max \text{ húzás}}$ és $\sigma_{\max \text{ nyomás}}$ feszültségek értékét. Így például ha pozitív az M_{hx} , azaz az 5.8.(a) ábrán vázolt esetben

$$\sigma_{\max \text{ húzás}} = \frac{M_{hx}}{I_x} e_1 = \frac{M_{hx}}{K_1} \quad \text{és} \quad \sigma_{\max \text{ nyomás}} = \frac{M_{hx}}{I_x} e_2 = \frac{M_{hx}}{K_2}. \quad (5.28a)$$

Ezzel szemben az 5.8.(b) ábrán vázolt esetben

$$\sigma_{\max \text{ nyomás}} = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e_1 = \frac{|M_{hx}|}{K_1} \quad \text{és} \quad \sigma_{\max \text{ húzás}} = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e_2 = \frac{|M_{hx}|}{K_2}. \quad (5.28b)$$

A fentiek alapján *ellenőrzés esetén* egyidejűleg kell teljesülnie a

$$\sigma_{\max \text{ húzás}} \leq \sigma_{\text{meg húzás}} \quad \text{és} \quad \sigma_{\max \text{ nyomás}} \leq \sigma_{\text{meg nyomás}}. \quad (5.28c)$$

relációknak.

Legyen

$$K_{\text{sz húzás}} = \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\text{meg húzás}}} \quad \text{és} \quad K_{\text{sz nyomás}} = \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\text{meg nyomás}}} \quad (5.29)$$

a maximális húzó, illetve nyomófeszültséghez tartozó *szükséges* keresztmetszeti tényező. Nyilvánvaló az eddigiek alapján, hogy *méretezés esetén* a fenti két keresztmetszeti tényező birtokában lehet csak helyesen megválasztani a keresztmetszet alakját és méreteit.

Az ellenőrzés és méretezés megismert összefüggései akkor is alkalmazhatók, ha változik a hajlítónyomaték a rúd hossza mentén, de elhanyagolható a hajlítónyomatékkal társuló nyíróerő, pontosabban a nyíróerő okozta nyírófeszültségek hatása. Amint azt az összetett igénybevételek kapcsán látni fogjuk akkor hanyagolhatók el a nyírófeszültségek, ha sokkal nagyobb a rúd hossza mint a keresztmetszet maximális mérete. Ilyenkor az ellenőrzést, illetve a méretezést arra a keresztmetszetre kell elvégezni, ahol a legnagyobb a hajlítónyomaték abszolút értéke. Ezt a keresztmetszetet veszélyes keresztmetszetnek szokás nevezni.

5.2. Síkidomok (keresztmetszetek) másodrendű nyomatékai

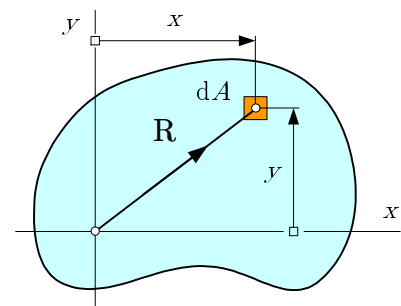
5.2.1. Bevezető megjegyzések. Az 5.1.2. szakasz (5.13a,b) képletei olyan mennyiségeket, másodrendű nyomatékokat értelmeztek, melyek csak a tekintett rúdkeresztmetszet geometriájának függvényei és mint ilyenek függetlenek a rúd anyagától illetve terhelésétől. A jelen 5.2. szakaszban további másodrendű nyomatékokat értelmezünk és részletesen is megvizsgáljuk ezek tulajdonságait.

5.2.2. Másodrendű nyomatékok értelmezése.

Az 5.9. ábra a tetszőleges alakú A síkidomot szemlélteti. Az xy koordináta-rendszer kezdőpontját (origóját) O jelöli. Ez a pont a sík egy tetszőleges végesben fekvő pontja, azaz nem szükséges feltétel, hogy az origó a síkidom egy belső pontja legyen. A dA felületelem középpontjának $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ a helyvektora.

Az A síkidom x tengelyre számított I_x , illetve az y tengelyre számított I_y másodrendű nyomatékát, megismételve I_x tekintetében az (5.13a) képletet, az

$$I_x = \int_A y^2 dA > 0 \quad \text{és az} \quad I_y = \int_A x^2 dA > 0 \quad (5.30a)$$



5.9. ábra.

integrálok értelmezik. A vegyes másodrendű nyomatéknak pedig, megismételve az (5.13b) képletet, az

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA \quad (5.30b)$$

integrál az értelmezése.

Értelmezésükből következően a tengelyre számított I_x és I_y másodrendű nyomatékok pozitív mennyiségek. Az I_{xy} vegyes másodrendű nyomaték pozitív, zérus és negatív egyaránt lehet.

Szokás a fenti másodrendű nyomatékok mellett *poláris másodrendű nyomatékról* beszélni. Ezt a mennyiséget az

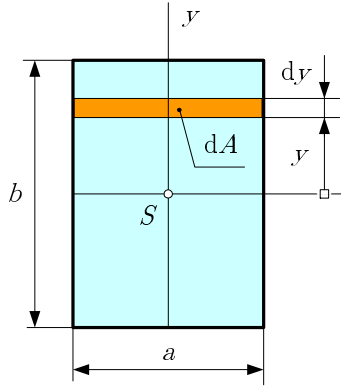
$$I_p = I_O = \int_A \mathbf{R}^2 \, dA = \int_A (x^2 + y^2) \, dA \quad (5.31)$$

integrál értelmezi. Az indexben álló p a poláris szó első betűje. Szokás helyette a vonatkoztatási pontot azonosító betűt, a jelen esetben ez O , is használni. Az is kiolvasható a fenti képletből, tekintettel az (5.30a)_{1,2} képletekre, hogy az O pontra számított poláris másodrendű nyomaték az O ponton áthaladó x és y tengelyekre számított másodrendű nyomatékok összege:

$$I_p = I_O = I_x + I_y \quad (5.32)$$

Határozzuk meg példaként, a későbbi alkalmazásokat is szem előtt tartva téglalap alakú, illetve kör és körgyűrű keresztmetszet esetén a másodrendű nyomatékokat, valamint a keresztmetszeti tényezőket.

Az 5.10. ábrán vázolt *téglalap alakú keresztmetszet* esetén az (5.30a)₁ képlet és az ábra alapján írható, hogy



$$I_x = \int_A y^2 \, dA = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \underbrace{a \, dy}_{dA} = a \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2},$$

azaz, hogy

$$I_x = \frac{ab^3}{12}. \quad (5.33a)$$

Értelemszerű betűcserékkel kapjuk innen, hogy

$$I_y = \frac{a^3b}{12}. \quad (5.33b)$$

A fenti két képlet és a poláris másodrendű nyomaték (5.32) alatti felbontása alapján

$$I_p = I_S = I_x + I_y = \frac{ab}{12} [a^2 + b^2]. \quad (5.34)$$

Végezetül az (5.22) és (5.33a,b) képletek felhasználásával számíthatók az x és y tengelyekre vonatkozó K_x és K_y keresztmetszeti tényezők:

$$K_x = \frac{I_x}{b/2} = \frac{ab^2}{6}, \quad K_y = \frac{I_y}{a/2} = \frac{a^2b}{6}. \quad (5.35)$$

Kör keresztmetszet esetén nyilvánvaló szimmetria okok miatt $I_x = I_y$. Visszaidézve, hogy a poláris másodrendű nyomatékokat erre a keresztmetszetre a (4.48) képlet adja, továbbá felhasználva, a poláris másodrendű nyomaték és a tengelyre számított I_x és I_y nyomatékok közötti (5.32) összefüggést írhatjuk, hogy

$$I_x + I_y = 2I_x = 2I_y = I_p = \frac{d^4\pi}{32},$$

azaz, hogy

$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{d^4\pi}{64}. \quad (5.36)$$

Ismét felhasználva az (5.22) képletet kapjuk a vonatkozó keresztmetszeti tényezőket:

$$K_x = K_y = \frac{I_x}{d/2} = \frac{d^3 \pi}{32} . \quad (5.37)$$

Körgyűrű alakú keresztmetszet esetén az I_p -t adó (4.49) összefüggés, az I_p felbontását adó (5.32) képlet, valamint a szimmetriát tükröző $I_x = I_y$ egyenlet figyelembe vételével írhatjuk, hogy

$$I_x + I_y = 2I_x = 2I_y = I_p = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32} .$$

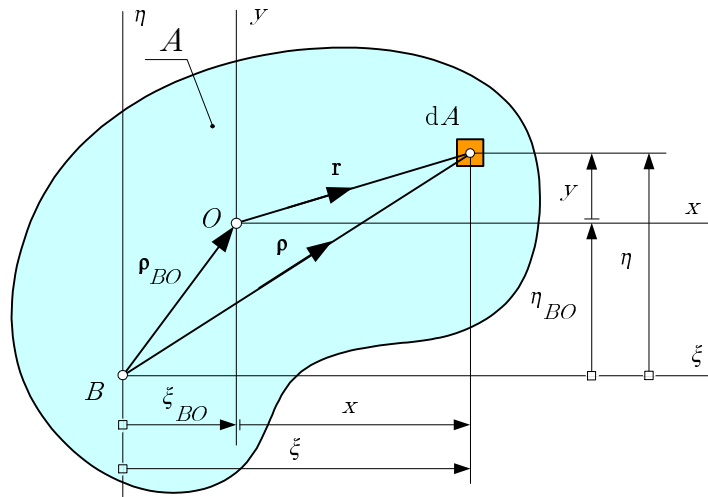
Következőleg

$$I_x = I_y = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{64} \quad \text{és} \quad K_x = K_y = \frac{I_x}{D/2} = \frac{(D^4 - d^4) \pi}{32D} . \quad (5.38)$$

Mivel az x és y súlyponti tengelyek mindhárom esetben szimmetriatengelyek zérus értékű a vegyes másodrendű nyomaték:

$$I_{xy} = 0 .$$

5.2.3. A koordinátarendszer eltolásának hatása. Steiner tétele. Az 5.11. ábrán vázolt A síkidom (keresztmetszet) esetén két egymással párhuzamos tengelypár által alkotott KR-ekben tekintjük a másodrendű nyomatékokat. Elsőként a B kezdőpontú görögbetűs $\xi\eta$ KR-ben



5.11. ábra.

tekintjük át a viszonyokat. Felhasználva a másodrendű nyomatékok (5.30a,b) alatti értelmezését az

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA , \quad I_\eta = \int_A \xi^2 dA , \quad (5.39a)$$

valamint a

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA \quad (5.39b)$$

képleteket kapjuk, ahol I_ξ és I_η a ξ és η tengelyekre számított másodrendű nyomaték, $I_{\xi\eta}$ pedig a ξ és η tengelypárra számított másodrendű nyomaték. A további átalakítások célja az I_ξ , I_η és $I_{\xi\eta}$, valamint az O kezdőpontú xy KR-ben számított I_x , I_y és I_{xy} másodrendű nyomatékok közötti kapcsolat tisztázása.

