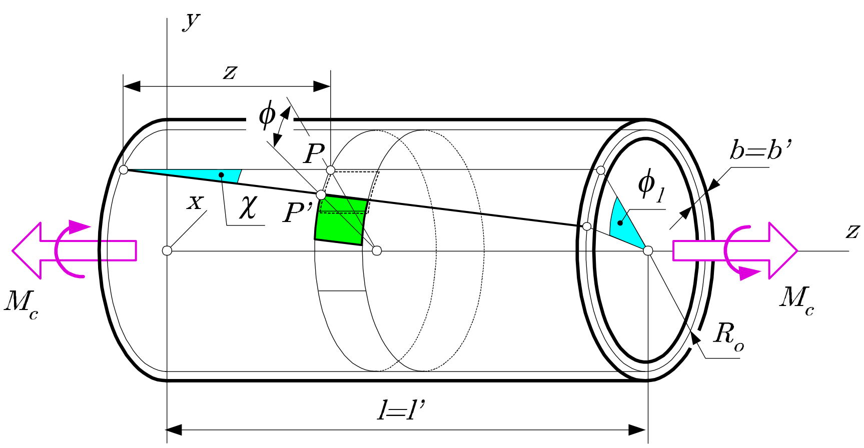
4. FEJEZET

A szilárdságtan alapkísérletei II. Kör- és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása

4.1. Vékonyfalú körgyűrű keresztmetszetű rúd csavarása

4.1.1. A kísérlet leírása és eredményei. Tekintsük a 4.1. ábrán vázolt l hosszúságú és b falvastagságú vékonyfalú csövet. A cső külső és belső palástjának rendre $R_o + b/2$ illetve $R_o - b/2$ a sugara, az R_o sugarú belső hengerfelület pedig a cső úgynevezett középfelülete.

Amint azt az ábra is szemlélteti a cső $z = 0$ koordinátájú keresztmetszetét a $-M_c\mathbf{e}_z$, a $z = l$ koordinátájú keresztmetszetét pedig az $M_c\mathbf{e}_z$ csavarónyomaték terheli. Az M_c csavarónyomaték nagyságát úgy választjuk meg, hogy a cső alakváltozása lineárisan rugalmas. Bár az ábra nem tüntet fel támaszokat, a cső $z = 0$ keresztmetszete, feltevés szerint, helyben marad.



4.1. ábra.

A cső középfelületén gondolatban egységnyi oldalélű négyzetes hálót készítünk, oly módon, hogy a hálót egyrészről a z tengelyre merőleges síkok metszik ki az R_o sugarú hengerfelületből, másrészt pedig a hengerfelület z tengellyel párhuzamos alkotói adják. Az ábra nem tünteti fel a teljes hálót, csupán egy kis részét szemlélteti. A P sarokpontú négyzetet folytonos és szaggatott vonallal rajzoltuk meg.

Megjegyezzük, hogy a próbatest geometriai viszonyai miatt HKR alkalmazása kívánatos mind a kísérleti megfigyelések rögzítése, mind pedig a feszültségek egyensúlyi követelmények alapján történő számítása során.

A megfigyelések alapján a terhelések hatása az alábbiakban összegezhető:

1. Az egyes keresztmetszetek merev lapként fordulnak el a z tengely körül és az elfordulás során megmaradnak a saját síkjukban. Következésképp nem változik sem a cső vastagsága, sem a középfelület R_o sugara, sem pedig a cső hossza a deformáció során. Ez azt jelenti, hogy

$$l = l', \qquad b = b' \qquad \text{és} \qquad R_o = R_o'.$$

Bár az ábrán nincs megrajzolva a cső külső és belső átmérője, ezeket a mennyiségeket itt és a továbbiakban rendre D és d jelöli. Nyilvánvaló, hogy ezek az értékek is változatlanok maradnak, azaz

$$D = D' \qquad \text{és} \qquad d = d'.$$

2. Az egyes keresztmetszetek $\varPhi$ szögelfordulása egyenesen arányos a keresztmetszet z koordinátájával:

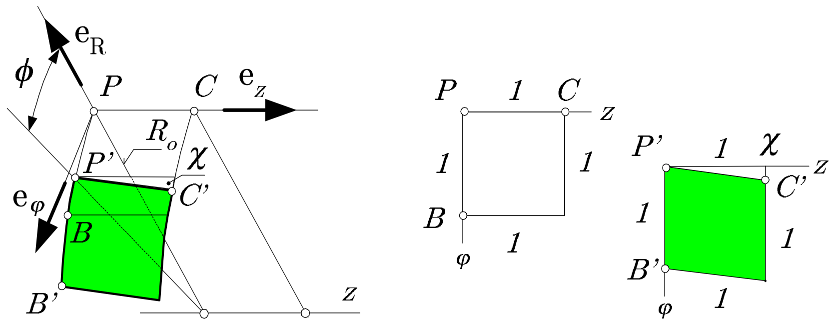
$$\varPhi = \vartheta z\ , \tag{4.1}$$

ahol a ϑ állandó az u.n. fajlagos elcsavarodási szög.

Mivel alapfeltevés, hogy kicsik az elmozdulások és alakváltozások, kicsinek vehetjük az egyes keresztmetszetek z tengely körüli elfordulását is. Ez esetben a P pont mozgását adó P és P' közötti $\varPhi R_o$ ív jó közelítéssel a P ponthoz tartozó $\mathbf{r}_{PP'}$ elmozdulásvektor hossza. Bár az erős nagyítással rajzolt 4.2. ábra nem tünteti fel magát az $\mathbf{u} = \mathbf{r}_{PP'}$ elmozdulásvektort nyilvánvaló az ábráról, hogy az $\mathbf{e}_\varphi$ irányú vektornak vehető. A (4.1) képletet is figyelembevéve

$$\mathbf{u} = \varPhi R_o \underbrace{\mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R} = \vartheta z \mathbf{e}_z \times \underbrace{R_o \mathbf{e}_R}_{\mathbf{R}_o} = \vartheta z \mathbf{e}_z \times \mathbf{R}_o \tag{4.2}$$

az elmozdulásvektor az R_o sugarú kör pontjaiban.



4.2. ábra.

Vékonyfalú cső esetén eltekinthetünk a fajlagos nyúlások és a fajlagos szögváltozások valamint a normál és nyírófeszültségek cső vastagsága menti megváltozásától. Ez azt jelenti, hogy ezek a mennyiségek függetlennek vehetők az R sugártól.

Visszaidézve a 2.2. Mintapélda (2.101) képletét

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_R & \boldsymbol{\alpha}_\varphi & \boldsymbol{\alpha}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{R\varphi} & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\varphi R} & \varepsilon_\varphi & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

az alakváltozási tenzor mátrixa HKR-ben. Az alábbiakban meghatározzuk a kísérleti megfigyelések alapján az alakváltozási tenzor mátrixában álló fajlagos nyúlásokat és szögtorzulásokat.

Láttuk, hogy nem változik az egyes keresztmetszetek távolsága az alakváltozás során. Mivel a keresztmetszetek merev lapként fordulnak el $\mathbf{e}_\varphi$ irányban sincs hosszváltozás. Következőleg:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_\varphi = 0\ . \tag{4.4}$$

Nem változik a cső falvastagsága sem. Ez azt jelenti, hogy

$$\varepsilon_R = 0\ . \tag{4.5}$$

A 4.2. ábra érzékelhetően szemlélteti, hogy a P pontban az R és φ anyagi vonalak (a sugár és a PB ív, vagy ami ugyanaz az $\mathbf{e}_R$ és $\mathbf{e}_\varphi$ egységvektorok) közötti $\pi/2$ nagyságú szög változatlan, azaz derékszög marad az R és φ anyagi vonalak deformált helyzetében is, hiszen a P' pontban derékszög a sugár és a $P'B'$ ív által bezárt szög. Ugyanerről az ábráról állapítható meg az is, hogy az R és z anyagi vonalak (a sugár és a PC egyenesszakasz) közötti $\pi/2$ nagyságú szög a deformált helyzetben derékszög marad, hiszen az utóbbi szög a P' pontbeli sugár és a középfelületen fekvő $P'C'$ csavarvonalszakasz által bezárt szög. Következésképp zérus értékűek a vonatkozó fajlagos szögváltozások:

$$\gamma_{R\varphi} = \gamma_{Rz} = 0\,. \tag{4.6}$$

Az egyetlen nem zérus fajlagos szögváltozás a z és φ anyagi vonalak (a PB és PC ívek) közötti $\pi/2$ szög csökkenése χ radiánnal. A 4.1. ábra és a (4.1) összefüggés szerint $PP' = \chi z = R_o \Phi = R_o \vartheta z$, következésképp

$$\gamma_{\varphi z} = \chi = R_o \vartheta. \tag{4.7}$$

A (4.4)-(4.7) fajlagos nyúlásokkal és szögváltozásokkal az alakváltozási tenzor mátrixát adó (4.3) képletből az

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \gamma_{\varphi z} = \gamma = \chi = R_o \vartheta \tag{4.8}$$

eredmény következik. Eszerint az alakváltozási tenzor mátrix mátrixa állandó.

A feszültségek meghatározása során a feszültségi tenzor

$$\underline{\mathbf{T}} = \left[\begin{array}{ccc} \underline{\boldsymbol{\rho}}_R & \underline{\boldsymbol{\rho}}_\varphi & \underline{\boldsymbol{\rho}}_z \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ \tau_{\varphi R} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

mátrixában álló σ_R, σ_φ és σ_z normálfeszültségeket, valamint a $\tau_{\varphi R} = \tau_{R\varphi}$, $\tau_{zR} = \tau_{Rz}$ és $\tau_{z\varphi} = \tau_{\varphi z}$ nyírófeszültségeket keressük. Mivel állandó az alakváltozási tenzor mátrixa, állandónak kell lennie a feszültségi tenzor mátrixának is. A keresett $\sigma_R, \sigma_\varphi, \ldots, \tau_{\varphi z}$ feszültségkoordináták meghatározása során vegyük figyelembe, hogy a cső külső palástján ébredő $\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{\rho}_R$ feszültségvektor meg kell, hogy egyezzen az ott működő felületi terhelés $\mathbf{f}$ sűrűségvektorával, ami azonban zérus hiszen terheletlen a cső palástja. Következésképp

$$\boldsymbol{T} \cdot \mathbf{e}_R = \boldsymbol{\rho}_R = \sigma_R \mathbf{e}_R + \tau_{\varphi R} \mathbf{e}_\varphi + \tau_{zR} \mathbf{e}_z = 0\,. \tag{4.10}$$

Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy a fentiek szerint állandónak vehetők a σ_R, $\tau_{\varphi R}$ és τ_{zR} feszültségkoordináták, akkor a (4.10) egyenletből a

$$\sigma_R = 0, \qquad \tau_{\varphi R} = 0, \qquad \tau_{zR} = 0 \tag{4.11}$$

eredményt kapjuk. További összefüggések adódnak abból a feltételből, hogy a vékonyfalú cső bármely pozitív keresztmetszetére igaz, hogy a $\rho_z = \tau_{\varphi z} \mathbf{e}_\varphi + \sigma_z \mathbf{e}_z$ feszültségek – itt is emlékeztetünk arra a lentiekben kihasználás ra kerülő körülményre, hogy a $\tau_{\varphi z}$ és σ_z állandó – egyenértékűek a keresztmetszet igénybevételeivel, azaz $N = 0$ és $M_c \neq 0$. Az egyenértékűséggel kapcsolatos első, vagyis a (2.89) összefüggésből

$$N = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{F}_S = \int_A \mathbf{e}_z \cdot \rho_z \mathrm{d}A = \int_A \mathbf{e}_z \cdot (\tau_{\varphi z} \mathbf{e}_\varphi + \sigma_z \mathbf{e}_z)\, \mathrm{d}A = \int_A \sigma_z \,\mathrm{d}A = \sigma_z A = 0\,,$$

ahonnan

$$\sigma_z = 0 \tag{4.12}$$

a z irányú normálfeszültség. Ami a belső erőrendszer nyomatékát illeti vegyük figyelembe, hogy vékonyfalú cső esetén jó közelítéssel fennállnak az

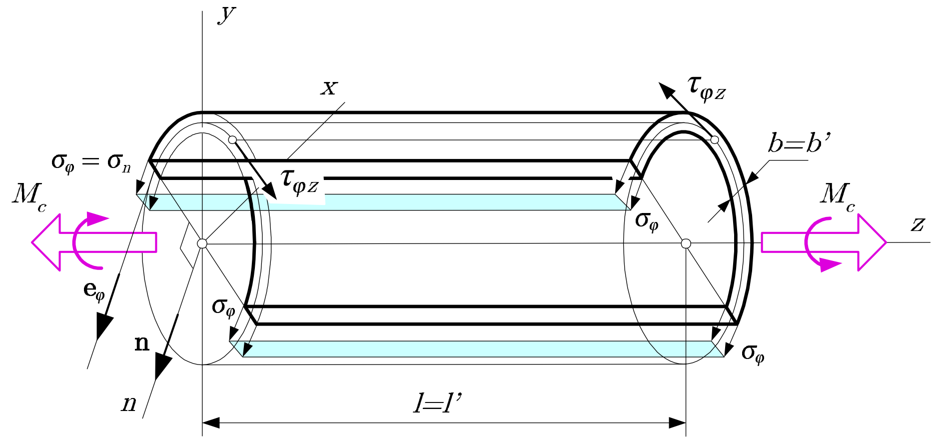
$$R \simeq R_o\,, \qquad \mathrm{d}A = b\,\mathrm{d}s = bR_o\,\mathrm{d}\varphi$$

összefüggések. Ha ezeket is felhasználjuk, akkor az egyenértékűséggel kapcsolatos második, azaz a (2.90) összefüggésből az

$$M_c = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{M}_S = \mathbf{e}_z \cdot \int_A \mathbf{R} \times \boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A = \mathbf{e}_z \cdot \int_A R_o \tau_{\varphi z} \underbrace{\mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{e}_z} \mathrm{d}A = R_o \tau_{\varphi z} b R_o \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = R_o \tau_{\varphi z} \underbrace{2\pi b R_o}_{A_k}$$

eredmény következik, ahonnan azonnal megkapjuk a keresett $\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültséget:

$$\boxed{\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{R_o A_k}, \qquad A_k = 2\pi b R_o\,.} \tag{4.13}$$



4.3. ábra.

A σ_φ normálfeszültség számításához a z tengelyen átmenő és $\mathbf{n}$ normálisú sík segítségével kettévágjuk gondolatban a vékonyfalú csövet és az így kapott egyik félcső – ezt a 4.3. ábra szemlélteti – egyensúlyából indulunk ki. A keresett normálfeszültséget az n irányban felírt vetületi egyenletből számítjuk. A számítás során az alábbiakat vegyük figyelembe:

1. A félcső felületének átmetszéssel kapott $\mathbf{n}$ normálisú téglalapjain $\rho_n = \sigma_n \mathbf{n} + \tau_{nz}\mathbf{e}_z$ a feszültségvektor és $\sigma_n = \sigma_\varphi$. Megjegyezzük, hogy az ábra csak a vetületi egyenletben szerepet játszó $\sigma_n = \sigma_\varphi$ feszültségkoordináta megoszlását tünteti fel.
2. A félcső palástja terheletlen.
3. A $z = 0$ és $z = l$ véglapokon ébredő és az azonos R és φ koordinátájú pontokhoz tartozó $\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültségek vektoriális összege – az ábra egy ilyen pontpárt tüntet fel – zérus.

A fentiek alapján felírt

$$\sum F_n = 2lb\sigma_\varphi + \underbrace{\left[\begin{array}{l}\text{A palástterhelés eredőjének}\\ n \text{ irányú összetevője}\end{array}\right]}_{=0} + \underbrace{\left[\begin{array}{l}\text{A } \tau_{\varphi z} \text{ nyírófeszültségek eredőjének}\\ n \text{ irányú összetevője}\end{array}\right]}_{=0} = 0$$

vetületi egyenletből

$$\sigma_\varphi = 0\,. \tag{4.14}$$

A (4.11), (4.12), (4.13) és (4.14) képletek felhasználásával

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}; \qquad \tau_{\varphi z} = \tau = \frac{M_c}{R_o A_k} \tag{4.15}$$

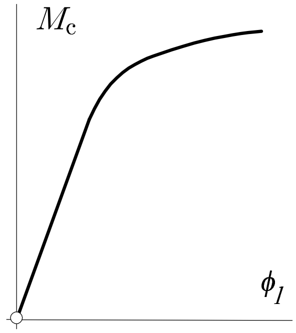
a feszültségi tenzor mátrixa. Az utóbbi képlet alapján azt a feszültségi állapotot, amikor csak egy nyírófeszültség és duális párja különbözik zérustól *tiszta nyírásnak* nevezzük.

4.1.2. Csavaródiagramm. Hooke törvény nyírófeszültségekre. A húzókísérlet kapcsán megrajzolt $N = N(\lambda)$ diagramnak a vékonyfalú cső csavarása kapcsán az $M_c = M_c(\Phi_l)$ diagram a párja – 4.4. ábra. Az $M_c(\Phi_l)$ függvény alakja egyrészt a vékonyfalú cső anyagától, másrészt a cső geometriai méreteitől függ. A vékonyfalú cső anyagára jellemző diagramhoz úgy jutunk – hasonlóan a húzókísérlet esetéhez – hogy, fajlagos, azaz a vékonyfalú cső méreteitől független mennyiségeket mérünk fel az egyes koordinátatengelyekre. Ez azt jelenti, hogy a vízszintes tengely mentén a

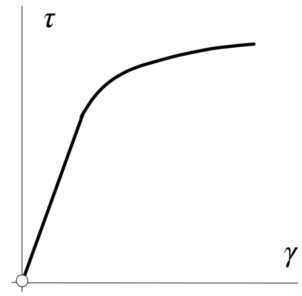
$$\gamma = \gamma_{\varphi z} = \chi = R_o \frac{\Phi_l}{l} = R_o \vartheta$$

fajlagos szögváltozást, a függőleges tengely mentén pedig a

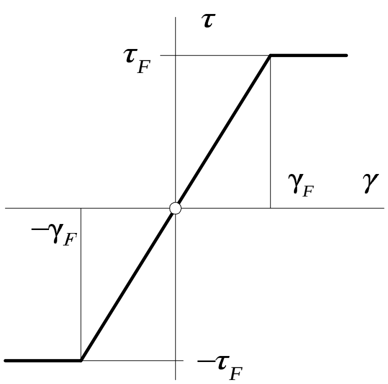
$$\tau = \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{R_o A_k}$$



4.4. ábra.



4.5. ábra.



4.6. ábra.

nyírófeszültséget ábrázoljuk. A vékonyfalú cső anyagára jellemző $\tau = \tau(\gamma)$ görbét *csavaródiagramnak* nevezzük – 4.5. ábra. A csavaródiagram jellemző tulajdonságai ugyanazok, mint amelyekkel a 3.4., 3.5. és 3.6. szakítódiagramok kapcsán a 3.2.2. szakaszban megismerkedtünk Ezeket ehelyütt nem ismételjük meg. Az ideális testek csavaródiagramjai a 3.7. ábrán vázolt szakítódiagramok alapján rajzolhatók meg. A 4.6. ábra a későbbiek kedvéért a lineárisan rugalmas-ideálisan képlékeny test csavaródiagramját mutatja. A diagramon τ_F a folyáshatár és γ_F a folyáshatárhoz tartozó fajlagos szögváltozás. A lineárisan rugalmas viselkedés tartományában fennáll a

$$\boxed{\tau = G\gamma} \tag{4.16}$$

egyenlet, ahol G a lineáris szakasz meredeksége vagy más elnevezéssel *nyírási rugalmassági modulus.* Ez a mennyiség anyagjellemző. Kiolvasható a képletből az is, hogy a G feszültségdimenziójú mennyiség. Később formálisan igazolni fogjuk, hogy a méréssel kapott G, valamint az (3.19) képletből az E és ν-vel kifejezett G ugyanaz a mennyiség. A (4.16) egyenletet a *csúsztatófeszültségekkel kapcsolatos egyszerű Hook törvénynek* nevezzük. Az elnevezés arra utal, hogy a fenti egyenlet mindig fennáll a lineáris viselkedés tartományában függetlenül attól, hogy milyen igénybevétel vagy terhelés hozza létre a tiszta nyírást. A (4.16) képlet felhasználásával vetve egybe az alakváltozási és feszültségi tenzor mátrixait adó (4.8) és (4.14) összefüggéseket írhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2G}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

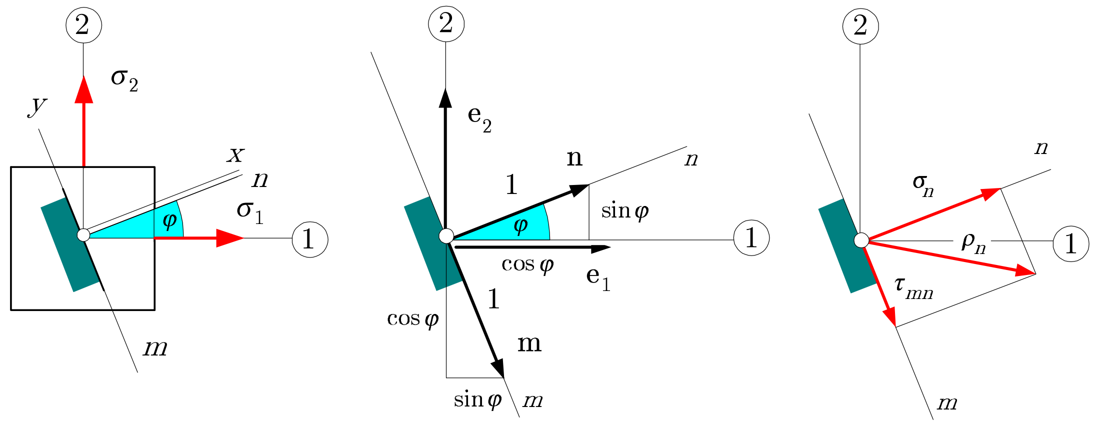
vagy

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2G}\boldsymbol{T}\,, \tag{4.17}$$

ami a csúsztatófeszültségekkel kapcsolatos Hook törvény tenzoriális alakja.

4.1.3. A feszültségi állapot szemléltetése. Részleges Mohr-féle kördiagram. Tegyük fel, hogy ismeretesek a feszültségi tenzor főirányai. A 4.7. ábra baloldala a főtengelyek KR-ében és a harmadik főirány felől nézve szemlélteti az elemi kockán a feszültségi állapotot. Ezen az ábrarészleten jelenik meg először a gondolatmenet kifejtésében később szerepet kapó $x = n$ és $y = -m$ tengelypár is.

Legyenek az 1 és 2 jelű főtengelyek által kifeszített fősíkban fekvő n és m irányok merőlegesek egymásra. Azt is feltételezzük, hogy a pozitív m féltengely az óramutató járásával ellentétes irányban forgatható be a pozitív n féltengelybe, azaz $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \mathbf{e}_3$; $|\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 1$. A 4.7. ábra középső részlete az n és m egyeneseket, a vonatkozó $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ egységvektorokat, a főirányokat adó $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}_1$ és $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n}_2$ egységvektorokat, továbbá az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{n}$ közötti φ szöget szemlélteti.



4.7. ábra.

Tekintsük az $\mathbf{n}$ normálisú lapon ébredő $\rho_n = \sigma_n \mathbf{n} + \tau_{mn}\mathbf{m}$ feszültségvektort – 4.7. ábra jobboldali ábrarészlet. A továbbiakban arra a kérdésre keressük a választ, hogy mi a σ_n és τ_{mn} feszültségkoordináták által meghatározott pontok mértani helye a σ_n, τ_{mn} síkon. Nyilvánvaló, hogy mind σ_n mind pedig τ_{mn} az n és m irányokat meghatározó φ szög mint paraméter függvénye.

A számításokat a főtengelyek KR-ében végezzük. Amint azt már láttuk – lásd a feszültségi tenzor (2.88) alatti előállítását – ebben a KR-ben

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

a feszültségi tenzor mátrixa.

A középső ábrarészlet alapján

$$\mathbf{n} = \cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{m} = \sin\varphi\,\mathbf{e}_1 - \cos\varphi\,\mathbf{e}_2\,.$$

Következésképp

$$\underline{\rho}_n = \underline{\underline{\mathbf{T}}}\,\underline{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1\cos\varphi \\ \sigma_2\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

a feszültségvektor mátrixa, amivel

$$\sigma_n = \underline{\mathbf{n}}^T \underline{\rho}_n = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1\cos\varphi \\ \sigma_2\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_1\cos^2\varphi + \sigma_2\sin^2\varphi \tag{4.18a}$$

a keresett normálfeszültség és

$$\tau_{mn} = \underline{\mathbf{m}}^T \underline{\rho}_n = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1\cos\varphi \\ \sigma_2\sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos\varphi\,\sin\varphi \tag{4.18b}$$

a keresett nyírófeszültség. A trigonometriából jól ismert

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,, \qquad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \qquad \text{és} \qquad \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \tag{4.19}$$

képletek helyettesítésével a (4.18a,b) képletekből némi rendezéssel a

$$\sigma_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\varphi\,, \tag{4.20a}$$

$$\tau_{mn} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\varphi \tag{4.20b}$$

egyenleteket kapjuk. Ez a két egyenlet kör paraméteres egyenlete[1] a σ_n, τ_{mn} síkon. A kör közepe a σ_n tengelyen van, a kör középpontjának $(\sigma_1+\sigma_2)/2$ az abcisszája, a kör sugara pedig $R = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$. Az

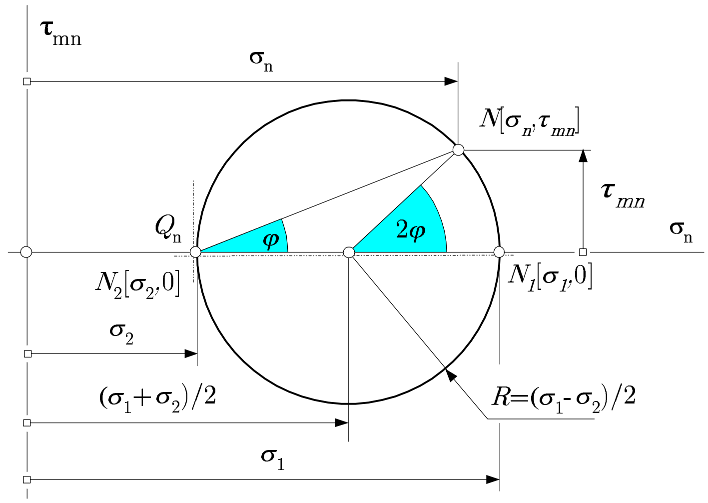
[1]Ismeretes, hogy az $x - u = R\cos 2\varphi$; $y = R\sin 2\varphi$ egyenletkettős olyan kör paraméteres egyenlete, amelynek középpontja az x tengelyen van, u a középpont abcisszája és R a kör sugara. A kör közepéből a körön levő x abcisszájú és y ordinátájú pontba rajzolt sugár 2φ szöget zár be a pozitív x tengellyel. A szöget óramutató járásával ellentétesen kell felmérni.

adott **n** normálishoz tartozó $N[\sigma_n,\, \tau_{mn}]$ körpontot pedig úgy kapjuk meg, hogy olyan sugarat rajzolunk a kör közepéből kiindulva, amely 2φ szöget zár be az abcissza tengellyel.

Kiküszöbölhető a φ paraméter, ha a jobb és baloldalak négyzetre emelése után összeadjuk a két egyenletet:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{mn}^2 = \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \tag{4.21}$$

Az így kapott egyenlet ugyancsak kör egyenlete.

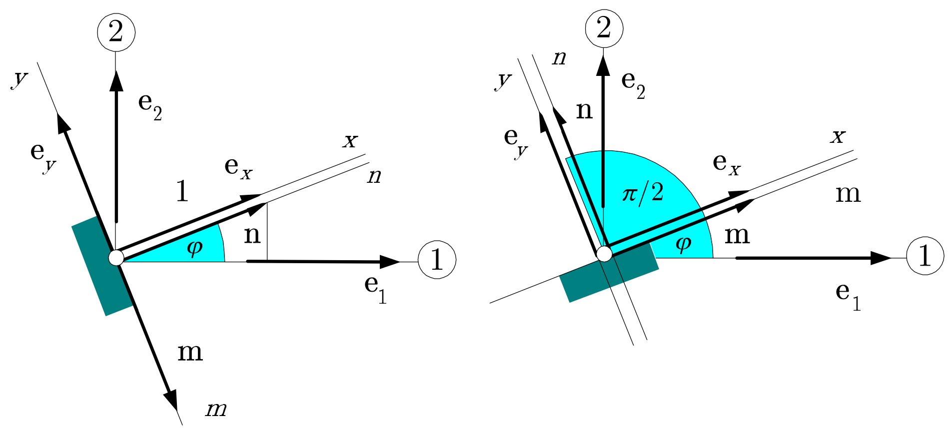


4.8. ábra.

A fentiek alapján megszerkeszthető a kör, ha ismeretesek a σ_1 és σ_2 főfeszültségek. Első lépésben megrajzoljuk az $N_1[\sigma_1, 0]$ és $N_2[\sigma_2, 0]$ pontokat. Második lépésben megszerkesztjük az N_1 és N_2 pontokat összekötő egyenesszakasz felezési pontját. Ez lesz a kör középpontja. Mivel mind az N_1, mind pedig az N_2 rajta van a körön mostmár megrajzolható maga a kör is. Az $N[\sigma_n,\, \tau_{mn}]$ körpont pedig az abcisszatengellyel 2φ szöget alkotó körsugár berajzolásával adódik.

Egy további lehetőséget kapunk az N szerkesztésére, ha az N_1 ponton keresztül az $\mathbf{e}_1$ főiránnyal az N_2 ponton keresztül pedig az $\mathbf{e}_2$ főiránnyal húzunk párhuzamos egyenest – szaggatott vonalak – majd Q_n-el jelölve metszésüket, a Q_n ponton át az n normálissal párhuzamosan egy további egyenest húzunk. Mivel ez az egyenes φ szöget zár be az abcisszatengellyel a kerületi és középponti szögek tétele értelmében az N pontban metszi a kört. A Q_n pontot normálisok pólusának szokás nevezni.

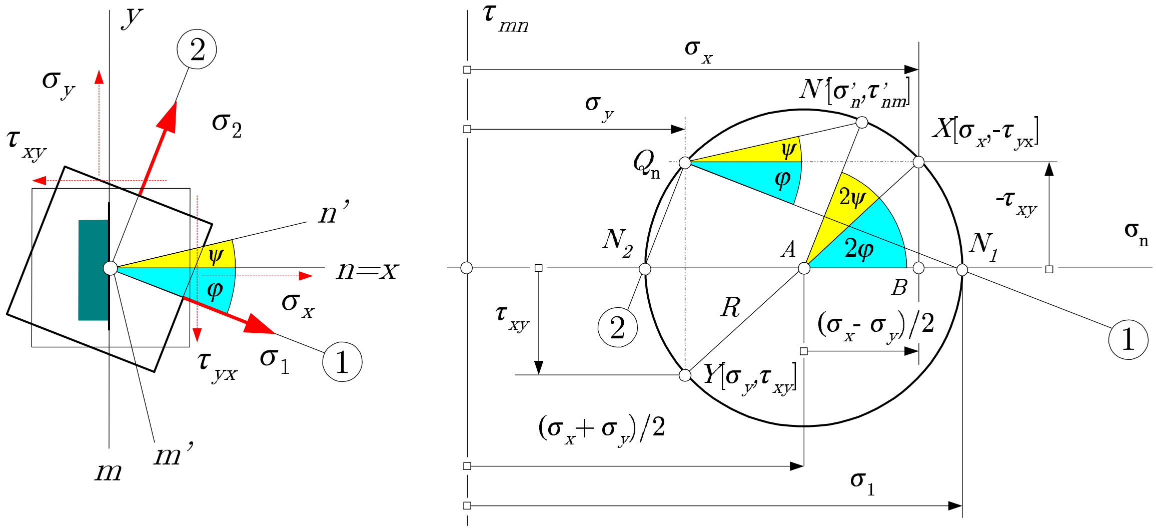
A bemutatott szerkesztés csak akkor alkalmazható, ha ismeretesek a σ_1 és σ_2 főfeszültségek. A szerkesztés szabályainak általánosítása kedvéért azt a kérdést vizsgáljuk a továbbiakban, hogy miként kell eljárni, ha nem ismerjük előre a σ_1 és σ_2 főfeszültségek értékét. A felvetett kérdés megoldásában lépésről lépésre haladunk előre.



4.9. ábra.

Tegyük fel előszörre, hogy $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$ és $\mathbf{m} = -\mathbf{e}_y$. Ez esetben $\sigma_n = \sigma_x$, és (4.20b) szerint $\tau_{mn} = -\tau_{yx} > 0$, a vonatkozó körpontot pedig az $X[\sigma_x,\, -\tau_{yx}]$ pont adja – a viszonyokat a 4.9. ábra baloldali része, és a 4.10. ábra szemlélteti. Az X pontba mutató körsugár nyilvánvalóan 2φ szöget zár be az abcisszatengellyel.

Tegyük fel másodszorra, hogy $\mathbf{n} = \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{m} = \mathbf{e}_x$. Ez esetben $\sigma_n = \sigma_y$, $\tau_{mn} = \tau_{xy}$ a vonatkozó körpontot pedig az $Y[\sigma_y, \tau_{xy}]$ pont adja – ezeket a viszonyokat a 4.9. ábra jobboldali része és a 4.10. ábra szemlélteti. Mivel ekkor az n irány $\varphi + \pi/2$ nagyságú szöget zár be az $\mathbf{e}_1$ főiránnyal az Y pontba mutató körsugár $2\varphi+\pi$ szöget zár be az abcisszatengellyel. Következésképp az X és Y pontok ugyanazon a körátmérőn fekszenek. Ez egyben azt is jelenti, hogy azonnal megszerkeszthető a kör, ha ismerjük az X és Y pontok helyét a σ_n és τ_{mn} síkon. A 4.10. ábra szemlélteti az X és Y pontokat valamint magát a megrajzolt kört is. Az ábra baloldalán ismét látható a feszültségi állapotot szemléltető, és a 4.7. ábra baloldali részén már korábban ábrázolt, de a további magyarázat kedvéért az óramutató járásával egyező



4.10. ábra.

irányban elforgatott elemi kocka. A forgatás úgy történt, hogy a vízszintes tengely legyen az x tengely. Figyeljük azt is meg, hogy az elforgatott elemi kocka mellett halványan megrajzoltuk az xyz KR-beli elemi kockát is, amelyen halványan feltüntettük az ismertnek tekintett σ_x, σ_y és τ_{xy} feszültségkoordinátákat. Mivel az első esetben az m irány ellentétes az y iránnyal és τ_{mn} pozitív volt τ_{xy} negatív a feladat viszonyai között. Az ugyanezen ábrarészleten berajzolt n' irány ψ szöget zár be az x és a $\varphi + \psi$ szöget az 1 jelű főtengellyel. Az n' irányra merőleges m' irány lefelé és kissé jobbra mutat. Következőleg az $N'[\sigma'_n, \tau'_{nm}]$ körponthoz tartozó körsugár $2(\varphi + \psi)$ nagyságú szöget alkot a σ_n tengellyel.

Mivel az XY egyenesszakasz körátmérő az X ponton keresztül az x tengellyel, az Y ponton keresztül pedig az y tengellyel párhuzamosan szaggatott vonallal megrajzolt egyenesek, Thalész tétele értelmében a körön metszik egymást. Jelölje Q_n a két egyenes metszéspontját. Vegyük észre, hogy a Q_nXN' és az AXN' szögek ugyanazon az íven nyugvó kerületi és középponti szögek. Következőleg a Q_nN' egyenes párhuzamos az n' egyenessel. Ez megfordítva azt jelenti, hogy a Q_n pont segítségével bármilyen n' felületi normális és a hozzá tartozó m' esetén megszerkeszthető az $N'[\sigma'_n, \tau'_{nm}]$ körpont, oly módon, hogy párhuzamost húzunk a Q_n körponton keresztül az n' egyenessel.és meghatározzuk a párhuzamos és a kör újabb metszéspontját. Utóbbi tulajdonsága miatt a Q_n pont most is a normálisok pólusa nevet viseli.

A Q_n pont szerepével kapcsolatos gondolatmenet alapján nyilvánvaló, hogy

– a Q_nN_1 egyenes főiránnyal párhuzamos egyenes, a jelen esetben az 1 jelű főiránnyal,
– a Q_nN_2 egyenes főiránnyal párhuzamos egyenes, a jelen esetben az 2 jelű főiránnyal,
– a Q_nN_1X szög a vízszintes és főirány, a jelen esetben az 1 jelű főirány, közötti szög.

Az ABX derékszögű háromszög segítségével kiszámítható a kör sugara

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}\,,$$

amivel az ábra alapján

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R \qquad \text{és} \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R$$

a két főfeszültség. Az is leolvasható az ábráról, hogy

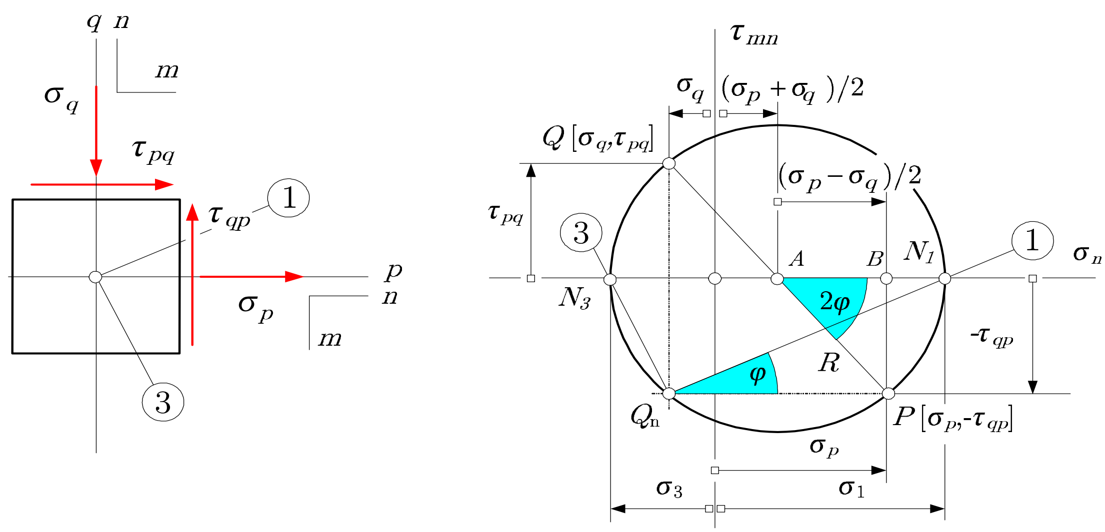
$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\,|\tau_{xy}|}{\sigma_x - \sigma_y}\,.$$

Az bemutatott gondolatmenet alapján minden olyan esetben meghatározhatók a főfeszültségek és a főirányok, ha ismeretes a feszültségi tenzor egy főiránya.