Ennek érdekében helyettesítsük az ábráról leolvasható

$$\xi = \xi_{BO} + x , \quad \eta = \eta_{BO} + y$$

geometriai összefüggéseket az (5.39a,b) képletekbe. Az első esetben elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$I_\xi = \int_A (\eta_{BO} + y)^2 dA = \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} + 2\eta_{BO} \underbrace{\int_A y dA}_{S_x} + \eta_{BO}^2 \underbrace{\int_A dA}_A. \quad (5.40a)$$

A második és harmadik esetben ugyanilyen módon kell eljárni:

$$I_\eta = \int_A (\xi_{BO} + x)^2 dA = \underbrace{\int_A x^2 dA}_{I_y} + 2\xi_{BO} \underbrace{\int_A x dA}_{S_y} + \xi_{BO}^2 \underbrace{\int_A dA}_A, \quad (5.40b)$$

$$\begin{aligned} I_{\xi\eta} &= \int_A (\xi_{BO} + x)(\eta_{BO} + y) dA = \\ &= \underbrace{\int_A xy dA}_{I_{xy}} + \xi_{BO} \underbrace{\int_A y dA}_{S_x} + \eta_{BO} \underbrace{\int_A x dA}_{S_y} + \xi_{BO} \eta_{BO} \underbrace{\int_A dA}_A. \end{aligned} \quad (5.40c)$$

A fenti képletek megjelölt részei rendre a síkidom x és y tengelyekre, valamint az x - y tengelypárra számított I_x , I_y és I_{xy} másodrendű nyomatékait, a síkidom x és y tengelyekre számított S_x és S_y statikai nyomatékait, illetve a síkidom A területét adják. Következésképpen írható, hogy

$$\begin{aligned} I_\xi &= I_x + 2\eta_{BO}S_x + \eta_{BO}^2 A, \\ I_\eta &= I_y + 2\xi_{BO}S_y + \xi_{BO}^2 A, \\ I_{\xi\eta} &= I_{xy} + \xi_{BO}S_x + \eta_{BO}S_y + \xi_{BO}\eta_{BO} A. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Ez az eredmény Steiner tétel néven ismeretes.² A tételt szavakban a következő módon fogalmazhatjuk meg: Ha ismeretesek egy síkidom adott pontjához kötött (a jelen esetben az O ponthoz kötött) xy KR-ben az I_x , I_y és I_{xy} másodrendű nyomatékok, illetve az S_x és S_y statikai nyomatékok, akkor integrálás nélkül számíthatók a síkidom egy másik pontjához kötött (a jelen esetben az B ponthoz kötött) $\xi\eta$ KR-ben, ha egyébként rendre párhuzamosak a ξ , η és x , y koordinátatengelyek.

Tovább egyszerűsödnek a Steiner tételt alkotó (5.41) képletek, ha egybeesik az O origó a síkidom (keresztmetszet) S geometriai középpontjával (súlypontjával). Ez esetben ugyanis zérus értékűek a síkidom x és y tengelyekre számított statikai nyomatékai:

$$S_x = S_y = 0.$$

Ha emellett azt is figyelembe vesszük, hogy ez esetben

$$\xi_{BS} = -x_{SB} \quad \text{és} \quad \eta_{BS} = -y_{SB}$$

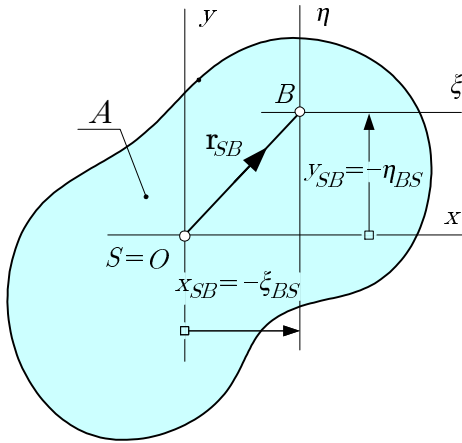
a Steiner tétel az

$$\begin{aligned} I_\xi &= I_x + y_{SB}^2 A, \\ I_\eta &= I_y + x_{SB}^2 A, \\ I_{\xi\eta} &= I_{xy} + x_{SB} y_{SB} A \end{aligned} \quad (5.42)$$

alakot ölti.

Kiolvasható az (5.42)₁ képletből, hogy adott súlyponti tengelyre (mondjuk az x tengelyre) számított másodrendű nyomaték ismeretében úgy számítható egy vele párhuzamos (mondjuk

²Jakob Steiner (1796-1863). Svájci születésű német geométer, a Berlini Tudományos Társaság tagja. Heidelbergben tanul. 1835-től élete végéig a berlini egyetem professzora. Szakterülete a projektív geometria és az izoperimetrikus geometriai problémák volt.



5.12. ábra.

az ξ tengelyre) számított másodrendű nyomaték hogy hozzáadjuk az adott súlyponti tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékhoz a síkidom területének és a két tengely közötti távolság négyzetének szorzatát.

Az is következik az utóbbi mondatból, hogy az egymással párhuzamos tengelyekre számított másodrendű nyomatékok közül a súlyponti tengelyre számított másodrendű nyomaték a legkisebb.

Megjegyezzük, hogy az

$$\underline{\mathbf{I}}_S = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{I}}_B = \begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\eta\xi} & I_\eta \end{bmatrix}, \quad (5.43a)$$

valamint az

$$\underline{\mathbf{I}}_{SB} = A \begin{bmatrix} y_{SB}^2 & -y_{SB} x_{SB} \\ -x_{SB} y_{SB} & x_{SB}^2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \eta_{BS}^2 & -\xi_{BS} \eta_{BS} \\ -\eta_{BS} \xi_{BS} & \xi_{BS}^2 \end{bmatrix}, \quad (5.43b)$$

mátrix jelölések bevezetésével az

$$\begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\eta\xi} & I_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} y_{SB}^2 & -y_{SB} x_{SB} \\ -x_{SB} y_{SB} & x_{SB}^2 \end{bmatrix}, \quad (5.44a)$$

vagy ami ugyanaz az

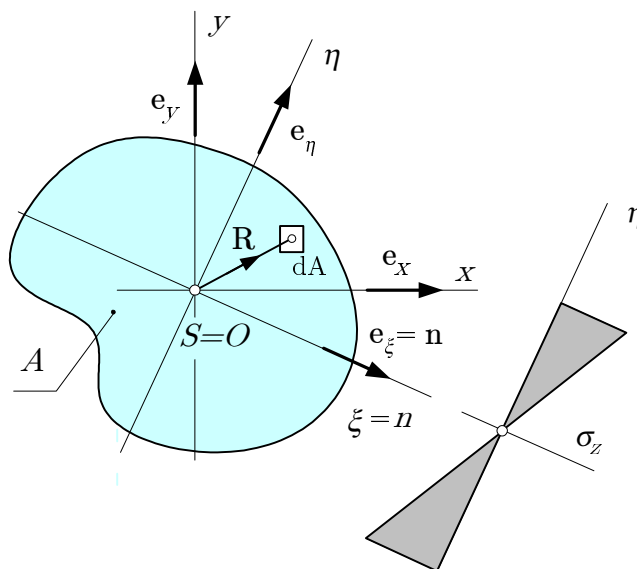
$$\underline{\mathbf{I}}_B = \underline{\mathbf{I}}_S + \underline{\mathbf{I}}_{SB} \quad (5.44b)$$

alakban írhatók fel a Steiner tétel (5.42) alatti skaláregyenletei. Megmutatjuk majd az 5.3.2. szakaszban – lásd az (5.56) képletre vezető gondolatmenetet –, hogy az $\underline{\mathbf{I}}_S$ mátrix az A keresztmetszet S súlypontjához tartozó $\underline{\mathbf{I}}_S$ tehetetlenségi tenzor mátrixa az xy KR-ben.

Ugyanígyen módon adódik majd az is, hogy az $\underline{\mathbf{I}}_B$ mátrix az A keresztmetszet B pontjához tartozó $\underline{\mathbf{I}}_B$ tehetetlenségi tenzor mátrixa a B kezdőpontú $\xi\eta$ KR-ben.

5.3. Prizmatikus rúd tiszta ferde hajlítása. Tehetlenségi tenzor

5.3.1. Általánosítás. A továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk meg hogyan változnak a viszonyok, ha az $\underline{\mathbf{M}}_S$ hajlítónyomaték vektor nem esik a keresztmetszet súlyponti tehetlenségi főtengelyére, azaz ferde hajlítás esete áll fenn. Legyen az eddigieknek megfelelően a z tengely a rúd súlyponti hossztengelye, továbbá vegyük az 5.13. ábrán szemléltetett módon az xyz , valamint a $\xi\eta z$ KR-t. A vonatkozó egységvektorokat $\mathbf{e}_\xi$ és $\mathbf{e}_\eta$, illetve $\mathbf{e}_x$ és $\mathbf{e}_y$ jelöli. Az n irány



5.13. ábra.

essék egybe a ξ iránnyal, azaz $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\xi$.

A gondolatmenet azon alapul, hogy a prizmatikus rúd tiszta ferde hajlítása esetén is fennállnak az alábbi, az egyenes hajlítás kapcsán rögzített megfigyelések:

1. Van olyan $\xi\eta z$ KR – az 5.13. ábra szemlélteti ezt a KR-t –, amelyben

$$\underline{\mathbf{A}}_{\xi\eta z} = \begin{bmatrix} \varepsilon_\xi & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_\eta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \varepsilon_\xi = \varepsilon_\eta = -\nu\varepsilon_z = -\nu\frac{\eta}{\rho}, \quad \varepsilon_z = \frac{\eta}{\rho} \quad (5.45)$$

az alakváltozási tenzor mátrixa, illetve annak elemei. Megjegyezzük, hogy az utóbbi képletekben ρ az alakváltozást szenvedett súlypontvonal görbületi sugara a $z\eta$ síkban.

2. Érvényes az egyszerű Hook törvény, azaz

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\frac{\eta}{\rho}.$$

Nilvánvaló, hogy az $\eta = 0$ egyenes, azaz a ξ tengely a semleges tengely.

Leolvasható az 5.13. ábráról, hogy az $\mathbf{R} = \xi\mathbf{e}_\xi + \eta\mathbf{e}_\eta$ helyvektor a dA felületelemhez mutat. Az is nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{n} \times \mathbf{R} = \mathbf{n} \times (\xi\mathbf{e}_\xi + \eta\mathbf{e}_\eta) = \mathbf{e}_\xi \times (\xi\mathbf{e}_\xi + \eta\mathbf{e}_\eta) = \eta\mathbf{e}_z.$$

Az utóbbi két sorközi képlet egybevetése alapján

$$\boldsymbol{\rho}_z = \sigma_z\mathbf{e}_z = \frac{E}{\rho} \eta \mathbf{e}_z = \frac{E}{\rho} \mathbf{n} \times \mathbf{R} \quad (5.46)$$

a feszültségvektor értéke.

Mivel tiszta hajlításról van szó zérus kell legyen a keresztmetszeten megoszló $\boldsymbol{\rho}_z$ belső erőrendszer $\mathbf{F}_S$ eredője. Ez az eredmény egyszerű számítással adódik, ha felhasználjuk $\boldsymbol{\rho}_z$ (5.46) alatti előállítását és figyelembe vesszük, hogy zérus értékű az A keresztmetszet $S = O$ súlypontra vett $\mathbf{S}_O$ statikai nyomatéka:

$$\mathbf{F}_S = \int_A \boldsymbol{\rho}_z dA = \int_A \frac{E}{\rho} \mathbf{n} \times \mathbf{R} dA = \frac{E}{\rho} \mathbf{n} \times \underbrace{\int_A \mathbf{R} dA}_{\mathbf{S}_O=0} = 0. \quad (5.47)$$

A keresztmetszeten megoszló $\boldsymbol{\rho}_z$ belső erőrendszer keresztmetszet súlypontjára vett $\mathbf{M}_S$ nyomatékát adó

$$\mathbf{M}_S = \int_A \mathbf{R} \times \boldsymbol{\rho}_z dA \quad (5.48)$$

képlet is hasonló gondolatmenettel, azaz a $\boldsymbol{\rho}_z$ feszültségvektor az (5.46) alatti képletének, valamint az $\mathbf{R}$ felbontásának helyettesítésével alakítható tovább:

$$\mathbf{M}_S = \int_A (\xi\mathbf{e}_\xi + \eta\mathbf{e}_\eta) \times \frac{E}{\rho} \eta \mathbf{e}_z dA = \frac{E}{\rho} \left[\underbrace{\int_A \eta^2 dA}_{I_\xi} \mathbf{e}_\xi - \underbrace{\int_A \eta\xi dA}_{I_{\eta\xi}} \mathbf{e}_\eta \right] \quad (5.49a)$$

azaz

$$\mathbf{M}_S = \frac{E}{\rho} [I_\xi \mathbf{e}_\xi - I_{\eta\xi} \mathbf{e}_\eta]. \quad (5.49b)$$

A fenti képletben álló

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA, \quad I_{\eta\xi} = \int_A \eta\xi dA \quad \text{integrálok, valamint az} \quad I_\eta = \int_A \xi^2 dA \quad (5.50)$$

integrál rendre az A keresztmetszet ξ tengelyre, $\eta\xi$ tengelypárra, valamint az η tengelyre számított másodrendű nyomatékait adják. Az (5.49b) képlet részét alkotó

$$\mathbf{I}_\xi = \mathbf{I}_n = I_\xi \mathbf{e}_\xi - I_{\eta\xi} \mathbf{e}_\eta \quad (5.51)$$

vektor a ξ tengelyhez, illetve az $\mathbf{e}_\xi$ irányhoz (vagy ami ugyanez az n tengelyhez, illetve az $\mathbf{n}$ irányhoz) tartozó *tehetetlenségi vektor*.

Mivel általában $I_{\eta\xi} \neq 0$ az következik az (5.49b) képletből, hogy az $\mathbf{M}_S$ nyomatékvektor általában nem párhuzamos a ξ semleges tengellyel. Másként fogalmazva, ha az $I_{\eta\xi} \neq 0$, akkor valóban ferde hajlítás áll fenn.

Tovább alakítható céljainknak megfelelően az $\mathbf{M}_S$ (5.48) alatti képlete, ha $\boldsymbol{\rho}_z$ értékét az (5.46) jobboldalának utolsó része alapján helyettesítjük és azt is figyelembe vesszük az (5.49b) és az (5.51) egybevetése alapján, hogy az $\frac{E}{\rho}$ -nak $\mathbf{I}_n$ az együtthatója:

$$\mathbf{M}_S = \frac{E}{\rho} \int_A \mathbf{R} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{R}) \, dA = \frac{E}{\rho} \mathbf{I}_n \quad (5.52)$$

Az utóbbi képlet alapján

$$\mathbf{I}_n = \int_A \mathbf{R} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{R}) \, dA \quad (5.53)$$

a tehetetlenségi vektor értéke.

5.3.2. Az A keresztmetszet tehetetlenségi tenzorai. Az (5.53) összefüggés szerint homogén lineáris függvénye az $\mathbf{I}_n$ tehetetlenségi vektor az $\mathbf{n}$ vektornak. Visszaidézve a másodrendű tenzorok geometriai értelmezésével kapcsolatos és az 1.3. szakaszban részletezett ismereteket azt mondhatjuk, hogy az (5.53) összefüggés az $\mathbf{I}_n$ -re képezi le az $\mathbf{n}$ vektort. Kihasználva, hogy a kifejtési tétel szerint $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$, ahol most $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ -nek $\mathbf{R}$, $\mathbf{b}$ -nek pedig $\mathbf{n}$ felel meg, az (5.53) alatti összefüggésből a

$$\mathbf{I}_n = \int_A [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{n} - \mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n})] \, dA \quad (5.54)$$

eredmény következik. A további átalakítások célja az $\mathbf{n}$ vektor kiemelése. Vegyük figyelembe, hogy $\mathbf{n} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ – itt $\mathbf{E}$ az egységtenzor – és hogy $\mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}) = \mathbf{R} \circ \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}$. Az utóbbi képletek kihasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{I}_n = \underbrace{\int_A [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{E} - \mathbf{R} \circ \mathbf{R}] \, dA}_{\mathbf{I}_S} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{n} . \quad (5.55)$$

A fenti egyenlet megjelölt része az A keresztmetszet $\mathbf{I}_S$ súlyponti tehetetlenségi tenzorát értelmezi:

$$\boxed{\mathbf{I}_S = \int_A [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) \mathbf{E} - \mathbf{R} \circ \mathbf{R}] \, dA} \quad (5.56)$$

Érdemes megjegyezni, hogy az (5.56) képlet a súlyponti tehetetlenségi tenzor koordinátarendszertől független alakja. Az (5.56) képlet alatti értelmezése szerint szimmetrikus a súlyponti tehetetlenségi tenzor, hiszen mind az $\mathbf{E}$ egységtenzor, mind pedig az $\mathbf{R} \circ \mathbf{R}$ diadikus szorzat szimmetrikus tenzorok.

Az xy koordinátarendszerben $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$, míg $\mathbf{E} = \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y$. Következően

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_S &= \int_A [(x^2 + y^2) (\mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y) - (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) \circ (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)] \, dA = \\ &= \int_A [(y^2 \mathbf{e}_x - xy\mathbf{e}_y) \circ \mathbf{e}_x + (-xy\mathbf{e}_x + x^2 \mathbf{e}_y) \circ \mathbf{e}_y] \, dA = \\ &= \underbrace{\left[\int_A y^2 \, dA \right]}_{I_x} \mathbf{e}_x - \underbrace{\left[\int_A xy \, dA \right]}_{I_{xy}} \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_x + \underbrace{\left[- \int_A xy \, dA \right]}_{I_{xy}} \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_y + \underbrace{\left[\int_A x^2 \, dA \right]}_{I_y} \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y , \end{aligned}$$

azaz

$$\mathbf{I}_S = \underbrace{(I_x \mathbf{e}_x - I_{xy} \mathbf{e}_y)}_{\mathbf{I}_x} \circ \mathbf{e}_x + \underbrace{(-I_{xy} \mathbf{e}_x + I_y \mathbf{e}_y)}_{\mathbf{I}_y} \circ \mathbf{e}_y , \quad (5.57a)$$

vagyis

$$\boxed{\mathbf{I}_S = \mathbf{I}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{I}_y \circ \mathbf{e}_y ,} \quad (5.57b)$$

ahol az $\mathbf{I}_x$ és $\mathbf{I}_y$ tehetetlenségi vektorok rendre az egymástól lineárisan független $\mathbf{e}_x$ és $\mathbf{e}_y$ egységvektorok képei az $\mathbf{I}_S$ tenzorhoz tartozó leképezésben. Az $\mathbf{I}_x$ és $\mathbf{I}_y$ tehetetlenségi vektorok ismeretében

$$\mathbf{I}_{S(x,y)} = \mathbf{I}_S = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_x & \mathbf{I}_y \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{array} \right] \quad (5.58)$$

a súlyponti tehetetlenségi tenzor mátrixa az xy KR-ben. Mivel a tenzor szimmetrikus az xy KR-ben felírt mátrixa is szimmetrikus.