A szerkesztésben megjelenő mértani helyet, azaz a σ_n, τ_{mn} pontpárok által alkotott kört, a szerkesztés lehetőségét felismerő és elsőként leíró Mohr után részleges Mohr körnek szokás nevezni.

4.1.4. A szerkesztés lépéseinek összegezése. Az alábbiak tömören és minden szóbajöhető esetre alkalmazható sablont adnak a szerkesztésre. A sablon a 4.1.3. szakasz gondolatmenetének lényegén alapul; azon, hogy ismeretes egy főfeszültség – mindegy, hogy melyik –, azon, hogy a kör átmérőjét az elemi kocka más két lapján ébredő feszültségvektor σ_n és τ_{mn} koordinátái határozzák meg, függetlenül attól milyen betűvel jelöltük eredetileg ezen lapok normálisait, továbbá azon, hogy a Q_n pont és a főirányok szerkesztése is független a két lap normálisának jelölésére felhasznált betűjelektől.

Legyen a vizsgált test egy adott pontjában ismeretes a feszültségállapot. Tételezzük fel, hogy az ezen a ponton átmenő p, q és r koordinátatengelyek kartéziuszi KR-t alkotnak (a fentiekkel összhangban a p, q, r, valójában az x, y, z, vagy az y, z, x, vagypedig a z, x, y koordinátatengelyeket jelenti). Legyen ismert ugyanebben a pontban a feszültségi állapot: $\boldsymbol{\rho}_r = \sigma_r \mathbf{e}_r$ (vagyis az r irány főirány), $\sigma_p > 0$, $\tau_{pq} = \tau_{qp} > 0$ és $\sigma_q < 0$.



4.11. ábra.

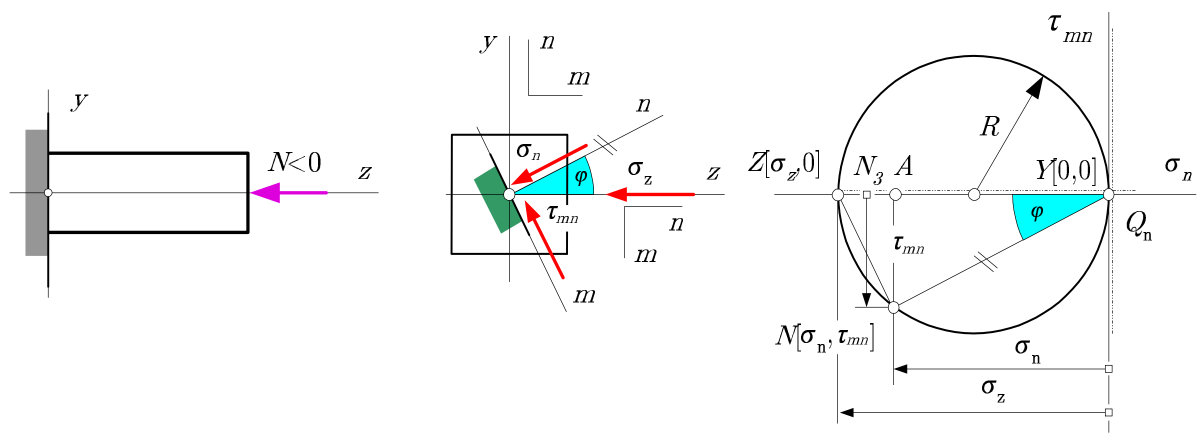
A szerkesztés lépéseit az alábbiak összegezik:

1. Megrajzoljuk az ismert r főirány felől nézve az elemi kockát. Ügyeljünk eközben arra, hogy az r-t követő első koordinátairány, azaz a p vízszintes, a q pedig függőleges irányba mutasson az ábránkon, úgy ahogyan azt a 4.11. ábra baloldali része szemlélteti.
2. Meghatározzuk σ_n, és τ_{mn} feszültségkoordinátákat a p és q normálisú oldallapokon. Ezt az segíti, hogy berajzoljuk a p normálisú oldallapon az $n = p$ és $m = -q$, a q normálisú lapon pedig az $n = q$ és $m = p$ koordinátairányokat. Így azonnal megállapítható a baloldali ábrarészlet elemi kockájának felhasználásával, hogy a σ_n, τ_{mn} sík $P[\sigma_p, -\tau_{qp}]$ és $Q[\sigma_q, \tau_{pq}]$ pontjai határozzák meg a kör átmérőjét.
3. Bejelöljük a $P[\sigma_p, -\tau_{qp}]$ és $Q[\sigma_q, \tau_{pq}]$ pontokat a σ_n, τ_{mn} koordinátasíkon, majd megrajzoljuk a PQ körátmérőt. A PQ egyenesszakasz és a σ_n tengely metszése adja a kör közepét. A kör és a σ_n tengely metszéspontjai pedig kiadják a keresett főfeszültségeket. Mivel a főfeszültségek nagyság szerint rendezettek – $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ – és a $\sigma_r = 0$ normálfeszültség főfeszültség a szerkesztés a jelen esetben az 1 és 3 jelű főfeszültségeket adja ki.
4. A P ponton keresztül a p normálissal, a Q ponton pedig a q normálissal húzunk párhuzamost. A két egyenes a kör Q_n pontjában metszi egymást. A Q_nN_1 és Q_nN_3 egyenesek megadják az 1 és 3 jelű főirányokat. Ezeket az elemi kocka felülnézeti képén is érdemes berajzolni.

5. Kiszámítjuk az ábra alapján az R, σ_1, σ_3 és φ értékeket. Ez a számítás az ábráról leolvasható
$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_p - \sigma_q}{2}\right)^2 + \tau_{pq}^2}\,, \tag{4.22}$$
$$\sigma_1 = \frac{\sigma_p + \sigma_q}{2} + R\,, \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_p + \sigma_q}{2} - R \tag{4.23}$$
és
$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\,|\tau_{pq}|}{\sigma_p - \sigma_q}\,. \tag{4.24}$$
képletek segítségével végezhető el.
6. Ha adott egy felületelem n' normálisa és a hozzátartozó m' irány, akkor az $N'[\sigma'_n, \tau'_{mn}]$ pontot a Q_n ponton át az n'-vel párhuzamosan húzott egyenes és a kör metszése adja.

Megjegyezzük, hogy a zsúfoltság elkerülése érdekében nem tünteti fel az utolsó lépést a 4.11. ábra. Visszautalunk ehelyett a 4.10. ábrára és megjegyezzük, hogy a feszültségi tenzor segítségével pontosabban határozható meg a σ'_n és τ'_{mn} számítással, mint szerkesztéssel. A szerkesztést és a szerkesztésen alapuló (4.22), (4.23) és (4.24) képleteket elsősorban a főfeszültségek és főirányok meghatározására érdemes használni.

4.1.5. A szerkesztés két alkalmazása. Összefüggés a rugalmassági állandók között. Két egyszerű példa esetén mutatjuk be a szerkesztés alkalmazását. A 4.12. ábra nyomásra igénybevett zömök rudat szemléltet. A középső ábrarészlet a negatív x tengely felől nézve mutatja az elemi kockán a feszültségi állapotot, valamint a szerkesztéshez szükséges segédvonalakat. A 4.12. és a 4.11. ábra egybevetése alapján a z és y koordinátatengelyek felelnek meg a p és q

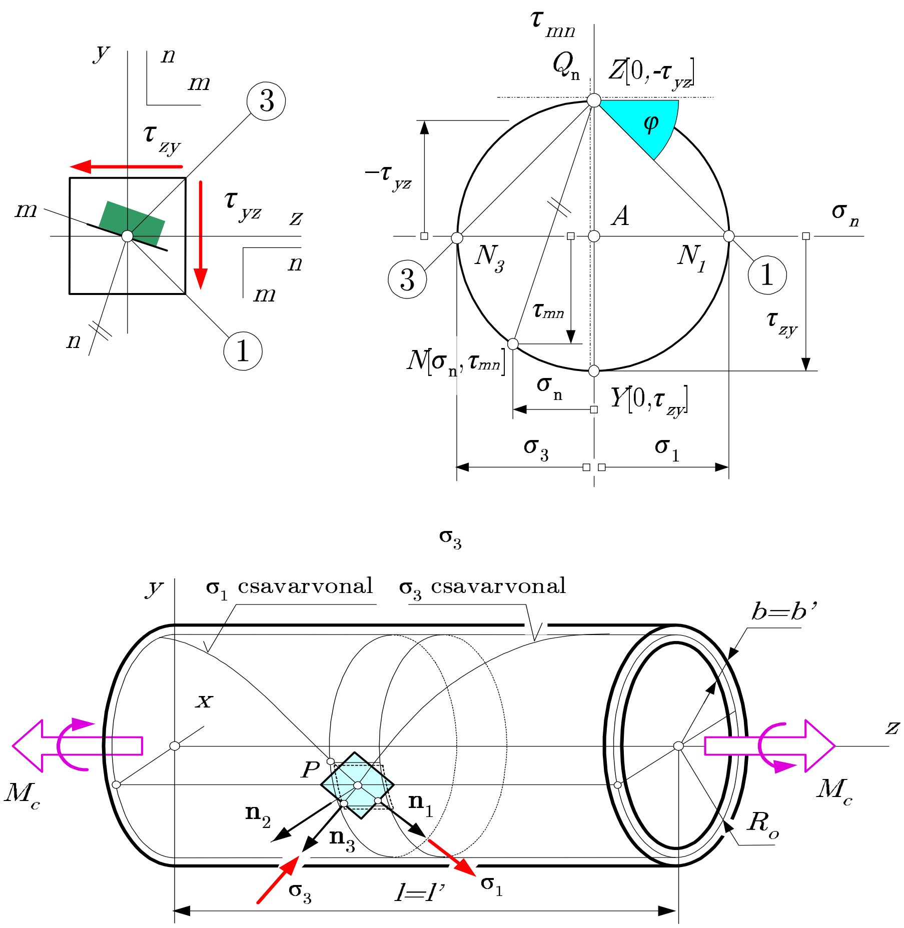


4.12. ábra.

koordinátatengelyeknek. Mivel $\boldsymbol{\rho}_y = 0$ és $\boldsymbol{\rho}_z = \sigma_z \mathbf{e}_z$ ($\sigma_z < 0$) az $Y[0,0]$ és $Z[\sigma_z, 0]$ pontok meghatározzák a kör átmérőjét. Következőleg $R = |\sigma_z|/2$ a kör sugara. A Q_n pontot a Z ponton át a z tengellyel illetve az Y ponton át az Y tengellyel húzott párhuzamosok metszése adja. A jelen esetben egybeesik a Q_n pont az Y ponttal. Az n normálisú lapon ébredő σ_n és τ_{mn} feszültségeket a Q_n ponton keresztül az n-el húzott párhuzamos és a kör N metszéspontja adja. Mivel a ZNQ_n és az ANQ_n háromszögek egyaránt derékszögű háromszögek leolvasható az ábráról, hogy
$$\sigma_n = \sigma_z \cos^2 \varphi \qquad \text{és} \qquad \tau_{mn} = \sigma_z \cos\varphi \, \sin\varphi\,.$$
Az ábrán feltüntetett n normálisú felületelemen bejelöltük a σ_n és τ_{mn} feszültségkoordinátákat.

Megjegyezzük a fentiek kiegészítéseként, hogy a 3.3. Mintapélda közölt megoldása valójában a részleges Mohr kör alkalmazása húzott rúd esetén.

A második példa célja a főfeszültségek és a főirányok meghatározása a vékonyfalú rúd csavarási feladata esetén. A feladat megoldása érdekében megrajzolt 4.13. ábra mindent szemléltet: a csavart vékonyfalú csövet, a szerkesztés alapjául szolgáló elemi kockát valamint magát a szerkesztést is. A cső középfelületén megrajzolt és egymással párhuzamos folytonos és szagatott



4.13. ábra.

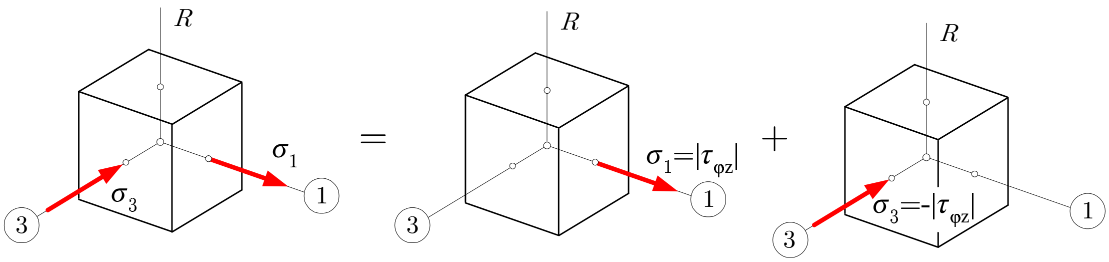
vonalak annak a $-x$ normálisú négyzetnek a kontúrját adják, amelyben a szerkesztést alapját adó elemi kocka metszi a középfelületet. Az elemi kocka homloklapja feszültségmentes, a z normálisú lapon $\boldsymbol{\rho}_z = \tau_{yz}\mathbf{e}_y$; $\tau_{yz} < 0$, az y normálisú lapon pedig $\boldsymbol{\rho}_y = \tau_{zy}\mathbf{e}_z$ a feszültségvektor. Mivel az elemi kocka z és y normálisú lapjain is zérus a σ_n normálfeszültség a Mohr kör átmérőjét adó $Z[0, -\tau_{yz}]$; $-\tau_{yz} > 0$ és $Y[0, \tau_{zy}]$ pontpár a τ_{mn} tengelyen van és az origó a kör közepe. Következőleg $|\tau_{yz}|$ a kör sugara. Az $x = R$ irány nyilvánvalóan főirány, a $\sigma_x = \sigma_R = 0$ feszültség pedig főfeszültség: A körről leolvasott adatokat is felhasználva

$$\sigma_1 = |\tau_{yz}| = |\tau_{\varphi z}| \,, \qquad \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_R = 0 \qquad \text{és} \qquad \sigma_3 = -\,|\tau_{yz}| = -\,|\tau_{\varphi z}| \tag{4.25}$$

a három nagyság szerint rendezett főfeszültség értéke. Maga a Q_n pont ugyanúgy szerkeszthető mint az előző feladatban. A jelen esetben azonban a Z ponttal esik egybe. A σ_n tengellyel -45^o szöget bezáró Q_nN_1 és 45^o szöget bezáró Q_nN_3 egyenes az 1 jelű és 3 jelű főirányokat adja. A vékonyfalú cső ábráján bejelöltük a főtengelyek KR-ét kifeszítő $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_R$ és $\mathbf{n}_3$ egységvektorokat.

A kapott eredmények szerint a csak két főfeszültség különbözik zérustól. Ez azt jelenti hogy kéttengelyű a vékonyfalú cső feszültségi állapota. Érdemes arra is felfigyelni, hogy pozitív csavarónyomaték esetén a középfelület egy adott pontjáról indulva ki az 1 jelű főirányok 45^o-os menetemelkedésű jobbmenetű csavarvonal érintői, maga a csavarvonal pedig megnyúlik. A 2 jelű főirányok ugyancsak 45^o-os menetemelkedésű de balmenetű csavarvonal érintői, maga a csavarvonal pedig megrövidül.

A rideg, törékeny anyagú csövek az anyag sajátosságai miatt az 1 jelű főirányra merőleges felületen törnek a csavarókísérlet során. A lágy, jól alakítható fémek ezzel szemben a z tengelyre merőleges keresztmetszeti síkokban törnek el, vagyis elnyíródnak.



4.14. ábra.

A 4.14. ábra a vékonyfalú csőben kialakuló kéttengelyű feszültségi állapotot szemlélteti a főtengelyek, azaz az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_R$ és $\mathbf{e}_3$ egységvektorok által kifeszített lokális KR-ben. Az is leolvasható az ábráról, hogy ez a feszültségi állapot valójában két egytengelyű feszültségi állapot szuperpozíciója. Következésképp

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}_1 + \underline{\mathbf{T}}_3$$

a feszültségi tenzor mátrixa, ahol

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{T}}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \underline{\mathbf{T}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Az egytengelyű feszültségi állapottal kapcsolatos (3.18) Hooke törvény alapján, tekintettel az $\varepsilon_1 = \sigma_1/E$ és $\varepsilon_3 = \sigma_3/E$ összefüggésekre is

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{T}_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_1\boldsymbol{E} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{A}_3 = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{T}_3 - \frac{\nu}{E}\sigma_3\boldsymbol{E}$$

a vonatkozó alakváltozási tenzorok. Az utóbbi két egyenlet összegét képezve az

$$\underbrace{\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_3}_{\boldsymbol{A}} = \frac{1+\nu}{E}\underbrace{(\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_3)}_{\boldsymbol{T}} - \frac{\nu}{E}\underbrace{(\sigma_1 + \sigma_3)}_{=0}\boldsymbol{E}\,,$$

vagy ami ugyanaz az

$$\boldsymbol{A} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{T} \tag{4.26}$$

eredmény adódik. Ez a pusztán logikai úton kapott egyenlet a csavarással kapcsolatos anyagegyenlet tenzoriális alakja és mint ilyen független kell, hogy legyen a választott KR-től. Ugyanakkor pedig meg kell egyeznie a kísérleti eredmények alapján felírt (4.17) anyagegyenlettel. A (4.17) és (4.26) egyenletek egybevetése szerint csak akkor lehetséges egyezés, ha

$$\boxed{E = 2G\,(1+\nu)\ .} \tag{4.27}$$

Másként fogalmazva a húzókísérlet és a vékonyfalú cső csavarási kísérlete kapcsán bevezetett három anyagjellemző az E, ν és a G közül bármelyik kifejezhető a másik kettővel. A mondottak egyben azt is jelentik, hogy homogén izotróp test esetén kettő a független anyagállandók száma a lineárisan rugalmas viselkedés tartományában. Megjegyezzük, hogy a csavarókísérlet eredményei szerint a mérési pontosság megszabta hibán belüli a G-re vonatkozó mérési eredmények egyezése a húzókísérlet mérési eredményeként kapott E és ν-vel számított G-vel.

4.1.6. A csavart vékonyfalú cső alakváltozási energiája. Tegyük fel, hogy a 4.1. ábrán vázolt csőről van szó, amelyre Φ_l a jobboldali végkeresztmetszet szögelfordulása a helytállónak vett baloldali végkeresztmetszethez képest. A csőben felhalmozódó alakváltozási energia, amint erre a 2.4.2. szakaszban rámutattunk, megegyezik a külső erők munkájával. Mivel a baloldali véglap nem fordul el a külső erőrendszert alkotó M_c csavarónyomatékok közül csak a jobboldali véglapon működő végez munkát. Ez a munka a 3.2.6. szakasz gondolatmenetének figyelembevételével a (3.23) képlet baloldalának mintájára az

$$\boxed{U = W_K = \frac{1}{2} M_c \Phi_l} \tag{4.28}$$

alakban írható fel – N_1-nek M_c, míg λ_1-nek Φ_l felel meg. A 4.1. ábra alapján, tekintettel a (4.7), (4.16) és $(4.13)_1$ képletekre

$$\Phi_l = \frac{l}{R_o}\chi = \frac{l}{R_o}\frac{\tau_{\varphi z}}{G} = \frac{M_c l}{R_o^2 A_k G} = \frac{M_c l}{I_p G}, \qquad I_p = R_o^2 A_k \tag{4.29}$$

a véglap szögelfordulása, ahol az I_p a vékony körgyűrű un. poláris másodrendű nyomatéka. Megjegyezzük, hogy az utóbbi mennyiséggel a

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{R_o A_k} = \frac{M_c}{I_p} R_o \tag{4.30}$$

alakot ölti a nyírófeszültség számításának (4.13) alatti formulája.