Visszaidézve, hogy a súlyponti $\xi\eta$ koordinátarendszerben $\mathbf{R} = \xi\mathbf{e}_\xi + \eta\mathbf{e}_\eta$ a helyvektor és $\mathbf{E} = \mathbf{e}_\xi \circ \mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta \circ \mathbf{e}_\eta$ az egységtenzor, majd szó szerint megismételve az előző bekezdés lépéseit – felhasználva eközben az (5.50) alatti képleteket – azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{I}_S = \underbrace{(I_\xi \mathbf{e}_\xi - I_{y\xi} \mathbf{e}_\eta)}_{\mathbf{I}_\xi} \circ \mathbf{e}_\xi + \underbrace{(-I_{\xi\eta} \mathbf{e}_\xi + I_\eta \mathbf{e}_\eta)}_{\mathbf{I}_\eta} \circ \mathbf{e}_\eta \quad (5.59a)$$

a tehetetlenségi tenzor a súlyponti $\xi\eta$ KR-ben, ahol $\mathbf{I}_\xi$ és $\mathbf{I}_\eta$ a vonatkozó tehetetlenségi vektorok (az $\mathbf{e}_\xi$ és $\mathbf{e}_\eta$ egységvektorokhoz tartozó képvektorok). Következően

$$\mathbf{I}_S = \mathbf{I}_\xi \circ \mathbf{e}_\xi + \mathbf{I}_\eta \circ \mathbf{e}_\eta, \quad (5.59b)$$

a tenzor diadikus alakja és

$$\mathbf{I}_{S(\xi,\eta)} = \mathbf{I}_S = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I}_\xi & \mathbf{I}_\eta \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\eta\xi} & I_\eta \end{array} \right] \quad (5.60)$$

az $\mathbf{I}_S$ tenzor mátrixa a súlyponti $\xi\eta$ KR-ben.

Vegyük észre, hogy az (5.55) képlet szerint

$$\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{e}_n \quad n = x, y \quad \text{és} \quad \mathbf{I}_\nu = \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{e}_\nu \quad \nu = \xi, \eta \quad (5.61)$$

Következően

$$\boxed{I_{n(x,y)} = \mathbf{e}_n \cdot \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{e}_n \quad n = x, y \quad \text{és} \quad I_{\nu(\xi,\eta)} = \mathbf{e}_\nu \cdot \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{e}_\nu \quad \nu = \xi, \eta} \quad (5.62a)$$

továbbá

$$\boxed{I_{mn(x,y)} = -\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{e}_n \quad m, n = x, y \quad \text{és} \quad I_{\mu\nu(\xi,\eta)} = -\mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{e}_\nu \quad \mu, \nu = \xi, \eta} \quad (5.62b)$$

Az utóbbi eredmény szavakban a következőképp fogalmazható meg: Ha ismeretes az $\mathbf{I}_S$ tehetetlenségi tenzor és az $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y]$ $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta\}$ egységvektorok [a $\xi\eta$] {az xy } KR-ben, akkor [az (5.62a,b)₁] {az (5.62a,b)₂} képletekkel számíthatók a tehetetlenségi tenzor mátrixának $[I_x, I_y$ és $I_{xy}]$ $\{I_\xi, I_\eta$ és $I_{\xi\eta}\}$ elemei [az xy] {a $\xi\eta$ } KR-ben.

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény a tenzorok transzformációjával kapcsolatos (1.83) képletek értelemszerű, azaz síkbeli viszonyokra vonatkozó alkalmazásával is felírható: a $\mathbf{W}$ helyére $\mathbf{I}_S$ -t kell gondolni, el kell hagyni a z és ζ indexeket, illetve figyelembe kell venni a nem diagonális elemekre vonatkozó előjelbeni eltérést.

Megjegyezzük végezetül, visszaidézve az 5.11. ábra jelöléseit és az (5.56) alatti definíciót, hogy az

$$\boxed{\mathbf{I}_B = \int_A [(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}) \mathbf{E} - \boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho}] \, dA} \quad (5.63)$$

összefüggés értelmezi az A keresztmetszet tetszőleges B pontjához tartozó $\mathbf{I}_B$ tehetetlenségi tenzort.

5.3.3. Az I_S tenzor főtengeleypontproblémája.

Az 5.14. ábrán vázolt A keresztmetszet (síkidom) súlypontjához két KR-t az $nm = xy$, valamint az $nm = \overset{**}{xy}$ KR-eket kötjük. A második $\overset{**}{xy}$ KR az első xy KR óramutató járásával ellentétes irányba történő 90° -os elforgatásával kapható meg. Következésképpen

$$\int_A xy \, dA = - \int_A \overset{**}{xy} \, dA.$$

Ez az eredmény azt fejezi ki, hogy az $nm = xy$ KR 90° -os elforgatásával az I_{nm} vegyes másodrendű nyomaték abszolút értéke változatlan marad, de az előjele megváltozik. Mivel a KR forgatása közben csak folytonosan változhat az I_{nm} értéke adódik a következtetés, hogy bármely A keresztmetszetnek (síkidomnak) van legalább két olyan egymásra kölcsönösen merőleges súlyponti nm tengelye, hogy az általuk meghatározott KR-ben

$$I_{nm} = 0.$$

Az ilyen tengelyeket súlyponti *tehetetlenségi főtengeleknek*, a vonatkozó irányokat *főirányoknak*, a főtengelek által kifeszített KR-t a *főtengelek KR-ének*, a tengelyek egységvektorait pedig az I_S tehetetlenségi tenzor *sajátvektorainak* nevezzük. A főtengeleket az $n = 1$ és $m = 2$ indexek azonosítják. A főtengelekre számított másodrendű nyomatékokat rendre I_1 és I_2 jelöli. A számozást úgy választjuk meg, hogy teljesüljön az

$$I_1 \geq I_2$$

egyenlőtlenség. Mivel zérus az I_{12} vegyes másodrendű nyomaték, párhuzamosak a főirányokhoz tartozó tehetetlenségi vektorok a főirányokkal, azaz fennáll a

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{e}_i = I_i \mathbf{e}_i \quad i = 1, 2 \quad (5.64)$$

egyenlet.

Legyen az egyelőre ismeretlen

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y \quad |\mathbf{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = 1 \quad (5.65)$$

vektor a keresett főirány irányvektora. A hozzá tartozó ugyancsak ismeretlen főmásodrendű nyomatékokat I_n jelöli. Nyilvánvaló az (5.64) összefüggések alapján, hogy az $\mathbf{n}$ vektor és az I_n másodrendű nyomaték eleget kell, hogy tegyen az

$$\mathbf{I}_S \cdot \mathbf{n} = I_n \mathbf{n},$$

vagy ami ugyanaz az

$$(\mathbf{I}_S - I_n \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (5.66)$$

egyenletnek. Mátrixos alakra térve át a

$$\left\{ \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} - I_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

illetve a

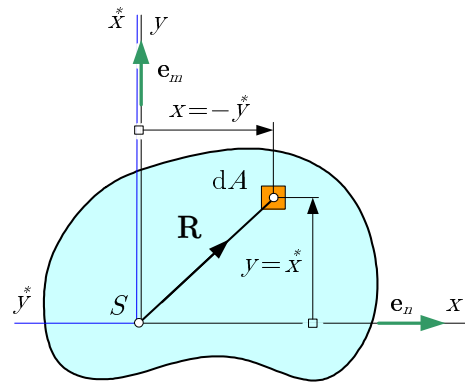
$$\begin{bmatrix} I_x - I_n & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

homogén lineáris egyenletrendszer kapjuk az n_x és n_y számítására. Triviálistól különböző megoldás csak akkor létezik, ha eltűnik az (5.66) egyenletrendszer determinánsa:

$$\begin{vmatrix} I_x - I_n & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I_n \end{vmatrix} = I_n^2 - \underbrace{(I_x + I_y)}_{I_I} I_n + \underbrace{I_x I_y - I_{xy}^2}_{I_{II}} = 0, \quad (5.68a)$$

ahol

$$I_I = I_x + I_y \quad \text{és} \quad I_{II} = I_x I_y - I_{xy}^2 \quad (5.68b)$$



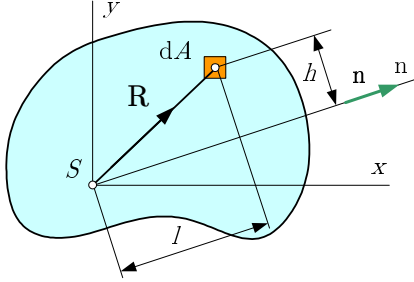
5.14. ábra.

az $\mathbf{I}_S$ tenzor úgynevezett első és második skalárinvariánsa. Az (5.68a) karakterisztikus egyenlet

$$I_n = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 - I_{xy}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (5.69)$$

gyökei valós számok, mivel pozitív a gyökjel alatt álló kifejezés (a másodfokú egyenlet diszkriminánsa).

Nem nehéz belátni az 5.15. ábra, az ábráról leolvasható $\mathbf{n} \cdot \mathbf{R} = l$, $\mathbf{R}^2 - l^2 = h^2$ összefüggések és az (5.56) képlet alapján, hogy



5.15. ábra.

$$\begin{aligned} I_n &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \int_A [(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})\mathbf{n} - \mathbf{R}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n})] dA = \\ &= \int_A [\mathbf{R}^2 \mathbf{n}^2 - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{n})^2] dA = \int_A [\mathbf{R}^2 - l^2] dA = \\ &= \int_A h^2 dA > 0. \end{aligned} \quad (5.70)$$

A kapott eredmény szerint

- (a) I_n valóban az n tengelyre számított másodrendű nyomaték,
- (b) és mint ilyen szigorúan pozitív.

Következőleg az $I_{1,2}$ gyökök nemcsak valósak, hanem pozitív mennyiségek is.

Az I_1 gyök ismeretében az (5.68a) egyenletrendszer és az $|\mathbf{n}| = 1$ feltétel figyelembevételével adódóan vagy az

$$n_{x1}(I_x - I_1) - I_{xy}n_{y1} = 0, \quad n_{x1}^2 + n_{y1}^2 = 1 \quad (5.71a)$$

egyenletek, vagy pedig a

$$-n_{x1}I_{xy} + (I_y - I_1)n_{y1} = 0, \quad n_{x1}^2 + n_{y1}^2 = 1 \quad (5.71b)$$

egyenletek megoldása – (5.71a)₁ és (5.71b)₁ nem független egymástól – adja az 1 jelű főirány $\mathbf{n}_1$ irányvektorának n_{x1} és n_{y1} koordinátáit. Ha már ismert az $\mathbf{n}_1$ a 2 jelű főirány $\mathbf{n}_2$ irányvektora az

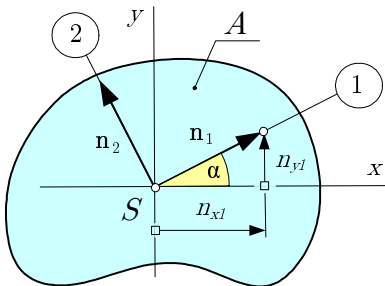
$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_1 \quad (5.72)$$

képletből számítható. Vegyük észre, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{e}_z$ hármassodratú vektorhármast alkot.