A véglap Φ_l szögelfordulásának helyettesítésével

$$U = W_K = \frac{1}{2} M_c \Phi_l = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{R_o^2 A_k G} = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{I_p G} \tag{4.31}$$

a teljes alakváltozási energia. Az alakváltozási energiasűrűség számításához tovább alakítjuk a fenti képletet. Eszerint

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{R_o^2 A_k G} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{M_c}{R_o A_k}}_{\tau_{\varphi z}}\underbrace{\frac{M_c}{R_o A_k G}}_{\gamma_{\varphi z} = \tau_{\varphi z}/G}\underbrace{l A_k}_{V}$$

ahol a V a vékonyfalú cső térfogata. Következésképp

$$\boxed{u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\tau_{\varphi z}\gamma_{\varphi z}} \tag{4.32}$$

a fajlagos alakváltozási energia értéke. Vegyük észre, hogy ez a képlet a tiszta nyírás során felhalmozódott alakváltozási energiasűrűséget adja függetlenül attól, hogy mi hozza létre a tiszta nyírást.

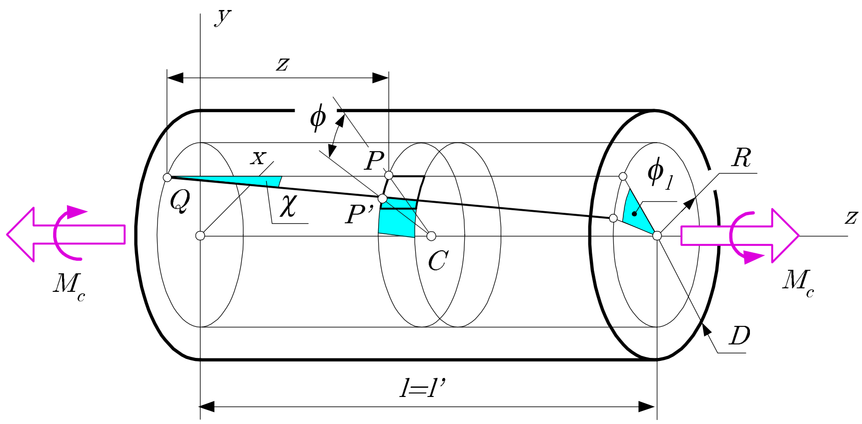
4.2. Kör- és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása

4.2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot. Számos olyan mérnöki alkalmazás van, amelyben csavarásra igénybevett kör-, vagy körgyűrű keresztmetszetű rudak kapnak vagy mozgásközvetítő, vagypedig teljesítményközvetítő szerepet. Az előző szakaszban sikerült tisztázni a nyírófeszültségekkel kapcsolatos Hook törvényt és ezzel összefüggésben a vékonyfalú körgyűrű keresztmetszetű rúd mechanikai állapotát. Mivel a gondolatmenet alapvető feltevése volt a rúd vékonyfalú volta, a kapott megoldások is csak akkor alkalmazhatók, ha teljesül ez a feltevés.

A jelen 4.2. szakasz célja, hogy általánosabb viszonyok között vizsgálja a csavarási feladatot. A rúd vagy tömör, vagy körgyűrű keresztmetszetű. Az utóbbi esetben azonban nincs korlátozó feltevés a rúd falvastagságára nézve.

A gondolatmenet kifejtése során a tömör körkeresztmetszetű prizmatikus rudat tekintünk majd. Látni fogjuk azonban, hogy ez a feltevés nem lényegi, és az eredményül kapott összefüggések értelemszerűen vonatkoznak körgyűrű keresztmetszetű prizmatikus rudakra is.

A viszonyokat a 4.15. ábra szemlélteti. Bár az ábra nem tüntet fel támaszokat feltételezzük – ugyanúgy, mint azt a vékonyfalú cső esetén tettük – , hogy az l hosszúságú és d átmérőjű rúd $z = 0$ keresztmetszete helyben marad. A rudat terhelő M_c csavarónyomaték értékét pedig az korlátozza, hogy csak rugalmas alakváltozást engedünk meg. Az ábra a megfigyelések ismertetése és értelmezése érdekében feltünteti a rúd R sugarú belső felületét is. Alkalmazkodva a rúd geometriájához a HKR-t részesítjük előnybe, adott esetben azonban az xyz kartéziuszi KR-ben is írunk fel egyenleteket.



4.15. ábra.

A rúd elmozdulásállapotát illető megfigyeléseink, a lényeget tekintve, megegyeznek a vékonyfalú cső csavarási feladata kapcsán végzett megfigyeléseinkkel. Ezek szerint

1. Az egyes keresztmetszetek merev lapként fordulnak el a z tengely körül és megmaradnak saját síkjukban az elfordulás során.
2. A keresztmetszetek Φ szögelfordulása egyenesen arányos a keresztmetszet z koordinátájával. Ez azt jelenti, hogy most is fennáll vékonyfalú cső csavarása kapcsán már felírt (4.1) egyenlet: Következőleg $\Phi = \vartheta z$, ahol ϑ a fajlagos elcsavarodási szög.

Az elmozdulásmező meghatározása fentiek alapján a (4.2) képletre vezető gondolatmenet megismétlését igényli. Csak annyi a különbség, hogy a tömör rúd R sugarú belső hengerfelülete veszi át a vékonyfalú cső R_o sugarú középfelületének szerepét. Vegyük észre, hogy most változó az R sugár, míg a vékonyfalú cső esetén állandó volt az R-nek megfelelő R_o. Mivel kicsik az elmozdulások és alakváltozások a P pont mozgását adó PP' közötti

$$\Phi R = \vartheta z R = \chi z \tag{4.33}$$

ív jó közelítéssel a P ponthoz tartozó $\mathbf{r}_{PP'}$ elmozdulásvektor hossza. Ha visszaidézzük a 4.2. ábrát, de az előzőeknek megfelelően R-et gondolunk R_o helyébe, akkor nyilvánvaló az ábráról, hogy $\mathbf{e}_\varphi$ irányú vektornak vehető az $\mathbf{u} = \mathbf{r}_{PP'}$ elmozdulásvektor. A most is érvényes (4.1) képletet figyelembevéve

$$\mathbf{u} = \Phi R \mathbf{e}_\varphi = \vartheta z R \underbrace{\mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R} = \vartheta z \mathbf{e}_z \times \underbrace{R\mathbf{e}_R}_{\mathbf{R}} = \vartheta z \mathbf{e}_z \times \mathbf{R} \tag{4.34}$$

a tömör cső elmozdulásmezeje. A (4.34) egyenlet jelentőségét az adja, hogy segítségével deriválásokkal állítható elő az $\boldsymbol{U}$ derivált tenzor. A (2.14) és (2.99) képletek felhasználásával

$$\boldsymbol{U} = \mathbf{u} \circ \nabla = (\vartheta z R \mathbf{e}_\varphi) \circ \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z \right)}_{\nabla \text{ HKR-ben}}$$

A további lépések során vegyük figyelembe, hogy az $\mathbf{e}_\varphi$ a φ polárszög függvénye. A (2.98a) képletek szerint

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = -\mathbf{e}_R \,.$$

Az utóbbi összefüggés kihasználásával

$$\boldsymbol{U} = \mathbf{u} \circ \nabla = \underbrace{\left[\vartheta z R \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial R} \right]}_{\vartheta z \mathbf{e}_\varphi} \circ \mathbf{e}_R + \underbrace{\left[\vartheta z R \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi} \right]}_{-\vartheta z R \mathbf{e}_R} \circ \mathbf{e}_\varphi + \underbrace{\left[\vartheta z R \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial z} \right]}_{\vartheta R \mathbf{e}_\varphi} \circ \mathbf{e}_z$$

azaz

$$\boldsymbol{U} = \underbrace{\vartheta z \mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{u}_R} \circ \mathbf{e}_R + \underbrace{(-\vartheta z \mathbf{e}_R)}_{\mathbf{u}_\varphi} \circ \mathbf{e}_\varphi + \underbrace{\vartheta R \mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{u}_z} \circ \mathbf{e}_z$$

a derivált tenzor. A kapott eredmény alapján

$$\underline{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{u}_R & \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta z & 0 \\ \vartheta z & 0 & \vartheta R \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

a derivált tenzor mátrixa, a (2.36) valamint a (4.3) képletek alapján pedig

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{U}}^T\right) = \left[\begin{array}{ccc} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_R & \underline{\boldsymbol{\alpha}}_\varphi & \underline{\boldsymbol{\alpha}}_z \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{R\varphi} & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\varphi R} & \varepsilon_\varphi & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\vartheta R}{2} \\ 0 & \frac{\vartheta R}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

az alakváltozási tenzor mátrixa. Ez az eredmény azt jelenti, hogy

$$\varepsilon_R = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z = \gamma_{\varphi R} = \gamma_{R\varphi} = \gamma_{zR} = \gamma_{Rz} = 0\,,$$

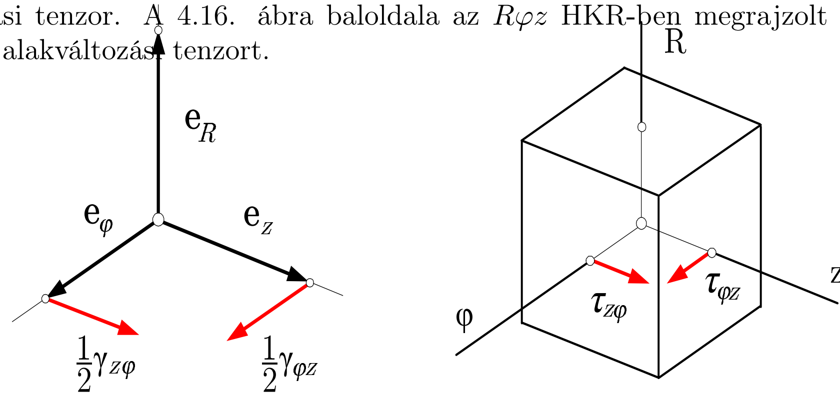
míg az alakváltozási tenzor egyedüli nem zérus eleme a $\gamma_{\varphi z} = \gamma_{z\varphi}$ fajlagos szögváltozás az R lineáris függvénye

$$\boxed{\gamma_{\varphi z} = \gamma = R\vartheta\,.} \tag{4.37}$$

Később látni fogjuk, hogy a ϑ fajlagos elcsavarodási szöget egyértelműen meghatározza az M_c csavarónyomaték értéke. Diádikus alakban

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}_\varphi \circ \mathbf{e}_\varphi + \boldsymbol{\alpha}_z \circ \mathbf{e}_z = \frac{1}{2}\vartheta R \mathbf{e}_R \circ \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{2}\vartheta R \mathbf{e}_\varphi \circ \mathbf{e}_z$$

az alakváltozási tenzor. A 4.16. ábra baloldala az $R\varphi z$ HKR-ben megrajzolt elemi triéderen szemlélteti az alakváltozási tenzort.



4.16. ábra.

4.2.2. Feszültségi és energetikai állapot. Mivel a (4.36) alakváltozási tenzor tiszta nyíráshoz tartozó alakváltozási állapot ír le a feszültségi tenzor mátrixa a (4.17) Hook törvényből számítható

$$\underline{\mathbf{T}} = \left[\begin{array}{ccc} \underline{\boldsymbol{\rho}}_R & \underline{\boldsymbol{\rho}}_\varphi & \underline{\boldsymbol{\rho}}_z \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ \tau_{\varphi R} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix} = 2G\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\vartheta R \\ 0 & G\vartheta R & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

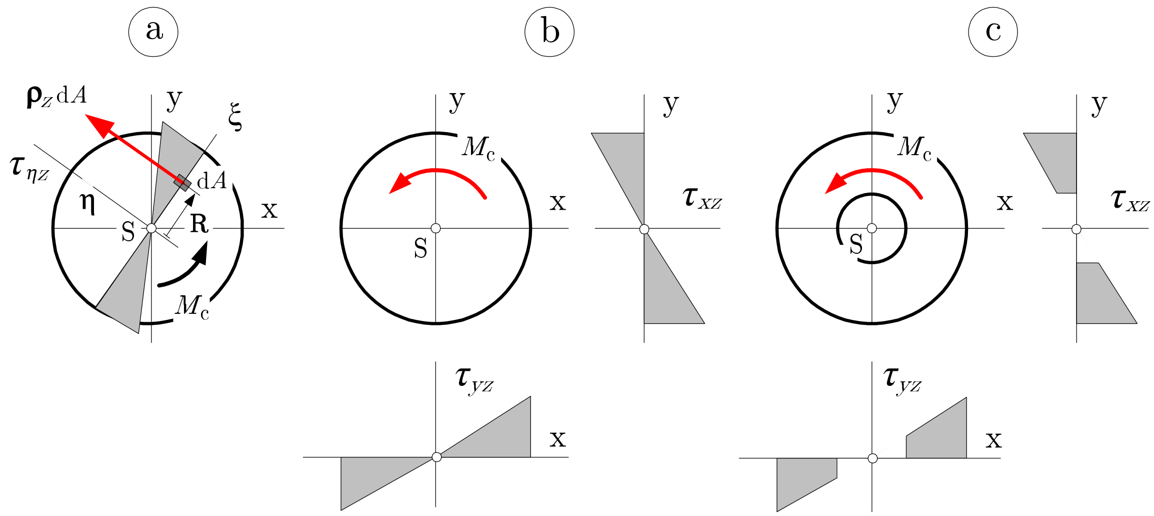
Kiolvasható a fenti egyenletből, hogy

$$\sigma_R = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{\varphi R} = \tau_{R\varphi} = \tau_{zR} = \tau_{Rz} = 0\,.$$

A feszültségi tenzor egyedüli nem zérus eleme a $\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi}$ nyírófeszültség az R lineáris függvénye

$$\boxed{\tau_{\varphi z} = \tau = GR\vartheta\,.} \tag{4.39}$$

A 4.16. ábra jobboldala az $R\varphi z$ HKR-ben megrajzolt elemi kockán szemlélteti a feszültségi tenzort. A 4.17.(a) ábra a tömör rúd egy keresztmetszetében a súlyponthoz kötött $\xi\eta$ KR-ben



4.17. ábra.

(a ξ tengely egybeesik az R tengellyel, következőleg az η irány a ξ tengely minden pontjában párhuzamos a φ iránnyal) szemlélteti a ξ tengely keresztmetszetre eső pontjaiban ébredő $\tau_{\xi z} = \tau_{\varphi z}$ feszültségeket. Az (a) ábrarészlet, a későbbiek kedvéért, feltünteti a dA felületelemen ébredő

$$\boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A = \underbrace{\tau_{\varphi z}\mathbf{e}_\varphi}_{\boldsymbol{\tau}_z} dA = GR\vartheta\mathbf{e}_\varphi \mathrm{d}A \tag{4.40}$$

elemi erőt. Mivel a $\boldsymbol{\rho}_z = \tau_{\varphi z}\mathbf{e}_\varphi$ feszültségeloszlás egyenértékű kell, hogy legyen a keresztmetszet M_c csavaróigénybevételével a nyírófeszültségek ugyanolyan módon – most az óramutató járásával ellentétesen – forgatják a keresztmetszetet a súlyponton átmenő z tengely körül, mint az M_c csavarónyomaték. A 4.17.(b) ábrarészlet ugyancsak tömör keresztmetszetre, de nem magán a keresztmetszeten, hanem külön megrajzolt KR-ekben, szemlélteti a nyírófeszültségek eloszlását az x és y tengelyek mentén. A 4.17.(c) ábra körgyűrűalakú keresztmetszetre teszi ugyanezt.

Mivel a rúd bármely keresztmetszetében a keresztmetszeten ébredő

$$\boldsymbol{\rho}_z = \tau_z = \tau_{\varphi z}\mathbf{e}_\varphi = GR\vartheta\mathbf{e}_\varphi$$

nyírófeszültségek egyenértékűek a keresztmetszet M_c csavaróigénybevételével

(a) zérus kell, hogy legyen az $\mathbf{F}_S$ feszültségi eredő,
(b) a feszültségi eredő erőpárra nézve pedig fenn kell állnia az $\mathbf{M}_S = M_c\mathbf{e}_z$ egyenletnek.

Az (a) esetben a (2.89) és a (4.40) összefüggések és a A 4.17.(a) ábra alapján írható, hogy

$$\mathbf{F}_S = \int_A \boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A = \int_A GR\vartheta \underbrace{\mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_R} \mathrm{d}A = G\vartheta\mathbf{e}_z \times \int_A \underbrace{R\mathbf{e}_R}_{\mathbf{R}} \mathrm{d}A = G\vartheta\mathbf{e}_z \times \underbrace{\int_A \mathbf{R}\mathrm{d}A}_{\mathbf{S}_S} = G\vartheta\mathbf{e}_z \times \mathbf{S}_S\,.$$

Itt $\mathbf{S}_S$ a keresztmetszet saját súlypontjára vett statikai nyomatéka, ez pedig nyilvánvalóan zérus, azaz $\mathbf{S}_S = 0$. Következőleg valóban zérus az $\mathbf{F}_S$ feszültségi eredő.

Az (b) esetben a (2.90) és a (4.40) összefüggések valamint a 4.17.(a) ábra alapján

$$\mathbf{M}_S = \int_A \mathbf{R}\times\boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A = \int_A R\mathbf{e}_R \times GR\vartheta\mathbf{e}_\varphi \mathrm{d}A = G\vartheta\int_A R^2 \underbrace{\mathbf{e}_R\times\mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{e}_z} \mathrm{d}A = \mathbf{e}_z G\vartheta\int_A R^2\mathrm{d}A = M_c\mathbf{e}_z\,. \tag{4.41}$$

Tekintettel az utóbbi képletre a

$$\boxed{I_p = \int_A R^2 \mathrm{d}A} \tag{4.42}$$

összefüggés értelmezi kör-, illetve körgyűrű alakú keresztmetszetre az I_p *poláris másodrendű nyomatékot*. A poláris másodrendű nyomaték értelmezésének felhasználásával a (4.41) egyenletből az

$$\boxed{M_c = G\vartheta I_p\,, \quad \text{vagy ami ugyanaz a} \quad \vartheta = \frac{M_c}{I_pG}} \tag{4.43}$$

eredmény következik. Az utóbbi összefüggés szerint a ϑ fajlagos elcsavarodási szög egyenesen arányos az M_c csavarónyomatékkal, és fordítottan arányos az I_p poláris másodrendű nyomatékkal, valamint a G nyírási rugalmassági modulussal. A fajlagos elcsavarodási szög fenti képletével a (4.37) egyenletből

$$\gamma_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_pG}R \tag{4.44}$$

a fajlagos szögtorzulás, a (4.39) egyenletből pedig

$$\boxed{\tau_{\varphi z} = G\gamma_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p}R} \tag{4.45}$$

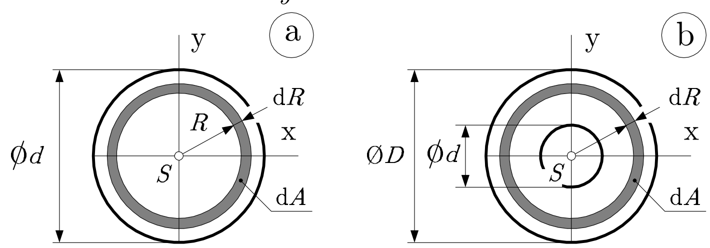
a nyírófeszültség értéke. Ha az M_c csavarónyomatékot előjelhelyesen helyettesítjük, akkor a fenti képletek előjelhelyes eredményt adnak az $R\varphi z$ HKR-ben a $\gamma_{\varphi z}$ szögtorzulásra és a $\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültségre nézve. Az is kiolvasható a (4.45) összefüggésből, hogy a $\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültség abszolutértéke a keresztmetszet kerületén éri el a

$$\boxed{\tau_{\max} = |\tau_{\varphi z}|_{\max} = \frac{|M_c|}{I_p}\frac{D}{2} = \frac{|M_c|}{K_p}} \tag{4.46}$$

maximumot, ahol

$$\boxed{K_p = \frac{I_p}{R_{\max}}} \tag{4.47}$$

az úgynevezett *poláris keresztmetszeti tényező*.