A számítások során az I_2 gyök is használható. Mindössze annyi a változás, hogy I_2 -t kell írni I_1 helyére az (5.71a,b) egyenletekben. A $\mathbf{n}_1$ irányvektor meghatározása pedig az $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{e}_z$ képlet jobb oldalán álló vektorszorzat kiszámítását igényli.

Mivel zérus a vegyes másodrendű nyomaték a főtehetetlenségi tengelyek által kifeszített KR-ben, ugyanitt diagonális a tehetetlenségi tenzor mátrixa:

$$\mathbf{I}_{S(1,2)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}. \quad (5.73)$$



5.16. ábra.

5.3.4. Az 1 jelű főtengely és az x tengely által bezárt szög számítása. Az 5.16 ábra a főtengelyek KR-ét szemlélteti. Az ábra és az (5.71a,b)₁ képletek egybevetése szerint

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{n_{y1}}{n_{x1}} = \frac{I_x - I_1}{I_{xy}} = \frac{I_{xy}}{I_y - I_1} \quad (5.74)$$

az egyes főtengely x tengellyel bezárt α szögének a tangense. Vegyük észre, hogy a fenti képlet csak akkor használható, ha már ismerjük a főtehetetlenségi nyomatékokat. Ez a szög, amint az kiderül majd a továbbiakból,

a főtehetetlenségi nyomatékok ismerete nélkül is meghatározható. Leolvasható ui. az 5.16 ábráról, hogy az xyz KR-ben

$$\mathbf{n}_1 = \cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{n}_2 = -\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y \quad (5.75)$$

a két főtengely $(5.65)_2$ normálási feltételt is kielégítő irányvektora. Ha felhasználjuk az $(5.62b)_2$ képletet – ebben a görögbetűs KR-nek a főtengelyek KR-e felel meg: μ az első, ν pedig a második főtengelyt jelenti – akkor írhatjuk, hogy

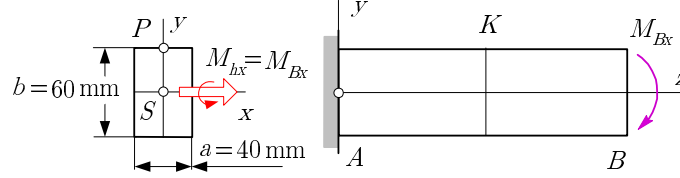
$$\begin{aligned} I_{12} = - \underset{(x,y)}{\mathbf{n}_1} \cdot \underset{(x,y)}{\mathbf{I}_S} \cdot \underset{(x,y)}{\mathbf{n}_2} &= - \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix} = \\ &= (I_x - I_y) \sin \alpha \cos \alpha + (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) I_{xy} = 0, \end{aligned}$$

hiszen eltűnik a főtengelyek KR-ében a vegyes másodrendű nyomaték. Innen adódik a jól ismert $\sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha/2$ és $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$ trigonometrikus egyenletek felhasználásával, hogy

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}}. \quad (5.76)$$

5.4. Mintafeladatok

5.1. Az 5.17. ábrán vázolt téglalapkeresztmetszetű acélrudat az M_{Bx} nyomaték terheli. (a) Határozza meg az M_{Bx} értékét, ha a maximális normálfeszültség eléri a $\sigma_F = 240$ MPa folyáshatárt. (b) Számítsa ki a feszültségi és alakváltozási tenzor mátrixait a K keresztmetszet P pontjában, ha $M_{Bx} = 3.84$ kNm ($E_{\text{acél}} \approx 200$ GPa, $\nu \approx 1/3$). (c) Mekkora ez esetben a K keresztmetszet felső oldalélének Δa méretváltozása.



5.17. ábra.

A számításokhoz szükség lesz a téglalap keresztmetszet x tengelyre számított I_x másodrendű nyomatékára. Az (5.33a) képlet szerint

$$I_x = \frac{ab^3}{12} = \frac{40 \text{ mm} \times (60 \text{ mm})^3}{12} = 7.2 \times 10^5 \text{ mm}^4.$$

Mivel a rúdnak tiszta hajlítás az igénybevétele az (5.21) képlet alapján írhatjuk, hogy

$$\sigma_{\max} = \sigma_F = \frac{|M_{Bx}|}{I_x} \frac{b}{2} \quad \text{ahonnan} \quad |M_{Bx}| = \frac{2\sigma_F I_x}{b}$$

és végül

$$M_{Bx} = \frac{2 \times 240 \text{ MPa} \times 7.2 \times 10^5 \text{ mm}^4}{60 \text{ mm}} = 5.76 \times 10^6 \text{ Nmm} = 5.76 \text{ kNm}.$$

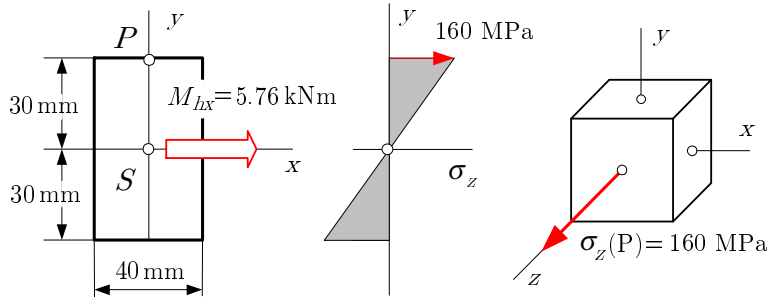
A (b) kérdésben terhelésként megadott nyomaték ennek a nyomatéknak a két harmada. A P pont a felső oldalélén van, ahol maximális a normálfeszültség. Következik tehát, hogy ennek értéke a $\sigma_F = 240$ MPa folyáshatár két harmada: $\sigma_z(P) = 160$ MPa. Mivel érvényes az egyszerű Hook törvény az (5.7a), (5.2) és (5.1) képletek szerint

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{160 \text{ MPa}}{2 \times 10^5 \text{ MPa}} = 8 \times 10^{-4} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu \varepsilon_z = -\frac{8}{3} \times 10^{-4} \quad \text{és} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

Ezekkel az eredményekkel

$$\underline{\mathbf{T}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 160 \end{bmatrix} \text{ MPa} \quad \text{és} \quad \underline{\mathbf{A}}_P = \begin{bmatrix} -2.666 & 0 & 0 \\ 0 & -2.666 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

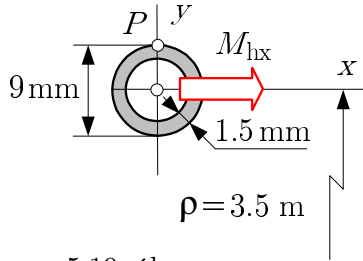
a feszültségi és alakváltozási tenzor mátrixa. Az 5.18. ábra a K keresztmetszetet és annak igénybevételét, az y tengely menti feszültségeloszlást, valamint a P pontbeli feszültségi állapotot szemlélteti.



5.18. ábra.

Mivel állandó a keresztirányú fajlagos nyúlás a K keresztmetszet felső oldaléle mentén a Δa méretváltozás, értelemszerűen alkalmazva a (3.21) képletet, az alábbiak szerint számítható:

$$\Delta a = \varepsilon_k a = - \left(2 + \frac{2}{3} \right) \times 10^{-4} \times 40 \text{ mm} = -1.0667 \times 10^{-2} \text{ mm}.$$



5.19. ábra.

5.2. Az 5.19. ábra tiszta hajlításnak kitett alumínium rúd keresztmetszetét szemlélteti ($E_{al} = 70 \text{ GPa}$, $\nu_{al} \approx 0.3$). Határozza meg, felhasználva az ábra adatait, (a) az alakváltozási tenzor mátrixát a keresztmetszet P pontjában, és (b) ugyanitt a normál-feszültség értékét.

Az (5.4) és (5.2) képletek alapján

$$\varepsilon_z(P) = \varepsilon_z = \frac{y_P}{\rho} = \frac{4.5 \text{ mm}}{3.5 \times 10^3 \text{ mm}} = 1.2857 \times 10^{-3},$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu_{al} \varepsilon_z = \\ = -0.3 \times 1.2857 \times 10^{-3} = -3.8571 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

és

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0.$$

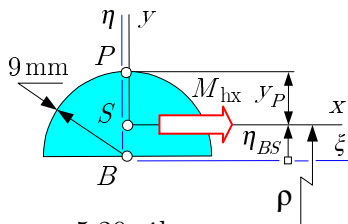
Következésképp

$$\underline{\mathbf{A}}_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.8571 & 0 & 0 \\ 0 & -3.8571 & 0 \\ 0 & 0 & 12.857 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

az alakváltozási tenzor mátrixa. Ami pedig a (b) kérdést illeti az (5.7a) egyszerű Hook törvényből

$$\sigma_z(P) = E_{al} \varepsilon_z = 70.0 \times 10^3 \text{ MPa} \times 1.2857 \times 10^{-3} \approx 90 \text{ MPa}$$

a keresett normál-feszültség.



5.20. ábra.

5.3. Az 5.20. ábrán vázolt félkör keresztmetszetű rúdnek tiszta hajlítás az igénybevétele. A keresztmetszet P pontjában $\varepsilon_P = 1.0361 \times 10^{-3}$ a nyúlásmérő bélyeggel mért fajlagos nyúlás a z irányban. Mekkora a rúd görbületi sugara? ($\eta_{BS} = 4r/3\pi$)

A P pont

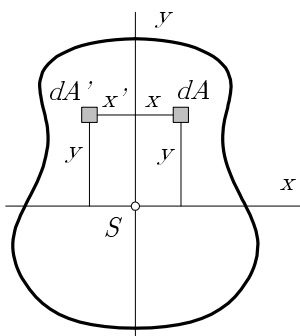
$$y_P = r - \eta_{BS} = r - \frac{4r}{3\pi} = 9 \text{ mm} - \frac{4 \times 9 \text{ mm}}{3\pi} = 5.1803 \text{ mm}$$

helykoordinátájával, kihasználva az (5.4) képletet, kapjuk a

$$\rho = \frac{y_P}{\varepsilon_P} = \frac{5.1803 \text{ mm}}{1.0361 \times 10^{-3}} \approx 5000 \text{ mm}$$

görbületi sugarat.