4.18. ábra.

Legyen d a körkeresztmetszetű rúd átmérője. Legyenek továbbá d és D a körgyűrűkeresztmetszetű rúd belső és külső átmérői. Szimmetriaokokból $\mathrm{d}A = 2R\pi dR$ a felületelem. Körkeresztmetszetű rúdra a (4.42) és a (4.47) képletek, valamint a 4.18.(a) ábra alapján

$$I_p = \int_A R^2 \mathrm{d}A = 2\pi \int_0^{d/2} R^3 \mathrm{d}R = 2\pi \left[\frac{R^4}{4}\right]_0^{d/2}\,,$$

azaz

$$\boxed{I_p = \frac{d^4\pi}{32} \qquad \text{és} \qquad K_p = \frac{d^3\pi}{16}} \tag{4.48}$$

a poláris másodrendű nyomaték, valamint a poláris keresztmetszeti tényező. Ugyanilyen gondolatmenettel kapjuk a 4.18.(b) ábra alapján, hogy

$$I_p = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} R^3 \mathrm{d}R = 2\pi \left[\frac{R^4}{4}\right]_{d/2}^{D/2}\,,$$

ahonnan

$$\boxed{I_p = \frac{\left(D^4 - d^4\right)\pi}{32} \qquad \text{és} \qquad K_p = \frac{\left(D^4 - d^4\right)\pi}{16D}} \tag{4.49}$$

a poláris másodrendű nyomaték illetve a poláris keresztmetszeti tényező.

A (4.33) összefüggésből $z = l$-re megkapjuk a rúd jobboldali véglapjának a rúd baloldali véglapjához viszonyított szögelfordulását:

$$\Phi_l = \vartheta l$$

Innen, a fajlagos szögelfordulás $(4.33)_2$ alatti értékének helyettesítésével

$$\boxed{\Phi_l = \frac{M_c l}{I_p G}} \tag{4.50}$$

a két véglap egymáshoz viszonyított relatív elfordulása.

Az l hosszúságú rúdszakaszban felhalmozódott alakváltozási energia kétféleképpen is számítható. Vehetjük egyrészről a rúdszakaszra ható külső erők munkáját, hiszen az a rugalmas alakváltozás tartományában mindig megegyezik a felhalmozódott alakváltozási energiával. Másrészről számíthatjuk a fajlagos alakváltozási energia rúdszakasz térfogatára vonatkozó integrálját.

Az első esetben a vékonyfalú cső alakváltozási energiájával kapcsolatos és a (4.31) képletre vezető gondolatmenettel azonnal írhatjuk, hogy

$$\boxed{U = W_K = \frac{1}{2} M_c \Phi_l = \frac{1}{2} \frac{M_c^2 l}{I_p G}\ .} \tag{4.51}$$

A második esetre nézve a fejezet végén bemutatott 4.4. Mintapélda mutatja be a fentivel azonos eredményre vezető számítást.

Érdemes azt is megfigyelni, hogy fennáll a

$$\frac{\partial U}{\partial M_c} = \frac{M_c l}{I_p G} = \Phi_l\ . \tag{4.52}$$

egyenlet Ez az összefüggés a húzott, illetve nyomott rudakkal kapcsolatos (3.25) képlet analogonja. Az összefüggés szerint a rúd véglapjának Φ_l szögelfordulása az alakváltozási energia rúd véglapján működő nyomaték szerinti parciális deriváltja.

4.2.3. Ellenőrzés, méretezés. A jelen szakasz csavarásra igénybevett kör és körgyűrűkeresztmetszetű rudak ellenőrzésével illetve méretezésével foglalkozik. Jelölje a tönkremenetelt okozó és pozitív előjelűnek tekintett nyírófeszültséget τ_{jell}. Ez a mennyiség a rúd anyagától függően vagy a τ_F folyáshatárral, vagypedig a τ_B nyírószilárdsággal vehető egyenlőnek. Az első választás szívós anyagok (lágy fémek, alacsony széntartalmú acélok) esetén célszerű a jelentős maradó alakváltozások elkerülése érdekében. Rideg anyagok esetén általában nem előzi meg jelentős alakváltozás a törést. Itt tehát a második választás a szokásos.

A megengedett nyírófeszültséget a

$$\boxed{\tau_{meg} = \frac{\tau_{\text{jell}}}{n}} \tag{4.53}$$

összefüggés értelmezi, ahol az n a 3.2.7. szakaszból már ismert előírt biztonsági tényező.

Ellenőrzés esetén a keresztmetszeten fellépő nyírófeszültség (4.46) képlettel értelmezett maximumát számítjuk ki először és ezt hasonlítjuk össze a megengedett nyírófeszültséggel. Megfelel a csavarásra igénybevett kör-, vagy körgyűrűkeresztmetszetű rúd, ha fennáll a

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{|M_c|}{K_p} \le \tau_{\text{meg}} = \frac{\tau_{\text{jell}}}{n}} \tag{4.54}$$

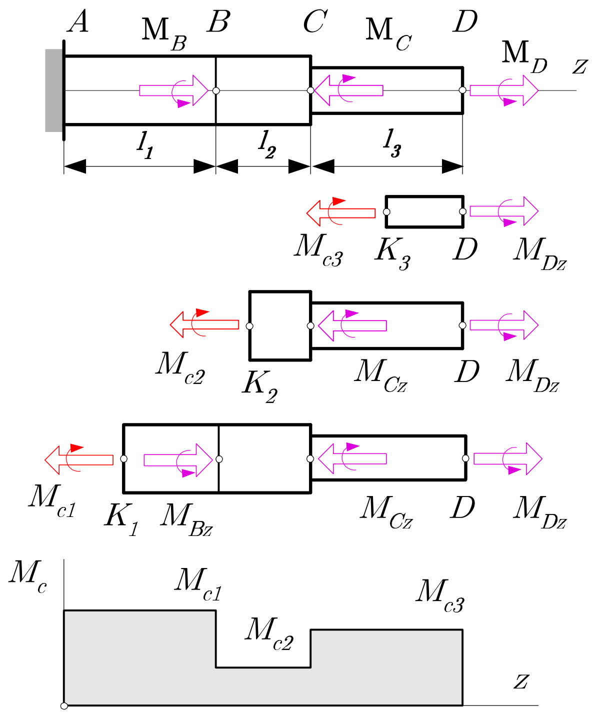
egyenlőtlenség. Méretezés esetén adott az M_c csavarónyomaték, valamint a rúd anyaga és első lépésben keressük azt a minimálisan szükséges $K_{p\,sz}$ keresztmetszeti tényezőt, amelyhez előírt n biztonsági tényező tartozik. A keresztmetszeti tényező $K_{p\,sz}$ alsó korlátja a (4.54) egyenlőtlenségből következik:

$$\boxed{K_p \ge K_{p\,sz} = \frac{|M_c|}{\tau_{\text{meg}}}\,.} \tag{4.55}$$

A $K_{p\,sz}$ alsó korlát ismeretében – esetleg más szempontokat is figyelembe véve – megválasztható(k) a keresztmetszet átmérője, illetve átmérői.

4.3.1. Szakaszonként állandó keresztmetszet. A 4.19. ábra a szakaszonként állandó keresztmetszetű AD rudat, a rúd terheléseit – ezek z tengely irányú nyomatékok, amelyek a rúd B és C keresztmetszetein illetve a rúd D véglapján működnek –, valamint a rúd K_3D, K_2D és K_1D jelű részeit, továbbá a felsorolt rúdrészeken működő külső és belső erőket, végül pedig a csavarónyomatéki ábrát szemlélteti. Feltételezzük, hogy az 1, 2 és 3 jelű rúdszakaszokon belül mindenütt állandóak a prizmatikus kör-; és körgyűrűkeresztmetszetű rudak csavarási feladatával kapcsolatos képletekben szereplő és a rúdra jellemző mennyiségek, továbbá a csavarónyomaték értéke is, azaz I_{pi}, G_i, l_i és M_{ci}. Leolvasható az ábráról – mivel az $M_{Cz} < 0$ – az is, hogy

$$M_{c1} = M_{Bz} + M_{Cz} + M_{Dz},$$
$$M_{c2} = M_{Cz} + M_{Dz}, \qquad M_{c3} = M_{Dz}\ .$$



4.19. ábra.

Ha eltekintünk a hirtelen keresztmetszetváltozások feszültségi és alakváltozási állapotra gyakorolt hatásától, ez ugyanis csak lokális zavarást okoz, akkor az összes eddigi eredményt, azaz a (4.45), (4.50) és (4.51) képleteket egyaránt érvényesnek tekinthetjük az egyes szakaszokon belül. Következőleg

$$\boxed{\tau_{\varphi zi} = \frac{M_{ci}}{I_{pi}} R} \tag{4.56}$$

a nyírófeszültség képlete az i-ik szakaszra nézve ($i = 1, 2, 3$). A rúd D keresztmetszetének elfordulása az A keresztmetszethez képest pedig úgy kapható meg, hogy összegezzük az egyes rúdszakaszok jobboldali végének a tekintett rúdszakasz kezdetéhez viszonyított Φ_i szögelfordulásait:

$$\boxed{\Phi_{DA} = \Phi_l = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{M_{ci} l_i}{I_{pi} G_i}\ .} \tag{4.57}$$

A rúdban felhalmozódott teljes alakváltozási energia ugyanilyen módon az egyes rúdszakaszokban felhalmozódott alakváltozási energia összegeként adódik:

$$\boxed{U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{M_{ci}^2 l_i}{I_{pi} G_i}\ .} \tag{4.58}$$

Mivel

$$\frac{\partial M_{ci}}{\partial M_{Dz}} = 1; \qquad i = 1, 2, 3$$

a (4.58) képletből a (4.52) egyenlet általánosítását jelentő

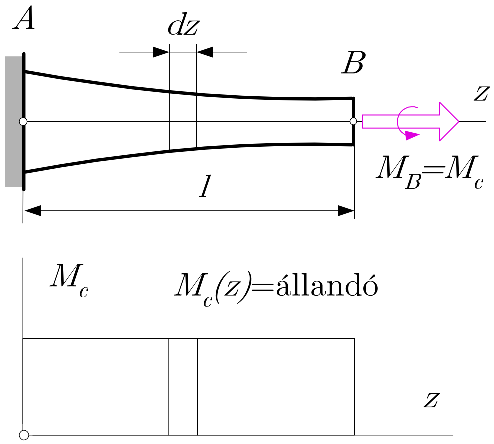
$$\frac{\partial U}{\partial M_{Dz}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{M_{ci} l_i}{I_{pi} G_i} \frac{\partial M_{ci}}{\partial M_{Dz}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{M_{ci} l_i}{I_{pi} G_i} = \Phi_{DA} = \Phi_l$$

összefüggés következik.

A szakaszonként állandó keresztmetszetű rúd esetén azon alapul az ellenőrzés illetve méretezés, hogy minden egyes rúdszakaszra nézve fenn kell állnia a

$$\tau_{\max\, i} = \frac{|M_{ci}|}{K_{pi}} \le \tau_{\text{meg}\, i} \tag{4.59}$$

relációnak, ahol $\tau_{\max\, i}$ a megengedett nyírófeszültség a rúd i-ik szakaszán.



4.20. ábra.

4.3.2. Folytonosan változó keresztmetszet. Ha folytonosan de csak igen kismértékben változik a kör-, illetve körgyűrű keresztmetszet területe – a 4.20. ábra ezt az esetet szemlélteti –, akkor jó közelítéssel fennáll, hogy

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_c(z)}{I_p(z)} R \tag{4.60}$$

a nyírófeszültség, a többi feszültségkoordináta pedig elhanyagolhatóan kicsiny. A rúd véglapjának szögelfordulását a dz hosszúságú elemi rúdszakasz két véglapja d$\varPhi$ relatív szögelfordulásának integrálja adja. Maga a d$\varPhi$ relatív szögelfordulás a (4.50) képlettel számítható, ha az M_c helyére $M_c(z)$-t – magán az ábrán állandó az $M_c(z)$ –, l helyére dz-t és az I_pG szorzat helyére pedig $I_p(z)G(z)$-t írunk. Következésképp:

$$\varPhi = \int_0^l \underbrace{\frac{M_c(z)}{I_p(z)G(z)}\,\mathrm{d}z}_{\mathrm{d}\varPhi}\,. \tag{4.61}$$

Hasonló megfontolással kapjuk (4.51)-ból, hogy

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_c^2(z)}{I_p(z)G(z)}\,\mathrm{d}z \tag{4.62}$$

a rúdban felhalmozott alakváltozási energia. Ami pedig a fenti képletek érvényességét illeti érdemes ismételten hangsúlyozni, hogy azok csak akkor alkalmazhatók ha igen kismértékben változik az A keresztmetszet a z függvényében.

4.4. Statikailag határozatlan feladatok

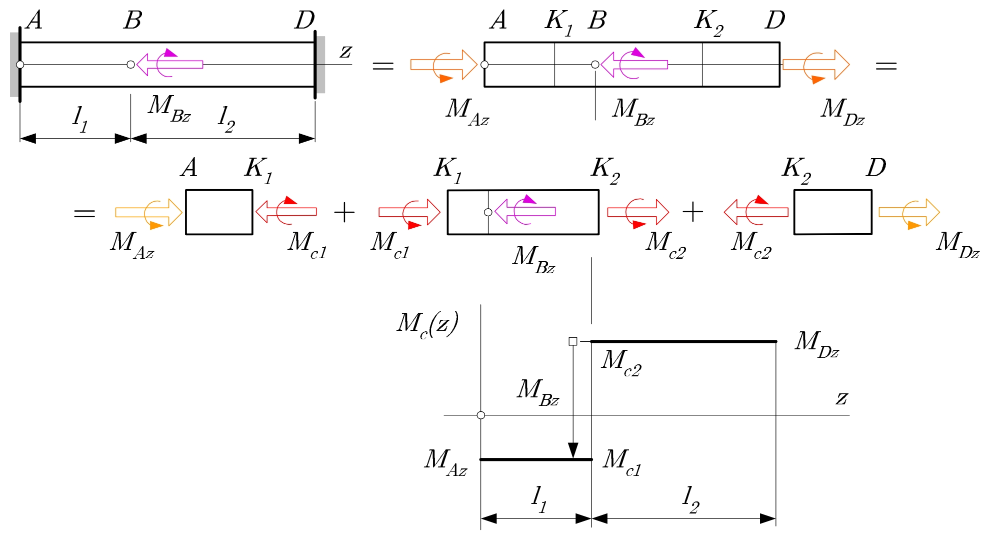
Csavarásra igénybevett kör-, és körgyűrűkeresztmetszetű rudak esetén úgy vesszük, hogy a nyomatékvektorok a rúd tengelyvonala mentén működnek, azaz egy egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésre az ismeretlen támasztónyomaték(ok) meghatározására. Ha a rúd valamelyik végét befogjuk, akkor csak egy ismeretlen támasztónyomatékkal kell számolnunk, azaz a feladat statikailag határozott. Ha azonban a rúd mindkét vége befogott akkor két támasztónyomatékot kell meghatározni. Ez egyben azt is jelenti, hogy statikailag határozatlan a feladat, hiszen egy egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésre a két ismeretlen meghatározására. Következésképp további egyenletre van szükség a feladat határozottá tételéhez. Ezt a pótlólagos egyenletet abból a feltételből kapjuk, hogy a második támasz révén valójában meggátoljuk, hogy a rúd befogott végei egymáshoz képest elforduljanak.

Mindez jól követhetően jelenik meg a 4.21. ábrán vázolt AD rúd esetén. A rúd két vége befogott. A terhelést a tengelyvonal B pontjában működő $M_{Bz} < 0$ nyomaték jelenti. Az ábra feltünteti

- a támaszairól levett rudat és a reá ható M_{Bz} terhelést, továbbá az ismeretlen M_{Az}, M_{Dz} támasztónyomatékokat,
- a rúd AK_1, K_1K_2 és K_2D részeit – K_1 és K_2 az AB, illetve BD szakaszokon belül található rúdkeresztmetszetek –, valamint a rajtuk működő külső és belső erőket, és végül
- az $M_c(z)$ csavarónyomatéki ábrát.

Mivel a rúd egyensúlyban van fenn kell állnia a

$$M_{Az} + M_{Bz} + M_{Cz} = 0 \tag{4.63}$$



4.21. ábra.

nyomatéki egyenletnek. A rúd D keresztmetszetének zérus az A keresztmetszethez viszonyított szögelfordulása. Visszaidézve a (4.57) képletet írhatjuk tehát, hogy

$$\Phi_{DA}\, I_p G = \Phi_l\, I_p G = M_{c1} l_1 + M_{c2} l_2 = 0\,,$$

ahol az AK_1 illetve K_2D jelű rúdszakaszok egyensúlya alapján $M_{c1} = -M_{Az}$ és $M_{c2} = M_{Dz}$. Következésképp

$$M_{Dz} = \frac{l_1}{l_2} M_{Az}\,. \tag{4.64}$$

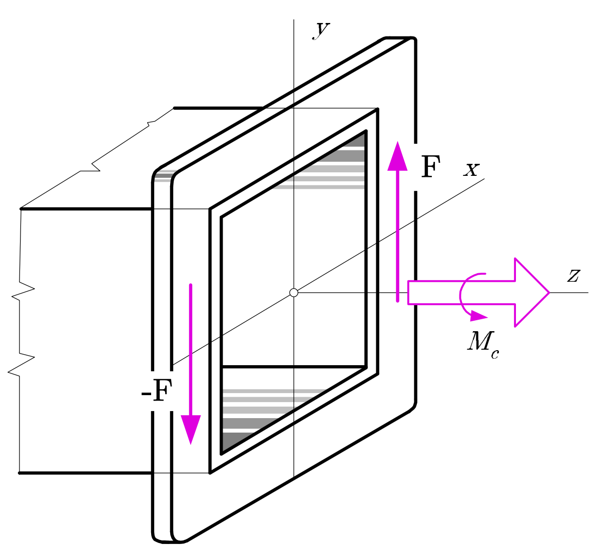
Az utóbbi formula (4.63)-ba történő helyettesítésével M_{Az}-t, majd az M_{Az}-re vonatkozó eredményt (4.64)-be írva M_{Dz}-t kapjuk

$$M_{Az} = -\frac{l_2}{l_1 + l_2} M_{Bz}\,, \qquad\qquad M_{Dz} = -\frac{l_1}{l_1 + l_2} M_{Bz}\,. \tag{4.65}$$

Ezzel megoldottuk a feladatot.

4.5. Vékonyfalú, zárt szelvényű prizmatikus rudak szabad csavarása

A vizsgálat tárgyát képező rúd állandó keresztmetszetű, zárt szelvényű és vékonyfalú. A 4.22. ábra példaként szemlélteti egy ilyen téglalapkeresztmetszetű rúd egyik, terhelt végét. A rúd szemléltetett vége peremezett. Nyilvánvaló az ábráról, hogy a peremen kifejtett **F**, −**F** erőpár csavarásra veszi igénybe a rudat. A vonatkozó csavarónyomatékot M_c jelöli.

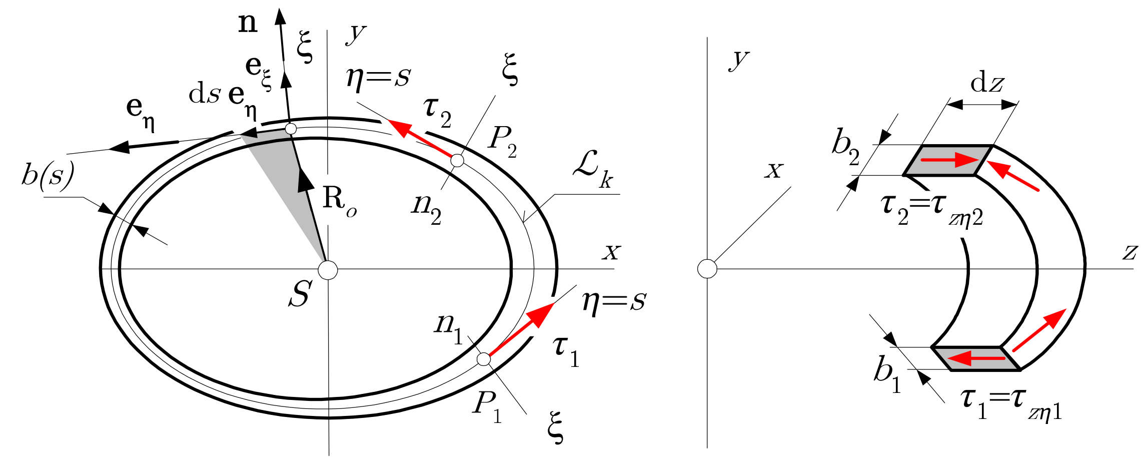


4.22. ábra.

A csavart rúd hossztengelye, összhangban az eddigiekkel, egybeesik a KR z tengelyével. A rúd keresztmetszetei pedig az xy koordinátasíkkal párhuzamos síkokban fekszenek.

Ha nem kör-, vagy körgyűrű keresztmetszetű rudat csavarunk, akkor a megfigyelések szerint a rúd keresztmetszeteit alkotó anyagi pontok a rúd palástjának alkotói irányában, azaz a z irányban is elmozdulnak. Ez azt jelenti hogy nem marad síkfelület a terhelés hatására alakváltozott keresztmetszet. Egy adott keresztmetszet pontjainak z irányú elmozdulását a keresztmetszet *öblösödésének* vagy *vetemedésének* nevezzük.

Mivel az erőpárt alkotó erők a a rúd peremének síkjában működnek nincs gátolva a rúd keresztmetszeteinek z irányú elmozdulása. Ezzel összefüggésben *szabad csavarásról* beszélünk ha nincs meggátolva a keresztmetszetek pontjainak a rúd hossztengelye menti elmozdulása. Ha, ezzel szemben valamilyen módon, pl. a támaszok révén, meg van gátolva a rúd keresztmetszeteinek z irányú mozgása, akkor *gátolt csavarásról* beszélünk. A továbbiakban feltételezzük, hogy a feladat szabad csavarási feladat.



4.23. ábra.

A 4.23. ábra baloldali része egy vékonyfalú prizmatikus rúd keresztmetszetét szemlélteti. A rúdszelvény úgy épül fel, hogy a szelvény középvonalára, ezt vékony vonallal rajzoltuk meg, merőlegesen mindkét irányban felmérjük a b vastagság felét. Maga a vastagság a szelvény $\mathcal{L}_k$ középvonala mentén mért s ívkoordináta függvénye: $b = b\,(s)$. A keresztmetszet középvonalának minden egyes pontjában értelmezhető egy jobbsodratú $\xi\eta\zeta$ $(\xi s\zeta)$ lokális KR. A ξ tengely a középvonal érintője, melynek pozitív iránya egybeesik az s ívkoordináta pozitív irányával; az utóbbi irányban haladva a középvonalon balkéz felől esik a középvonal által határolt síkbeli tartomány. Az η tengely a középvonal külső normálisa, a ζ tengely pedig párhuzamos a z tengellyel. A középvonal pontjainak $\mathbf{R}_o = \mathbf{R}_o(s)$ a helyvektora. Legyen $\mathbf{n}$ a középvonal külső normális egységvektora. Nyilvánvaló az eddigiek alapján, hogy

$$\mathbf{e}_\xi = \mathbf{n}\,, \qquad \mathbf{e}_\eta = \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_o(s)}{\mathrm{d}s} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta\,.$$

Az alábbiakban megkíséreljük tisztázni a rúd feszültségi állapotát. Ehhez a kérdéshez kapcsolódóan az alábbi feltevésekkel élünk:

1. A $b(s)$ falvastagság csak lassan és kis mértékben változik az s függvényében.
2. Mivel szabad csavarási feladatról van szó csak nyírófeszültség ébred a keresztmetszeten. Következésképp $\rho_z = \tau_z$.
3. A kialakuló feszültségállapot független a z koordinátától.
4. A nyírófeszültségnek nincs ξ irányú összetevője és állandó a falvastagság mentén. Ezért mindig megadható a
$$\tau_z = \tau_{\eta z}(s)\mathbf{e}_\eta(s) \tag{4.66}$$
alakban.

Az utóbbi feltevés azon alapul, hogy csak érintőirányú feszültség ébredhet a keresztmetszet peremén, továbbá, hogy kicsi és csak mérsékelten változik $b(s)$ falvastagság.

A 4.23. ábra jobboldali része egy a csőből kimetszett hasábot szemléltet. A hasáb két z tengellyel párhuzamos és az ábrán halványszürke színben megrajzolt határfelületét úgy kapjuk meg, hogy a baloldali ábrarészlet n_1 és n_2 jelű egyenesszakaszain áthaladó – a két egyenesszakasz mindegyike merőleges a cső középvonalára – és a z tengellyel párhuzamos síkokat veszünk metszősíknak. A hasáb z tengelyre merőleges határfelületei a cső két egymástól dz távolságra fekvő keresztmetszetének részei. A hasábot szemléltető ábra, összhangban a nyírófeszültségek dualitásával, feltünteti a hasábon működő feszültségeket is. Mivel a hasáb egyensúlyban van zérus a z irányú erők összege:

$$-b_1\tau_{z\eta 1}\mathrm{d}z + b_2\tau_{z\eta 2}\mathrm{d}z = 0\,.$$

Ebből az egyenletből, figyelembe azt a körülményt, hogy az n_1 és n_2 bárhol lehet a középvonalon, a

$$\tau_{\eta z}(s)\,b(s) = \text{állandó} = Q \tag{4.67}$$

összefüggés következik. A cső $b(s)$ falvastagságának és a falvastagság menti $\tau_{\eta z}(s)$ nyírófeszültségnek Q szorzatát *nyírófolyamnak* szokás nevezni. A (4.67) képlet szerint állandó a Q nyírófolyam a vékonyfalú, zárt keresztmetszetű cső szabad csavarási feladata esetén.

A nyírófolyam állandóságából következik az a természetes követelmény, hogy zérus értékű a keresztmetszeten ébredő belső erőrendszer, azaz a τ_z nyírófeszültségek eredője Valóban, a (3.13), (4.66) és (4.67) képletek alapján egyszerű átalakításokkal adódik, hogy

$$\mathbf{F}_S = \int_A \rho_z \,\mathrm{d}A = \int_A \tau_z \underbrace{\mathrm{d}A}_{b(s)\,\mathrm{d}s} = \oint_{\mathcal{L}_k} \mathbf{e}_\eta(s) \underbrace{\tau_{\eta z}(s) b(s)}_{Q} \mathrm{d}s = Q \oint_{\mathcal{L}_k} \underbrace{\mathbf{e}_\eta(s)\,\mathrm{d}s}_{\mathrm{d}\mathbf{R}_o} = Q \int_{P_1}^{P_1} \mathrm{d}\mathbf{R}_o = Q\,\mathbf{R}_o\Big|_{P_1}^{P_1} = 0\,.$$

A nyírófeszültség és a csavarónyomaték közötti kapcsolatot abból a feltételből kapjuk meg, hogy megegyezik a τ_z nyírófeszültségeloszlás nyomatéka az S pontra a terhelésből adódó $M_c\mathbf{e}_z$ csavarónyomatékkal. A számítások során vegyük figyelembe az alábbiakat:

1. A $\tau_z\, b(s)$ elemi eredő mindig a keresztmetszet középvonalán működik.
2. Mivel az $\mathbf{R}_o(s)$ és $\mathrm{d}\mathbf{R}_o$ vektorok vektoriális szorzata merőleges a két vektorra, a szorzat értéke pedig a két vektor által kifeszített parallelogramma területe fennáll az $\mathbf{R}_o(s) \times \mathbf{e}_\eta(s)\mathrm{d}s = \mathbf{R}_o(s) \times \mathrm{d}\mathbf{R}_o = 2\mathrm{d}A_o\mathbf{e}_z$ összefüggés, ahol $\mathrm{d}A_o$ a $\mathbf{R}_o(s)$ és $\mathrm{d}\mathbf{R}_o = \mathbf{e}_\eta(s)\mathrm{d}s$ vektorok által kifeszített halványszürke háromszög területe.

A (3.13), (4.66) és (4.67) összefüggések, valamint a fentiek alapján írható, hogy

$$\mathbf{M}_S = \boxed{M_c}\,\mathbf{e}_z = \int_A \mathbf{R} \times \rho_z \,\mathrm{d}A = \int_A \mathbf{R}_o(s) \times \tau_z\, b(s)\,\mathrm{d}s = \oint_{\mathcal{L}_k} \mathbf{R}_o(s) \times \mathbf{e}_\eta(s) \underbrace{\tau_{\eta z}(s) b(s)}_{Q} \mathrm{d}s =$$
$$= Q \int_{A_o} 2\mathrm{d}A_o \mathbf{e}_z = \boxed{2\tau_{\eta z}(s) b(s) A_o}\,\mathbf{e}_z\,,$$

ahol az A_o a keresztmetszet középvonala által határolt terület. Az utóbbi képlet bekeretezett részeinek egyenlősége alapján

$$\boxed{\tau_{\eta z}(s) = \frac{M_c}{2b(s)A_o}} \tag{4.68}$$

a nyírófeszültség értéke. Vegyük észre, hogy a vékonyfalú cső csavarási feladata kapcsán levezetett $(4.13)_1$ összefüggés a fenti képlet speciális esete. Valóban elemi lépésekkel, a $(4.13)_2$ képlet helyettesítésével azt kapjuk a $(4.13)_1$ összefüggésből, hogy

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{R_o A_k} = \frac{M_c}{R_o 2\pi b R_o} = \frac{M_c}{2b\underbrace{R_o^2\pi}_{A_o}} = \frac{M_c}{2bA_o} = \tau_{\eta z}\,.$$

Legyen l a vizsgálat tárgyát képező cső hossza. Jelölje továbbá Φ_l a cső végkeresztmetszetének a cső kezdeti keresztmetszetéhez viszonyított elfordulását az M_c csavarónyomaték hatására.

Tekintettel a (4.32) és (4.68) összefüggésekre

$$u = \frac{1}{2}\frac{\tau_{\eta z}^2}{G} = \frac{1}{2}\frac{M_c^2}{4Gb^2(s)A_o^2} \tag{4.69}$$

a fajlagos alakváltozási energia értéke. A csőben felhalmozódó teljes alakváltozási energia a fajlagos alakváltozási energia integrálja a cső térfogatán:

$$U = \int_V u\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \frac{M_c^2}{4Gb^2(s)A_o^2}\underbrace{\mathrm{d}V}_{\mathrm{d}A\mathrm{d}z} = \frac{1}{2}\frac{M_c^2}{4GA_o^2}\int_A \frac{1}{b^2(s)}\underbrace{\mathrm{d}A}_{b(s)\mathrm{d}s}\underbrace{\int_l \mathrm{d}z}_{l} = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{G\boxed{\dfrac{4A_o^2}{\oint_{\mathcal{L}_k}\frac{ds}{b(s)}}}}$$

Az

$$\boxed{I_c = \frac{4A_o^2}{\displaystyle\oint_{\mathcal{L}_k}\frac{ds}{b(s)}}} \tag{4.70}$$

jelölés bevezetésével ugyanolyan alakban írható fel a teljes alakváltozási energia mint a kör-, és körgyűrűkeresztmetszetű rúd esetén:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{I_c G}} \tag{4.71}$$

A képletben álló I_c az I_p poláris másodrendű nyomaték analogonja a vékonyfalú, zárt szelvényű cső szabad csavarási feladata esetén. Az M_c csavarónyomaték által végzett munka most is a (4.28) képletből számítható. A (4.28) és (4.71) felhasználásával írható

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_c^2}{I_c G} = \frac{1}{2} M_c \Phi_l = W_K$$

egyenletből rendre

$$\boxed{\Phi_l = \frac{M_c l}{I_c G} \qquad \text{és} \qquad \vartheta = \frac{\Phi_l}{l} = \frac{M_c}{I_c G}} \tag{4.72}$$

a végkeresztmetszetek egymáshoz viszonyított relatív szögelfordulása és a fajlagos elcsavarodási szög. A (4.68) és (4.70) összefüggéseket *Bredt* féle képleteknek nevezi a szakirodalom.

4.6. Mintafeladatok

4.1. A vékonyfalú rúd csavarási feladatával kapcsolatos (4.8) képlet szerint állandó az alakváltozási tenzor mátrixa HKR-ben. Következik-e a mátrix állandó voltából a tenzor állandósága is?

A válasz nem, hiszen az alakváltozási tenzor

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}_R \circ \mathbf{e}_R + \boldsymbol{\alpha}_\varphi \circ \mathbf{e}_\varphi + \boldsymbol{\alpha}_z \circ \mathbf{e}_z = \frac{1}{2}\chi \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{2}\chi \mathbf{e}_\varphi \circ \mathbf{e}_z$$

diádikus előállításában $\mathbf{e}_\varphi$ a φ polárszögtől függ, azaz nem állandó.

4.2. Határozza meg számítással a vékonyfalú csőben ébredő feszültségi állapot főirányait!

A $(4.15)_1$ és (4.30) képletek szerint

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\rho}_R & \boldsymbol{\rho}_\varphi & \boldsymbol{\rho}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ \tau_{\varphi R} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}; \qquad \tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = \frac{M_c}{I_p} R_o$$

a feszültségi tenzor mátrixa a vékonyfalú cső esetén alkalmazott $R\varphi z$ HKR-ben. A továbbiakban követhetők az 1.4. Mintafeladat lépései feltéve, hogy a $\underline{\mathbf{W}}$ helyére $\underline{\mathbf{T}}$-t, a λ helyére pedig σ_n-t gondolunk. Megjegyezzük, hogy az R irány nyilvánvalóan főirány, hiszen $\tau_{\varphi R} = \tau_{zR} = 0$. A (2.59) alapján írható

$$P_3(\lambda) = -\det(\underline{\mathbf{T}} - \sigma_n \underline{\mathbf{E}}) = -\begin{vmatrix} -\sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_n & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & -\sigma_n \end{vmatrix} = \sigma_n(\sigma_n - \tau_{\varphi z})(\sigma_n + \tau_{\varphi z}) = 0$$

egyenletből

$$\sigma_1 = \tau_{\varphi z}, \qquad \sigma_2 = \sigma_R = 0 \qquad \text{és} \qquad \sigma_3 = -\tau_{\varphi z}$$

a három nagyság szerint rendezett főfeszültség, ha $M_c > 0$. Az $\mathbf{n}_1 = n_{R1}\mathbf{e}_R + n_{\varphi 1}\mathbf{e}_\varphi + n_{z1}\mathbf{e}_z$ meghatározásához az

$$\begin{bmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{\varphi z} & -\sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{R1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_{\varphi z} & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_{\varphi z} & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{\varphi z} & -\tau_{\varphi z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{R1} \\ n_{\varphi 1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vagy ami ugyanaz az

$$\tau_{\varphi z} n_{R1} = 0\,, \qquad \tau_{\varphi z}(n_{z1} - n_{\varphi 1}) = 0 \qquad \text{és} \qquad \tau_{\varphi z}(n_{\varphi 1} - n_{z1}) = 0$$

egyenletrendszert kell megoldani. Mivel $\tau_{\varphi z} \neq 0$ és a második két egyenlet nem független egy az $|\mathbf{n}_1| = 1$ normálási feltételnek is eleget tevő megoldás az

$$n_{R1} = 0\,, \quad n_{\varphi 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad n_{z1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \text{azaz az} \quad \mathbf{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z)$$

alakban írható fel. Megjegyezzük, hogy az $n_{R1} = 0$ eredmény azonnal következik abból is, hogy az R irány a 2 jelű főirány, és így

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_R\,,$$

következésképp a másik két főirányt adó $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_3$ egységvektoroknak nem lehet R irányú összetevője. A 3 jelű főirányt az

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z\right) \times \mathbf{e}_R = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_z\right)$$

egységvektor adja. Ezek az eredmények megegyeznek a 4.1.5. szakasz – a részleteket illetően lásd a 4.13. ábrát – második feladatával kapcsolatos eredményekkel.

Ha $M_c < 0$, akkor

$$\sigma_1 = -\tau_{\varphi z}, \qquad \sigma_2 = \sigma_R = 0 \qquad \text{és} \qquad \sigma_3 = \tau_{\varphi z}\ ,$$

a főfeszültségek, továbbá

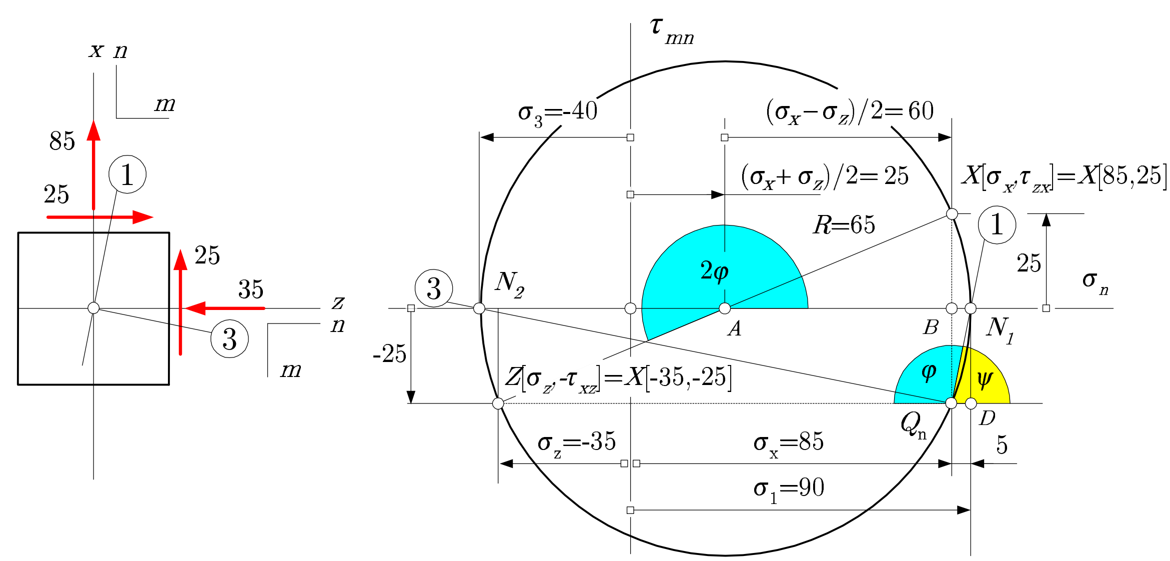
$$\mathbf{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_z\right), \qquad mathbfn_2 = \mathbf{e}_R \qquad \text{és} \qquad \mathbf{n}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z\right)\ .$$

a főirányokat adó egységvektorok.