5.4. Mutassa meg, hogy zérus az A keresztmetszet $x - y$ súlyponti tengelypárra számított másodrendű nyomatéka, ha szimmetria tengely az y tengely.



5.21. ábra.

Az 5.21. ábrán vázolt A keresztmetszetnek az y tengely a szimmetriatengelye. A szimmetria miatt maga a keresztmetszet olyan szimmetrikusan elhelyezkedő dA és dA' felületelemekre bontható – egy ilyen felületelempárt az ábra is feltüntet –, amelyeknek azonos az y koordinátája, de az x koordinátájuk előjele különböző: $x' = -x$. Ha tehát páronként összegezzük

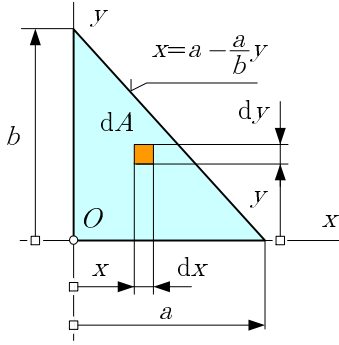
$$xy \, dA + x'y \, dA' = 0.$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy

$$I_{xy} = \int_A xy \, dA = 0.$$

A fenti eredmény szerint valóban zérus az A keresztmetszet $x - y$ súlyponti tengelypárra vett másodrendű nyomatéka, ha szimmetria tengely az y tengely.

5.5. Határozza meg az 5.22. ábrán vázolt derékszögű háromszög esetén az oldalélek által alkotott xy KR-ben az I_x , I_y és I_{xy} másodrendű nyomatékokat.



5.22. ábra.

Felhasználva az ábra jelöléseit a definíciót adó (5.30a)₁ képlet alapján írható, hogy

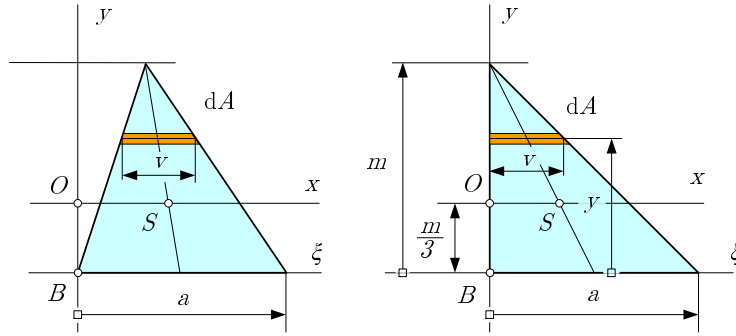
$$\begin{aligned} I_x &= \int_A y^2 dA = \int_0^b y^2 \left[\int_0^{x=a-ay/b} dx \right] dy = \\ &= \int_0^b ay^2 \left[1 - \frac{y}{b} \right] dy = a \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4b} \right]_0^b = \frac{ab^3}{12}. \end{aligned} \quad (5.77a)$$

Ugyanígyen módon kapjuk az (5.30b) képlet alapján, hogy

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int_A xy dA = \int_0^b y \left[\int_0^{x=a-ay/b} x dx \right] dy = \\ &= \int_0^b \frac{1}{2} ay \left[1 - \frac{y}{b} \right]^2 dy = a^2 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3b} + \frac{y^4}{4b^2} \right]_0^b = \frac{a^2 b^2}{12}. \end{aligned} \quad (5.77b)$$

Nilvánvaló az I_x -et adó képlet alapján, hogy $I_y = a^3 b / 12$.

5.6. Határozza meg az a alapú és m magasságú általános háromszög másodrendű nyomatékát az alapjára (azaz a ξ tengelyre), valamint az alappal párhuzamos S súlyponti tengelyre (azaz az x tengelyre).



5.23. ábra.

Vegyük észre, hogy a ξ tengelyen nyugvó alappal szemközti csúcs az alappal párhuzamos és a csúcson áthaladó egyenesen történő eltolása nem változtatja meg a ξ tengelyre számított másodrendű nyomatékot. Ez azt eredményezi, hogy azonos az általános háromszög, és a tőle jobbra fekvő derékszögű háromszög ξ tengelyre számított másodrendű nyomatéka. Következésképpen alkalmazható az (5.77a) összefüggés, amivel

$$I_\xi = \frac{am^3}{12}. \quad (5.78)$$

A súlyponti x tengelyre számított másodrendű nyomaték ezek után az ábra adataival és az (5.42)₁ Steiner tétel felhasználásával adódik:

$$I_x = I_\xi - y_{SB}^2 A = \frac{am^3}{12} - \frac{m^2}{9} \frac{am}{2} = \frac{am^3}{36}. \quad (5.79)$$

5.7. Tegyük fel, hogy alumíniumból készült az 5.3. Mintafeladat félkörszelvénye. Határozza meg ez esetben (a) P és B pontokban a σ_z normálfeszültség értékét, valamint (b) a hajlítónyomaték értékét ($E_{al} = 70 \text{ GPa}$).

Figyelembe véve, hogy érvényes az egyszerű Hook törvény az (5.7a) képlet szerint

$$\sigma_z = E_{al} \varepsilon_P = 70.0 \times 10^3 \text{ MPa} \times 1.0361 \times 10^{-3} \approx 72.5 \text{ MPa}$$

a normálfeszültség a P pontban. Mivel

$$\eta_{BS} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4 \times 9 \text{ mm}}{3\pi} = 3.8197 \text{ mm},$$

az S pont η koordinátája és homogén lineáris függvénye a σ_z normálfeszültség az y koordinátának a

$$\frac{\sigma_z(P)}{\sigma_z(B)} = \frac{y_P}{y_{SB}} \quad \text{aránypárból} \quad \sigma_z(B) = -\frac{\eta_{BS}}{y_P} \sigma_z(P) = -\frac{3.8197 \text{ mm}}{5.1803 \text{ mm}} \times 72.5 \text{ MPa} \approx -53.5 \text{ MPa}.$$

A hajlítónyomaték számításához szükség lesz a félkörkeresztmetszet x tengelyre vett I_x másodrendű nyomatékára. A keresztmetszet

$$A = \frac{1}{2} r^2 \pi = \frac{1}{2} (9 \text{ mm})^2 \pi = 127.23 \text{ mm}^2$$

területének, illetve ξ tengelyre számított

$$I_\xi = \frac{1}{2} \frac{d^4 \pi}{64} = \frac{(18 \text{ mm})^4 \pi}{128} = 2576.5 \text{ mm}^4$$

másodrendű nyomatékának ismeretében az (5.42)₁ Steiner tételből

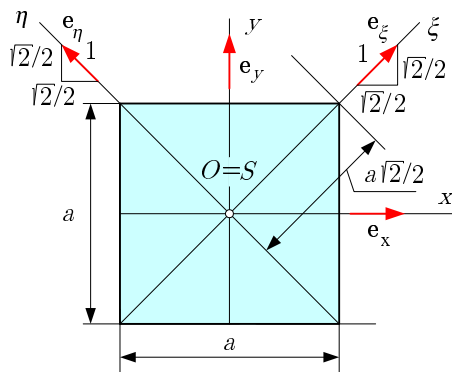
$$I_x = I_\xi - y_{SB}^2 A = 2576.5 \text{ mm}^4 - (3.8197 \text{ mm})^2 \times 127.23 \text{ mm}^2 = 720.2 \text{ mm}^4.$$

A fenti adatokkal illetve a görbületi sugár számított értékével az (5.14) képletből

$$M_{hx} = \frac{I_x E}{\rho} = \frac{720.2 \text{ mm}^4 \times 70.0 \times 10^3 \text{ MPa}}{5000 \text{ mm}^4} \approx 10.0 \text{ Nm}.$$

a keresett hajlítónyomaték.

5.8. Határozza meg az 5.24. ábrán vázolt négyzet átlói által kifeszített $\xi\eta$ KR-ben a négyzet súlyponti tehetetlenségi tenzorának mátrixát.



5.24. ábra.

Tekintettel a téglalap másodrendű nyomatékaival kapcsolatos (5.33a,b) képletekre, valamint arra a körülményre, hogy mind az x , mind pedig az y tengely szimmetriatengely – utalunk ehelyütt az 5.4. Mintafeladatra is – azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{I}_{S(x,y)} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix}$$

a súlyponti tehetetlenségi tenzor mátrixa az xy KR-ben.

Leolvasható az is az ábráról, hogy

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} (\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$$

és

$$\mathbf{e}_\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y).$$

A fentiek birtokában már alkalmazhatók az (5.62a)₂ és az (5.62b)₂ képletek. A számítások során mátrix jelölésekre érdemes áttérni a számítások megkönnyítése érdekében. Így az

$$I_{\xi} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{e}_\xi = \mathbf{e}_\xi^T \mathbf{I}_S \mathbf{e}_\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{a^4}{12} = I_x \quad (5.80a)$$

$$I_{\eta} = \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{e}_\eta = \mathbf{e}_\eta^T \mathbf{I}_S \mathbf{e}_\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{a^4}{12} = I_y \quad (5.80b)$$

és az

$$I_{\xi\eta} = \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{I}_S \cdot \mathbf{e}_\eta = \mathbf{e}_\xi^T \mathbf{I}_S \mathbf{e}_\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (5.80c)$$

eredményeket kapjuk. Következően

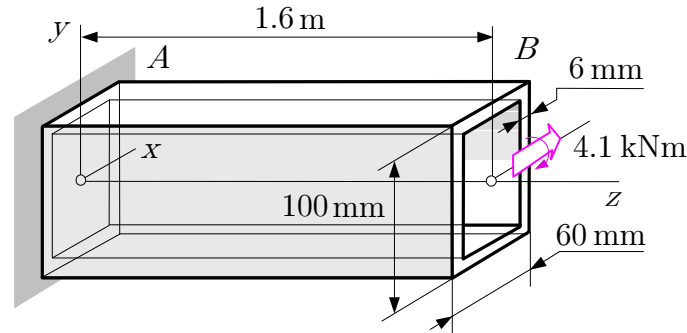
$$\mathbf{I}_{S(\xi,\eta)} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix} = \mathbf{I}_{S(x,y)}.$$

Ugyanez az eredmény más módon is megkapható. Mivel szimmetriatengely a ξ és η tengely $I_{\xi\eta} = 0$. Mivel az S pont körüli 90° -os elforgatás önmagába viszi át a négyzetet $I_\xi = I_\eta$. Végezetül vegyük észre, hogy a négyzet négy olyan egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszögre bontható fel, melyek egyik

oldala a ξ és az ezzel egyenlő másik oldala pedig az η tengelyen nyugszik. Következőleg alkalmazható az (5.77a) összefüggés:

$$I_{\xi} = 4 \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

5.9. Az 5.25. ábra a zártszelvényű AB acélrudat szemlélteti ($E_{\text{acél}} = 200 \text{ GPa}$). A rúdnek 6 mm a falvastagsága. Legyen $\sigma_{\text{meg}} = 120 \text{ MPa}$ a megengedett feszültség. Ellenőrizze a rudat és számítsa ki a deformálódott középvonal görbületi sugarát.