4.3. Adott a feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR-ben:

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 85 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 \\ 25 & 0 & -35 \end{bmatrix} \left[\mathrm{N/mm^2}\right]$$

Határozza meg a részleges Mohr féle kördiagram segítségével a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzorhoz tartozó főfeszültségeket és főirányokat.



4.24. ábra.

Vegyük észre, hogy az y irány főirány, a $\sigma_y = -10$ feszültség pedig főfeszültség. Szószerint követhetők tehát a megoldás 4.1.4. pontban ismertetett lépései. Magát a megoldást csak vázlatosan mutatjuk be, mivel a 4.24. ábra önmagáért beszél.

A pqr KR-nek most a zxy KR felel meg. Leolvasható a feszültségállapotot szemléltető elemi kocka y tengely felől vett nézeti képéről, hogy a körátmérőt a $Z[\sigma_n, \tau_{mn}] = Z[\sigma_z, -\tau_{xz}] = Z[-35, -25]$ és $X[\sigma_n, \tau_{mn}] = X[\sigma_x, \tau_{zx}] = X[85, 25]$ pontok határozzák meg. A ZX szakasz és a vízszintes tengely metszése a kör közepét adja: $\sigma_A = 25\ \mathrm{N/mm^2}$. Ennek ismeretében az ABX derékszögű háromszögre felírt Pythagoras tételből $R = 65\ \mathrm{N/mm^2}$ a kör sugara, amivel $\sigma_1 = 90\ \mathrm{N/mm^2}$ és $\sigma_3 = -40\ \mathrm{N/mm^2}$ a hiányzó főfeszültségek. ($\sigma_2 = \sigma_y = -10$; $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

Az ábra feltünteti a Q_n pontot, valamint az 1 jelű főtengely és a z tengely szögét – az 1 jelű főtengelytől óramutató járásával ellentétesen haladunk a z tengelyig.

Az is leolvasható az ábráról, hogy az 1 jelű főiránynak

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1 = \sin\psi\, \mathbf{e}_x + \cos\psi\, \mathbf{e}_z$$

az egységvektora, ahol a $Q_n D N_1$ derékszögű háromszög adataival

$$\operatorname{tg}\psi = 5\,, \qquad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \qquad \text{és} \qquad \sin\psi = \frac{\operatorname{tg}\psi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}} = \frac{5}{\sqrt{26}}\,.$$

Következőleg

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\left(5\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z\right)\,, \qquad mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_y \qquad \text{és} \qquad \mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}\left(-\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z\right)$$

a főtengelyek KR-ének egységvektorai.

4.4. Igazolja a fajlagos alakváltozási energia rúd térfogatán vett integrálásával a csavart kör-, illetve körgyűrű keresztmetszetű rúd alakváltozási energiájával kapcsolatos (4.51) képlet helyességét.

Tiszta nyírás esetén a (4.32) képlet adja az alakváltozási energiasűrűség értékét. A (4.16) Hooke törvény, valamint a nyírófeszültséget a csavarónyomaték függvényében adó (4.45) összefüggések helyettesítésével

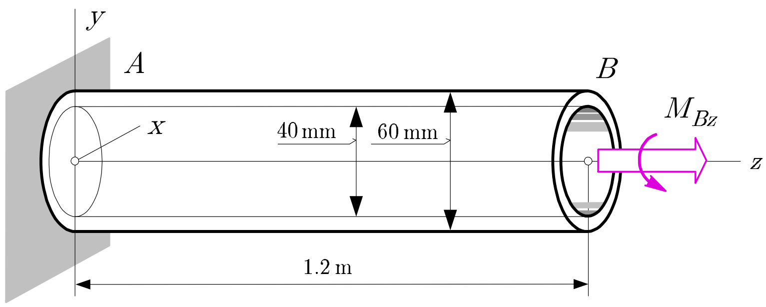
$$u = \frac{1}{2}\tau_{\varphi z}\gamma_{\varphi z} = \frac{1}{2G}\tau_{\varphi z}^2 = \frac{1}{2G}\frac{M_c^2}{I_p^2}R^2$$

a fajlagos alakváltozási energia. A teljes alakváltozási energiát adó integrál átalakítását az alábbiak részletezik:

$$U = \int_V u\,\mathrm{d}V = \int \frac{1}{2G}\frac{M_c^2}{I_p^2}R^2 \underbrace{\mathrm{d}V}_{\mathrm{d}A\,\mathrm{d}z} = \frac{1}{2G}\frac{M_c^2}{I_p^2}\underbrace{\int_A R^2\mathrm{d}A}_{I_p}\underbrace{\int_l \mathrm{d}z}_{l} = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{I_p G}\,.$$

Az átalakítások során figyelembe vettük, hogy a G, az M_c és az I_p mindegyike állandó. A kapott eredmény valóban megegyezik a (4.51) képlettel.

4.5. Az ábrán vázolt baloldalon befogott 1.2 m hosszú körgyűrűkeresztmetszetű rúdnak $d = 40$ mm a belső és $D = 60$ mm a külső átmérője. (a) Mekkora lehet a rudat csavarásra terhelő M_{Bz} nyomaték maximuma, ha a nyírófeszültség nem haladhatja meg a $|\tau_{\varphi z}|_{\max} = 72$ MPa értéket? (b) Mekkora a nyírófeszültség minimuma, ha az előző érték annak maximuma? (c) Mekkora a véglap szögelfordulása, ha a rúd lágyacélból készült, amelyre $G = 80$ GPa?



4.25. ábra.

(a) Visszaidézve a (4.45) és (4.49) képleteket írhatjuk, hogy

$$M_c = \frac{2I_p\,|\tau_{\varphi z}|_{\max}}{D}\,, \tag{4.73}$$

ahol

$$I_p = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32} = \frac{(60^4 - 40^4)\pi}{32} = 1.021 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4\,.$$

Az utóbbi érték, valamint $|\tau_{\varphi z}|_{\max}$ (4.73) képletbe történő helyettesítésével

$$M_c = \frac{2I_p\,|\tau_{\varphi z}|_{\max}}{D} = \frac{2 \times 1.021 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4 \times 72\,\mathrm{N/mm}^2}{60\,\mathrm{mm}} = 2.4504 \times 10^6\,\mathrm{Nmm}\,.$$

(b) A $\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültség az $R = d/2$ sugárnál, ez a belső palást sugara, minimális. Mivel a nyírófeszültség homogén lineáris függvénye a sugárnak kapjuk, hogy

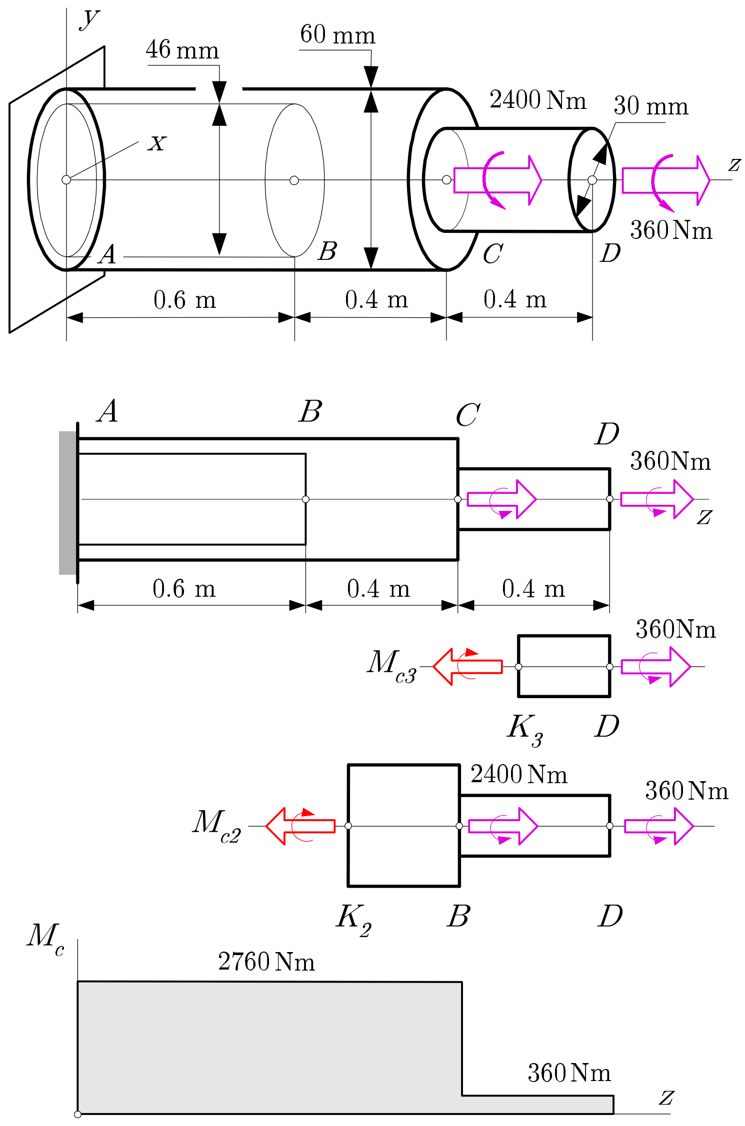
$$|\tau_{\varphi z}|_{\min} = \frac{d}{D}\,|\tau_{\varphi z}|_{\max} = \frac{40\,\mathrm{mm}}{60\,\mathrm{mm}} \times 72\,\mathrm{N/mm}^2 = 48\,\mathrm{N/mm}^2\,.$$

(c) A véglap szögelfordulása a (4.50) képletbe történő helyettesítéssel adódik:

$$\varPhi_l = \frac{M_c l}{I_p G} = \frac{2.4504 \times 10^6\,\mathrm{Nmm} \times 1.2 \times 10^3\,\mathrm{mm}}{1.021 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4 \times 80 \times 10^3\,\mathrm{N/mm}^2} = 0.036\ \text{radián}\,.$$

Ezzel megoldottuk a feladatot.

4.6. A 4.26. ábrán vázolt és baloldali végén befogott tengely acélból készült ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{GPa}$). A tengely befogott végébe 46 mm átmérőjű lyukat fúrtak. A lyuknak 0.6 m a mélysége. Határozza meg a D keresztmetszet szögfelfordulását, ha a tengelyt az ábrán feltüntetett csavarónyomatékok terhelik. Feltételezzük, hogy minden egyes tengelyszakasz tiszta csavarásra van igénybevéve.



4.26. ábra.

Az AB, BC és CD keresztmetszetpárok közötti szakaszok rendre az 1, 2 és 3 jelű szakaszok. Ezek mindegyike állandó keresztmetszetű, és amint az lentebb kiderül ezeken a szakaszokon belül állandó a csavarónyomaték (csavaróigénybevétel) értéke.

A 4.26. ábra az axonometrikus ábrarészlet után rendre szemlélteti a tengely elölnézeti képét, a K_3D és K_2D tengelyszakaszokat valamint a rájuk ható külső és belső erőket (csavarónyomatékokat). Mivel nincs külső terhelés az AC szakaszon belül, azonnal következik a K_3D és K_2D tengelyszakaszok egyensúlyából, hogy

$$M_{c1} = M_{c2} = 2760 \text{ NM}$$

és

$$M_{c3} = 360 \text{ NM}\,.$$

A kapott értékekkel megrajzolt $M_c(z)$ függvény (a csavarónyomatéki ábra) a teljes ábra legalján látható.

A továbbiakban szükség lesz az 1, 2 és 3 jelű szakaszok keresztmetszeteinek poláris másodrendű nyomatékaira. A (4.48), (4.49) képletek és az ábra adatainak felhasználásával kapjuk, hogy

$$I_{p1} = \frac{\left(D_1^4 - d_1^4\right)\pi}{32} = \\ = \frac{\left((60\,\text{mm})^4 - (46\,\text{mm})^4\right)\pi}{32} = \\ = 8.328 \times 10^5 \text{ mm}^4\,,$$

$$I_{p2} = \frac{d_2^4\pi}{32} = \frac{(60\,\text{mm})^4\pi}{32} = \\ 1.272 \times 10^6 \text{ mm}^4\,,$$

és hogy

$$I_{p3} = \frac{d_3^4\pi}{32} = \frac{(30\,\text{mm})^4\pi}{32} = 79522 \text{ mm}^4\,.$$

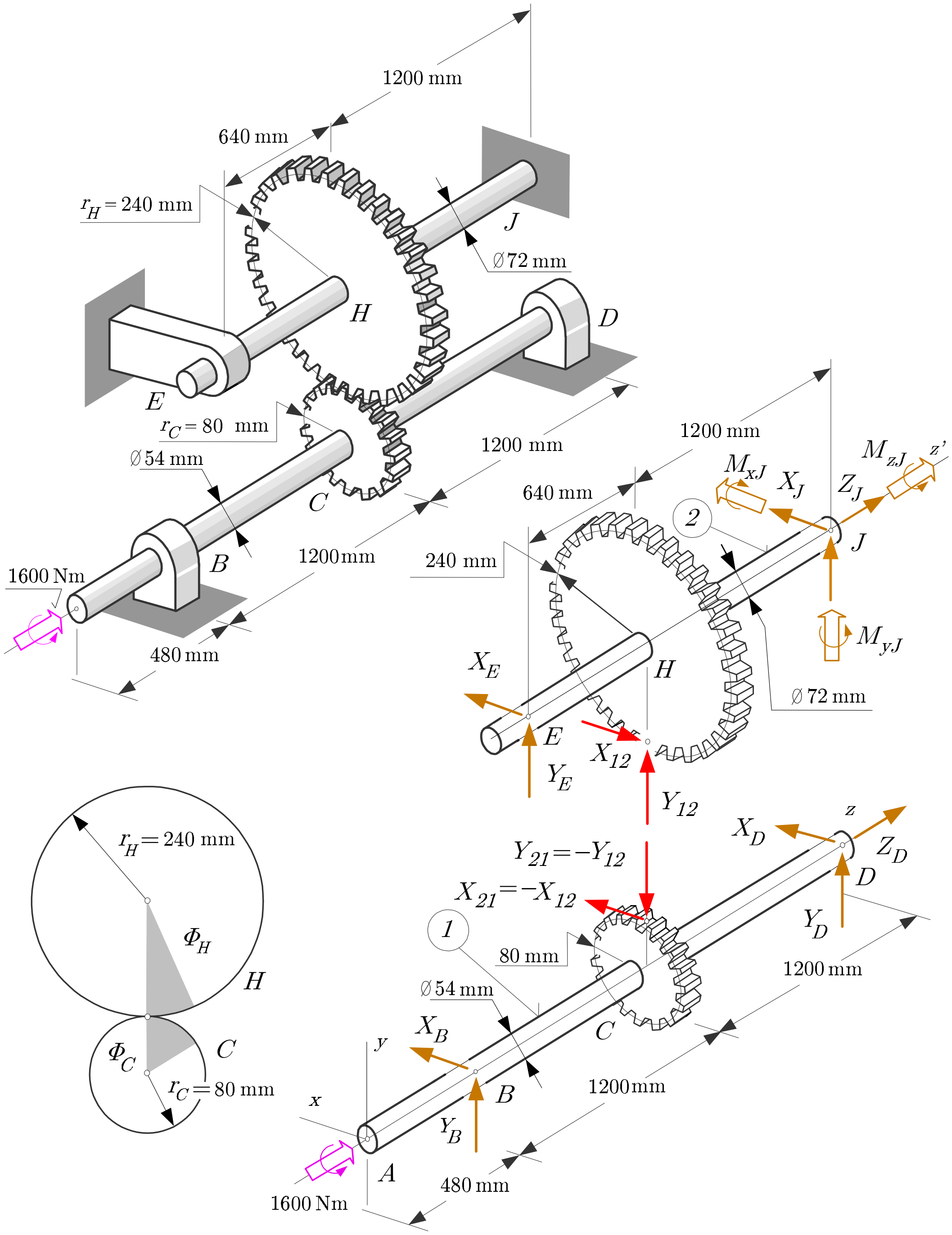
A tengely véglapjának szögelfordulását az AB, BC és CD tengelyszakaszok B, C és D keresztmetszeteinek a kezdő A, B és C keresztmetszetekhez viszonyított szögelfordulásainak összege adja. A (4.57) képlet felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\varPhi_{DA} = \varPhi_l = \varPhi_1 + \varPhi_2 + \varPhi_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{M_{ci} l_i}{I_{pi} G_i} =$$

$$= \frac{2760 \times 10^3 \text{Nmm } 600 \text{ mm}}{8.328 \times 10^5 \text{ mm}^4\ 80 \times 10^3 \text{N/mm}^2} + \frac{2760 \times 10^3 \text{Nmm } 400 \text{ mm}}{1.272 \times 10^6 \text{ mm}^4\ 80 \times 10^3 \text{N/mm}^2} +$$

$$+ \frac{360 \times 10^3 \text{Nmm } 400 \text{ mm}}{79522 \text{ mm}^4\ 80 \times 10^3 \text{N/mm}^2} = 2.486 \times 10^{-2} + 1.085 \times 10^{-2} + 2.264 \times 10 \times 10^{-2} = 0.05835\,.$$

4.7. A 4.27. ábra két merevnek tekintett fogaskerekek révén egymáshoz kapcsolódó acéltengelyt ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{GPa}$) szemléltet. Határozza meg (a) az A keresztmetszet szögelfordulását a rúd hossztengelye körül, valamint (b) a maximális nyírófeszültséget a tengelyekben feltéve, hogy csak a csavarás hatását vesszük figyelembe.



4.27. ábra.

Az ábra külön-külön is feltünteti a két tengelyt, valamint a rájuk ható külső és belső erőket, továbbá a C és H fogaskerekek középköreit. A támasztóerők és támasztónyomatékok megrajzolása során azt tételeztük fel, hogy a B, E támaszok görgős támaszként viselkednek (nem gátolják az elfordulást és a z irányú mozgást), a D támasz csuklóként viselkedik (meggátolja a D pont elmozdulását, de ugyanott a forgást nem), mig a J támasz befogás, amely minden mozgást meggátol. Mivel a kitűzött feladat megoldása szemszögéből csak az $X_{21} = -X_{12}$ belső erőknek lesz szerepe a többi ismeretlen támasztóerő és támasztónyomaték meghatározásával ehelyütt nem foglalkozunk.