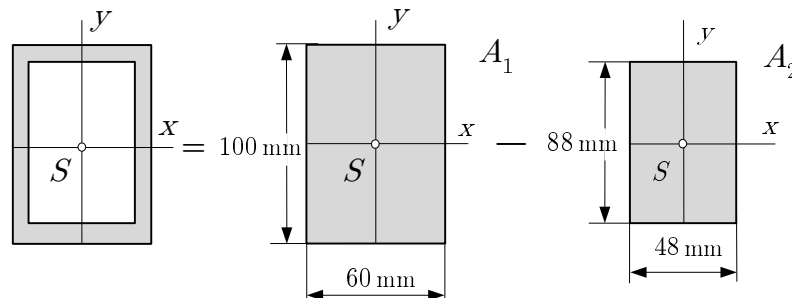


5.25. ábra.

Szépen szemlélteti az 5.26. ábra hogy a rúd keresztmetszete az A_1 és A_2 jelű téglalapok különbsége. Jelölje rendre I_{x1} és I_{x2} az A_1 és A_2 jelű téglalapok x tengelyre számított másodrendű nyomatékát. Az (5.33a) képlet értelemszerű felhasználásával adódik, hogy

$$I_x = I_{x1} - I_{x2} = \frac{60 \times 100^3}{12} - \frac{48 \times 88^3}{12} = 2.2741 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

a rúd keresztmetszetének x tengelyre számított másodrendű nyomatéka.



5.26. ábra.

Mivel a rúd anyaga húzásra és nyomásra egyformán viselkedik az (5.21) képlet felhasználásával a

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e = \frac{4.1 \times 10^6 \text{ Nmm}}{2.2741 \times 10^6 \text{ mm}^4} \times 50 \text{ mm} \approx 90 \text{ MPa} < \sigma_{\text{meg}} = 120 \text{ MPa}$$

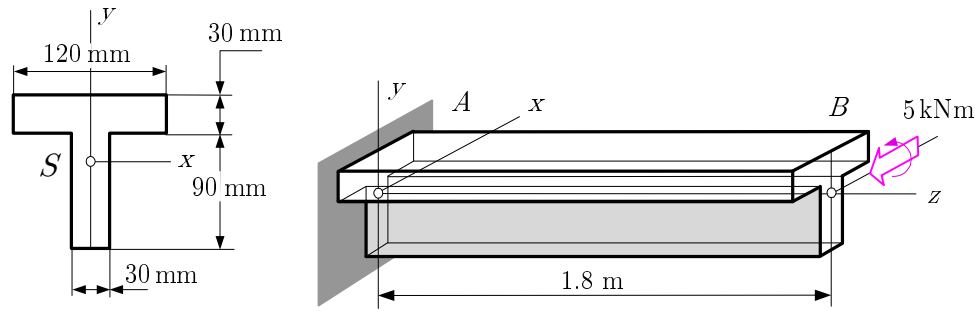
eredményt kapjuk. A rúd tehát megfelel.

Az (5.14) képlet alapján

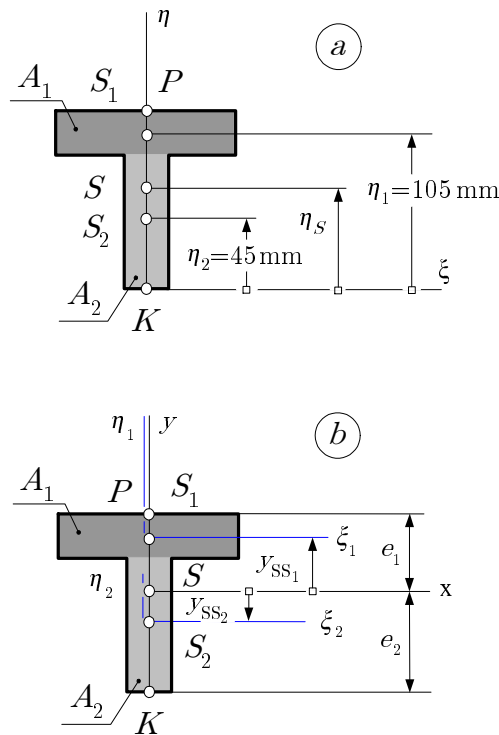
$$\rho = \frac{I_x E}{M_{hx}} = \frac{2.2741 \times 10^6 \text{ mm}^4 \times 200 \times 10^3 \text{ MPa}}{4.1 \times 10^6 \text{ Nmm}} \approx 1.109 \times 10^2 \text{ m}$$

a középvonal görbületi sugara.

5.10. Az 5.27. ábrán vázolt T szelvényű rúd alumíniumból készült ($E_{\text{al}} = 70 \text{ GPa}$). A rúdnek tiszta hajlítás az igénybevétele. Határozza meg a szelvényben ébredő legnagyobb húzó-, és nyomófeszültséget, (b) a rúd görbületi sugarát, valamint (c) a rúdban felhalmozódott rugalmas energiát.



5.27. ábra.



5.28. ábra.

Első lépésben meghatározzuk a keresztmetszet S súlypontjának η_S koordinátáját valamint az x súlyponti tengelyre számított I_x másodrendű nyomatékot. A számítások során, célszerűségi okokból két részre, ezeket rendre A_1 és A_2 jelöli, bontjuk fel a keresztmetszetet. A hosszegység mm. Az 5.28.(a) ábra és a

i	$A_i \text{ mm}^2$	$\eta_i \text{ mm}$	$\eta_i A_i \text{ mm}^3$
1	3600	105	378000
2	2700	45	121500
$A = \sum A_i = 6300$		$S_\xi = \sum A_i \eta_i = 499500$	

táblázat adataival (S_ξ az A keresztmetszet ξ tengelyre vett statikai nyomatéka) írható, hogy

$$\eta_S = \frac{S_\xi}{A} = \frac{\sum A_i \eta_i}{\sum A_i} = \frac{499500}{6300} = 79.286 \text{ mm}.$$

Az A_1 és A_2 jelű részek súlypontjainak

$$y_{SS_1} = \eta_1 - \eta_S = 105 - 79.286 = 25.714 \text{ mm}$$

és

$$y_{SS_2} = \eta_2 - \eta_S = 45 - 79.286 = -34.286 \text{ mm}$$

koordinátaival – 5.28.(b) ábra – alkalmazhatóvá válik az A_1 jelű rész esetén az SS_1 pontok között, az A_2 jelű rész esetén pedig az SS_2 pontok között az (5.42)₁ Steiner tétel:

$$\begin{aligned} I_x &= \sum \left[I_{\xi_i} + (y_{SS_i})^2 A_i \right] = \\ &= \frac{120 \times 30^3}{12} + (25.714)^2 \times 3600 + \\ &+ \frac{30 \times 90^3}{12} + (-34.286)^2 \times 2700 = \\ &= 7.6468 \times 10^6 \text{ mm}^4. \end{aligned}$$

Mivel negatív a hajlítónyomaték a nyomófeszültség a P pontot tartalmazó felső oldalélen, a húzófeszültség a K pontot tartalmazó alsó oldalélen maximális. Az

$$e_1 = y_{SS_2} + 15 = 25.714 + 15 = 40.714 \text{ mm},$$

$$e_2 = \eta_S = 79.286 \text{ mm}$$

értékekkel és az (5.28b) képletekkel kapjuk, hogy

$$\sigma_{\max \text{ nyomás}} = |\sigma_P| = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e_1 = \frac{5 \times 10^6 \text{ Nmm}}{7.6468 \times 10^6 \text{ mm}^4} \times 40.714 \text{ mm} \approx 27 \text{ MPa}$$

és

$$\sigma_{\max \text{ húzás}} = |\sigma_K| = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e_2 = \frac{5 \times 10^6 \text{ Nmm}}{7.6468 \times 10^6 \text{ mm}^4} \times 79.286 \text{ mm} \approx 52 \text{ MPa}.$$

Az (5.14), valamint az (5.19) képletek alapján

$$\rho = \frac{I_x E_{al}}{M_{hx}} = -\frac{7.6468 \times 10^6 \text{ mm}^4 \times 70 \times 10^3 \text{ MPa}}{5 \times 10^6 \text{ Nmm}} \approx -107 \text{ m}$$

a görbületi sugár és

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_{hx}^2 l}{I_x E_{al}} = \frac{1}{2} \frac{(5 \times 10^6 \text{ Nmm})^2 \times 1.8 \times 10^3 \text{ mm}}{7.6468 \times 10^6 \text{ mm}^4 \times 70 \times 10^3 \text{ MPa}} \approx 42.034 \text{ Nm}$$

az alakváltozási energia.

5.11. Számítsa ki az 5.9. Mintafeladatban vizsgált rúd B keresztmetszetében a súlypontvonal (a rúd) $\varphi_{xB} = \varphi_B$ szögelfordulását és ugyanitt súlypont (a rúd) függőleges v_B elmozdulását.

Az 5.29. ábra a szokott betűket használva jelleglyesen szemlélteti az AB rúd nyomatéki ábráját, illetve a körívvé görbült középvonalat. Mivel merőleges szárúak a $\varphi_{xB} = \varphi_B$ és Φ_L szögek és mivel nem változik meg a rúd középvonalának hossza írható, hogy

$$\varphi_{xB} = \varphi_B = \Phi_L = \frac{L}{\rho}$$

ahonnan, tekintettel a görbületet adó (5.14) összefüggésre és az $M_{hx} = M_{xB}$ egyenlőségre, kapjuk hogy

$$\varphi_B = \frac{M_{xB} L}{I_x E}. \quad (5.81)$$

Ez a képlet előjelhelyesen adja a keresett szögelfordulást. Helyettesítve a feladat adatait

$$\begin{aligned} \varphi_B &= \frac{4.1 \times 10^6 \text{ Nmm} \times 1.6 \times 10^3 \text{ mm}}{2.2741 \times 10^6 \text{ mm}^4 \times 200 \times 10^3 \text{ MPa}} = \\ &= 1.4423 \times 10^{-2} \text{ rad} = 0.82638^\circ \end{aligned}$$

az eredmény. Ez a szögelfordulás igen kicsiny, ellentétben az ábrával, amelyen a viszonyok érzékeltetésére véges szögelfordulást tüntettünk fel. A kapott érték azt a mindennapi tapasztalatot tükrözi, hogy a valós szerkezeteken általában kicsinyek a terhelésből adódó szögelfordulások és elmozdulások.

A v_B elmozdulás ugyancsak az ábra alapján írható fel:

$$v_B = -\rho(1 - \cos \Phi_L).$$

Mivel kicsi a $\varphi_{xB} = \varphi_B = \Phi_L$ szög elegendő a

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^6)$$

sorfejtés első két tagját megőrizni.

Ha elvégezzük a ρ görbületi sugár és a $\varphi_B = \varphi_{xB} = \Phi_L$ forgás tekintetében is a szükséges helyettesítéseket, akkor a

$$v_B \cong -\rho \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \Phi_L^2 \right) \right] = -\frac{1}{2} \frac{M_{xB} L^2}{I_x E} \quad (5.82)$$

képletet kapjuk. A feladat adataival

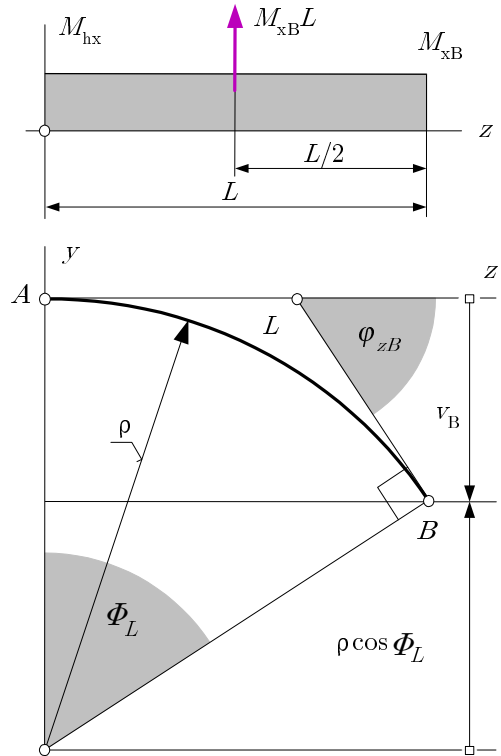
$$v_B = -\frac{1}{2} \frac{4.1 \times 10^6 \text{ Nmm} \times (1.6 \times 10^3 \text{ mm})^2}{2.2741 \times 10^6 \text{ mm}^4 \times 200 \times 10^3 \text{ MPa}} = -11.539 \text{ mm}$$

a keresett elmozdulás.

A továbbiak az (5.81) és (5.81) képletek lehetséges interpretációit adják.

(a) Visszaidézve, hogy a jelen esetben

$$U = \frac{1}{2} \frac{M_{xB}^2 L}{I_x E}$$



5.29. ábra.

a teljes rugalmas energia, azt kapjuk, hogy

$$\varphi_B = \frac{\partial U}{\partial M_{xB}} = \frac{M_{xB}L}{I_x E}.$$

Ez a képlet a (3.24) és (4.52) összefüggések egy analogonja.

(b) Írjuk át az (5.81) és (5.82) képleteket az

$$I_x E \varphi_B = M_{xB} L \quad \text{és} \quad I_x E v_B = -\frac{1}{2} M_{xB} L^2$$

alakba. Ha most az AB rúdon működő fiktív terhelésnek tekintjük az M_{hx} nyomatéki ábrát – lásd az 5.29. ábra felső részét –, akkor a φ_B szögelfordulás $I_x E$ -szerese ebből a fiktív terhelésből adódó nyíróerő a rúd végén, a B keresztmetszetben, hiszen a nyíróerő az $M_{xB}L$ fiktív eredővel egyezik meg.

(c) Ugyanígy kapjuk, hogy a v_B elmozdulás $I_x E$ -szerese a fiktív terhelésnek vett M_{hx} nyomatéki ábrából adódó hajlítónyomaték a B keresztmetszetben.

5.12. Adott valamely A keresztmetszet súlyponthoz kötött tehetetlenségi tenzorának mátrixa a súlyponti xy KR-ben:

$$\mathbf{I}_S = \begin{bmatrix} 5321 & -475 \\ -475 & 7601 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

Számítsa ki a főtehetetlenségi nyomatékokat, a főirányok irányvektorait majd írja fel a tehetetlenségi tenzor mátrixát a főirányok koordinátarendszerében.

Az

$I_I = I_x + I_y = 5321 + 7601 = 12922 \text{ cm}^4$ és $I_{II} = I_x I_y - I_{xy}^2 = 5321 \times 7601 - 475^2 = 40219296.0 \text{ cm}^8$ invariánsok és az (5.68a) képlet alapján felírható

$$I_n^2 - I_I I_n + I_{II} = I_n^2 - 12922 I_n + 40219296 = 0$$

karakterisztikus egyenlet

$$I_{1,2} = \frac{12922 \pm \sqrt{12922^2 - 4 \times 40219296}}{2} = \begin{cases} 7696 \\ 5226 \end{cases} \text{ cm}^4$$

gyökei adják a keresett főtehetetlenségi nyomatékokat. Ezek birtokában az (5.71a)₁ képlet alapján kapott

$$n_{x1}(I_x - I_1) - I_{xy}n_{y1} = -2375n_{x1} + 475n_{y1} = 0$$

egyenletből az

$$n_{y1} = 5n_{x1}$$

eredmény következik, amivel az (5.71a)₂-ből

$$n_{x1}^2 + n_{y1}^2 = n_{x1}^2 (1 + 25) = 1$$

azaz

$$n_{x1} = \frac{1}{\sqrt{26}} \quad \text{és} \quad n_{y1} = 5n_{x1} = \frac{5}{\sqrt{26}}.$$

Végeredményben

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}} (\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_y)$$

az első főirány irányvektora. Ennek ismeretében az (5.72) képletből

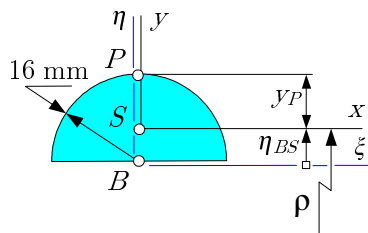
$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}} (5\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$$

a második főirány irányvektora. A főtengelyek $1 = \xi$, $2 = \eta$ koordinátarendszerében

$$\mathbf{I}_{S(\xi,\eta)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7696 & 0 \\ 0 & 5226 \end{bmatrix} \text{ cm}^4$$

a tehetetlenségi tenzor mátrixa.

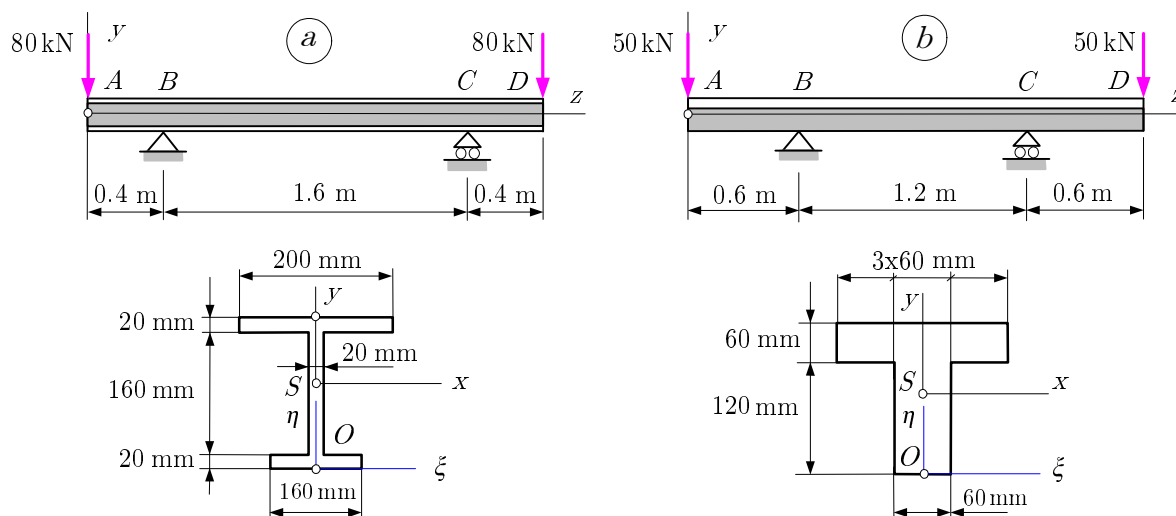
Gyakorlatok



5.30. ábra.

5.1. Az 5.30. ábrán vázolt és körívvé hajlított félkörke-resztmetszetű sárgaréz rúdnak 3 m a görbületi sugara. A görbületi középpont, amint az ábra is mutatja, a rúd tengelyvonala alatt helyezkedik el. Határozza meg a legnagyobb húzó és nyomó feszültséget, valamint a vízszintes átmérő hosszváltozását, ha $E_{\text{réz}} = 110 \text{ MPa}$ és $\nu = 0.25$. ($\eta_{BS} = 4r/3\pi$)

5.2. Az 5.31. ábrán vázolt alumínium rudakat két erő terheli. Az ábra feltünteti a BC szakasz egy K keresztmetszetét is. Határozza meg $\sigma_{\max}$ értékét a BC szakaszon belül és írja fel a feszültségi tenzor mátrixát az O pontban. Mekkora a BC szakasz görbületi sugara és a C keresztmetszet szögelfordulása? ($E_{\text{al}} = 70 \text{ GPa}$.)



5.31. ábra.