Az 1 jelű rúd tengelyére számított nyomatékok egyensúlyát az

$$m_z = 1600\,\mathrm{Nm} - 80\,\mathrm{mm}\,X_{21} = 0$$

egyenlet fejezi ki, ahonnan

$$X_{21} = 20\,\mathrm{kN}\ .$$

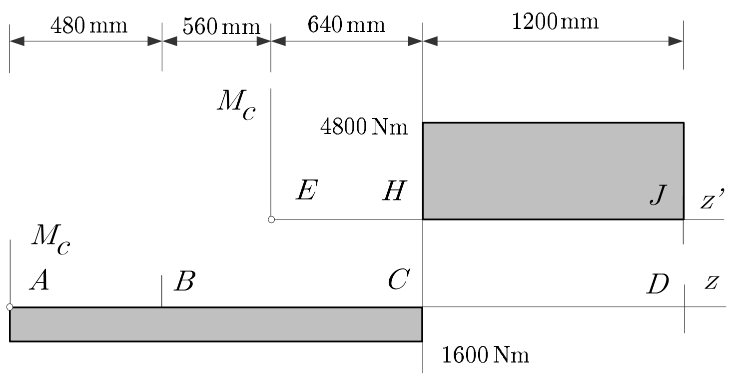
Mivel $X_{12} = -X_{21} = -20\,\mathrm{kN}$ a 2 jelű rúd tengelyére számított nyomatékok egyensúlyából

$$m_{z'} = M_{zJ} - 240\,\mathrm{mm}\,20\,\mathrm{kN} = 0\,,$$

vagyis

$$M_{zJ} = 4800\,\mathrm{Nm}\ .$$

A kapott eredmények szerint, ez leolvasható a 4.28. csavarónyomatéki ábrákról is, az 1 jelű rúd AC szakaszán $M_{c1} = -1600\,\mathrm{Nm}$, a 2 jelű rúd HJ szakaszán pedig $M_{c2} = 4800\,\mathrm{Nm}$ a csavarónyomaték értéke.



4.28. ábra.

A továbbiakban szükség lesz az egyes tengelyek poláris másodrendű nyomatékaira. A (4.48) alatti képlet felhasználásával

$$I_{p1} = \frac{D_1^4\pi}{32} = \frac{(54\,\mathrm{mm})^4\pi}{32} = 8.3479\times10^5\mathrm{mm}^4\ , \qquad I_{p2} = \frac{D_2^4\pi}{32} = \frac{(72\,\mathrm{mm})^4\pi}{32} = 2.6383\times10^6\mathrm{mm}^4\ .$$

Tekintettel a (4.50) összefüggésre a H jelű fogaskerék ϕ_H szögelfordulásának, vagy ami ugyanaz a 2 jelű rúd H keresztmetszete J keresztmetszethez viszonyított szögelfordulásának

$$\Phi_H = \Phi_{HJ} = -\Phi_{JH} = -\frac{M_{c2}\,l_{HJ}}{I_{p2}G} = -\frac{4800\,\mathrm{Nm}\times1200\,\mathrm{mm}}{2.6383\times10^6\,\mathrm{mm}^4\times80\times10^3\mathrm{N/mm}^2} =$$
$$= -2.729\times10^{-2}\ \mathrm{rad} = -1.564^o$$

az értéke. Mivel a két fogaskerék középkörén azonos ívek tartoznak a fogaskerekek szögelfordulásaihoz fennáll a

$$\Phi_H\,r_H = -\Phi_C\,r_C\ , \qquad \text{azaz a} \qquad \Phi_C = -\Phi_H\,\frac{r_H}{r_C} = -3\,\Phi_H$$

egyenlet. Az A keresztmetszet C keresztmetszethez viszonyított szögelfordulását ugyanúgy számítjuk, mint a H jelű fogaskerék szögelfordulását:

$$\Phi_{AC} = -\Phi_{CA} = -\frac{M_{c1}\,l_{AC}}{I_{p1}G} = -\frac{-1600\,\mathrm{Nm}\times1680\,\mathrm{mm}}{8.3479\times10^5\,\mathrm{mm}^4\times80\times10^3\mathrm{N/mm}^2} = 4.025\times10^{-2}\ \mathrm{rad} = 2.306^{\,o}$$

Az A keresztmetszet teljes szögelfordulását a

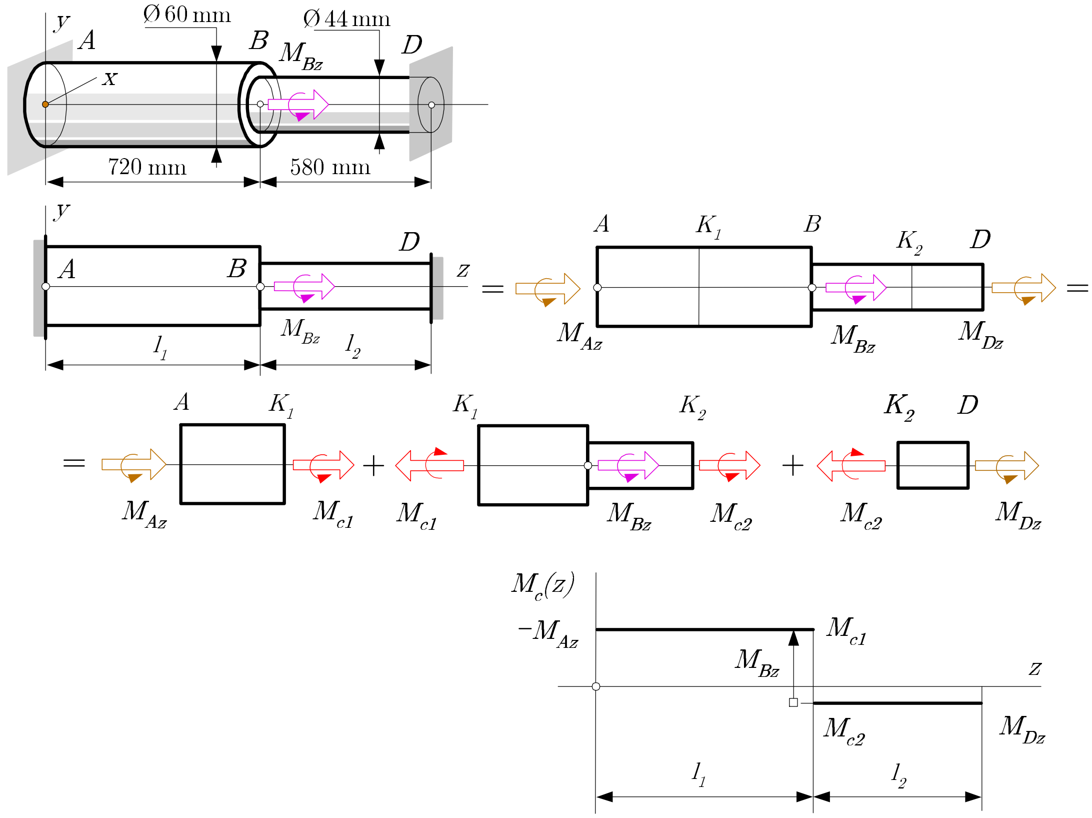
$$\Phi_A = \Phi_{AC} + \Phi_C = \Phi_{AC} - 3\Phi_H = 2.306^{\,o} + 3\times1.564^o = 6.998^o$$

összeg adja.

Felhasználva a (4.46) összefüggést az alábbiak szerint számíthatjuk a maximális nyírófeszültséget az 1 és 2 jelű rudakban:

$$\tau_{\max1} = \frac{|M_{c1}|}{I_{p1}}\frac{D_1}{2} = \frac{1600\,\mathrm{Nm}}{8.3479\times10^5\,\mathrm{mm}^4}\times27\,\mathrm{mm} = 51.7\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$
$$\tau_{\max2} = \frac{|M_{c2}|}{I_{p2}}\frac{D_2}{2} = \frac{4800\,\mathrm{Nm}}{2.6383\times10^6\,\mathrm{mm}^4}\times36\,\mathrm{mm} = 65.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

4.8. A 4.29. ábrán vázolt tengely 1 jelű AB szakasza acélból ($G_{\text{acél}} = 80$ MPa), 2 jelű BD szakasza peidg bronzból ($G_{\text{bronz}} = 40$ MPa) készült. A tengelyt az $M_{Bz} = 1200$ Nm nyomaték terheli. Határozza meg a csavarásból adódó nyírófeszültség maximumát mind az (a) AB, mind pedig a (b) BD szakaszon belül, ha nem vesszük figyelembe a keresztmetszetváltozás hatását a feszültségképre.



4.29. ábra.

Az rúd axonometrikus képe alatti ábrarészlet – pozitívnak véve az ismeretlen mennyiségeket – feltünteti

- a rúd elölnézeti képét,
- a támaszairól levett rudat annak M_{Bz} terhelésével, valamint a rúdon működő egyelőre ismeretlen M_{Az}, M_{Dz} támasztónyomatékokat,
- a rúd AK_1, K_1K_2 és K_2D jelű részeit – K_1 és K_2 az AB, illetve BD szakaszokon belül található rúdkeresztmetszetek –, továbbá a rajtuk ható külső és belső erőket, és végül
- az $M_c(z)$ csavarónyomatéki ábra vázlatát.

Érdemes ehelyütt felhívni a figyelmet arra a körülményre, hogy az előjelek tekintetében a végeredmény figyelembevételével jelleghelyesen rajzoltuk meg a csavarónyomatéki ábrát. Ez a körülmény azonban nem játszik szerepet a számításokban.

Mivel a rúd egyensúlyban van fenn kell állnia a

$$M_{Az} + M_{Bz} + M_{Cz} = 0$$

az egyensúlyi egyenletnek. Az A és D keresztmetszet befogott volta miatt pedig zérus az egymáshoz viszonyított szögelfordulásuk. Írhatjuk tehát a (4.57) képlet alapján, valamint az AK_1, K_2D rúdszalkaszok egyensúlyából következő $M_{c1} = -M_{Az}$, $M_{c2} = -M_{Dz}$ képletek figyelembevételével, hogy

$$\Phi_{AD} = \frac{M_{c1}\, l_1}{I_{p1}\, G_1} + \frac{M_{c2}\, l_2}{I_{p2}\, G_2} = -\frac{M_{Az}\, l_1}{I_{p1}\, G_1} + \frac{M_{Dz}\, l_2}{I_{p2}\, G_2} = 0\,.$$

Az utóbbi két egyenletből egyszerű számításokkal kapjuk a

$$M_{Az} = -\frac{I_{p1}\, G_1\, l_2}{I_{p1}\, G_1\, l_2 + I_{p2}\, G_2\, l_1} M_{Bz} \quad \text{és} \quad M_{Dz} = -\frac{I_{p2}\, G_2\, l_1}{I_{p1}\, G_1\, l_2 + I_{p2}\, G_2\, l_1} M_{Bz}$$

eredményeket. Vegyük észre, hogy állandó keresztmetszetű homgén rúdra a fenti képletek a (4.65) alatti megoldásokra egyszerűsödnek.

Az $M_{c1} = -M_{Az}$ és $M_{c2} = M_{Bz}$ nyomatékok számításához szükség van az 1 és 2 jelű rúdszakaszok keresztmetszeteinek másodrendű nyomatékaira. A (4.48) képlet alapján kapjuk, hogy

$$I_{p1} = \frac{D_1^4\pi}{32} = \frac{(60\,\mathrm{mm})^4\,\pi}{32} = 1.272\,3\times10^6\,\mathrm{mm}^4 \qquad \text{és} \qquad I_{p2} = \frac{D_2^4\pi}{32} = \frac{(44\mathrm{mm})^4\,\pi}{32} = 3.679\,7\times10^5\,\mathrm{mm}^4\,.$$

A másodrendű nyomatékokkal, valamint a feladat többi adataival

$$I_{p1}\,G_1\,l_2 = 1.272\,3\times10^6\,\mathrm{mm}^4\times8\times10^4\,\mathrm{MPa}\times580\,\mathrm{mm} = 5.903\,5\times10^{13}\mathrm{Nmm}^3\,,$$
$$I_{p2}\,G_2\,l_1 = 3.679\,7\times10^5\,\mathrm{mm}^4\times4\times10^4\,\mathrm{MPa}\times720\,\mathrm{mm} = 1.059\,8\times10^{13}\mathrm{Nmm}^3\,,$$
$$I_{p1}\,G_1\,l_2 + I_{p2}\,G_2\,l_1 = 5.903\,5\times10^{13} + 1.059\,8\times10^{13}\,\mathrm{Nmm}^3 = 6.963\,3\times10^{13}\mathrm{Nmm}^3\,,$$

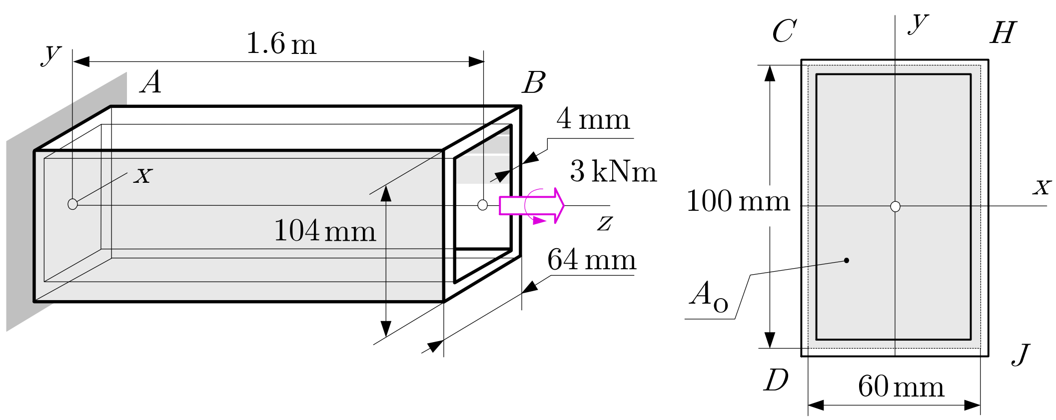
azaz

$$M_{Az} = -M_{c1} = -\frac{I_{p1}\,G_1\,l_2}{I_{p1}\,G_1\,l_2 + I_{p2}\,G_2\,l_1}\,M_{Bz} = -\frac{5.9035}{6.9633}\times1200\,\mathrm{Nm} = -1017.4\,\mathrm{Nm}\,,$$
$$M_{Dz} = M_{c2} = -\frac{I_{p2}\,G_2\,l_1}{I_{p1}\,G_1\,l_2 + I_{p2}\,G_2\,l_1}\,M_{Bz} = -\frac{1.0598}{6.9633}\times1200\,\mathrm{Nm} = -182.6\,\mathrm{Nm}\,.$$

A támasztónyomatékok birtokában a (4.46) képlet segítségével számíthatjuk a nyírófeszültségek maximumait:

$$\tau_{\max 1} = \frac{|M_{c1}|}{I_{p1}}\frac{D_1}{2} = \frac{1017.4\times10^3\mathrm{Nmm}}{1.272\,3\times10^6\,\mathrm{mm}^4}\times30\,\mathrm{mm} \simeq 24\,\mathrm{MPa}\,,$$
$$\tau_{\max 2} = \frac{|M_{c2}|}{I_{p2}}\frac{D_2}{2} = \frac{182.6\times10^3\mathrm{Nmm}}{3.679\,7\times10^5\,\mathrm{mm}^4}\times2\,\mathrm{mm} \simeq 11\,\mathrm{MPa}\,.$$

4.9. A 4.30. ábra vékonyfalú zárt szelvényű húzott acélrudat szemléltet ($G_{\text{acél}} = 80\,\mathrm{GPa}$). A rudat csavarónyomaték terheli. (a) Számítsa ki a négy fal mindegyikében a nyírófeszültséget! (b) Határozza meg az I_c másodrendű nyomaték értékét, majd ennek ismeretében a B keresztmetszet A keresztmetszethez viszonyított Φ_{AB} szögelfordulását, illetve (c) a csavarónyomaték munkáját (a rúdban felhalmozódó alakváltozási energiát)!



4.30. ábra.

Az ábra baloldala külön is feltünteti a rúd keresztmetszetét. Leolvasható erről az ábrarészletről – lásd a szaggatott vonallal határolt és halványszürkén kiemelt téglalapot –, hogy

$$A_o = 6\times10^3\,\mathrm{mm}^2$$

a keresztmetszet középvonala által határolt terület. Mivel állandó a rúd falvastagsága következik, hogy ugyanaz a keresztmetszet középvonala mentén, azaz mind a négy oldalfalban, a nyírófeszültség. A (4.68) képlet és az ábra adatai alapján kapjuk, hogy

$$\tau_{\eta z}(s) = \frac{M_c}{2b(s)A_o} = \frac{3\,\mathrm{kNM}}{2\times4\,\mathrm{mm}\times6\times10^3\,\mathrm{mm}^2} = 62.5\,\mathrm{MPa}$$

a nyírófeszültség értéke.

Az I_c másodrendű nyomaték, ismét felhasználva az ábra adatait, a (4.70) képlet segítségével számítható:

$$I_c = \frac{4A_o^2}{\displaystyle\oint_{\mathcal{L}_k} \frac{ds}{b(s)}} = \frac{4 \times \left(6 \times 10^3\,\mathrm{mm}^2\right)^2}{\frac{1}{4\,\mathrm{mm}} \times [2 \times 100\,\mathrm{mm} + 2 \times 60\mathrm{mm}]} = 1.8 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4\ .$$

Az I_c birtokában a (4.72) képlet szerint

$$\Phi_{AB} = \frac{M_c l}{I_c G} = \frac{3\,\mathrm{kNM} \times 1.6\,\mathrm{m}}{1.8 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4 \times 80 \times 10^3\mathrm{N/mm}^2} = 3.333 \times 10^{-2}\ \mathrm{rad}$$

a B keresztmetszet szögelfordulása.

A (4.71) és a (4.72) képletekkel

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{I_c G} = \frac{1}{2} M_c \Phi_{AB} = \frac{1}{2} \times 3\,\mathrm{kNM} \times 3.333 \times 10^{-2}\ \mathrm{rad} = 50000.0\ \mathrm{Nmm}$$

az M_c csavarónyomaték munkája (a rúdban felhalmozódott alakváltozási energia).

Gyakorlatok

4.1. Adott a feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR-ben:

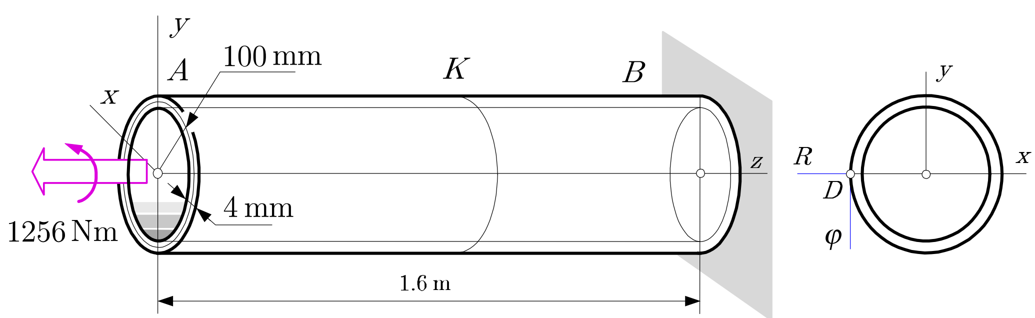
$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 90 & 80 & 0 \\ 80 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\mathrm{N/mm}^2\right]$$

Határozza meg a részleges Mohr féle kördiagram segítségével a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzorhoz tartozó főfeszültségeket és főirányokat. (A megoldás során a 4.3. Mintafeladat gondolatmenetét kövesse.)

4.2. Határozza meg az 1.8. Gyakorlatban adott feszültségi tenzor esetén – v.ö.: 22. o. – a részleges Mohr-féle kördiagram segítségével a feszültségi tenzorhoz tartozó főfeszültségeket és főirányokat! (A megoldás során most is a 4.3. Mintafeladat gondolatmenetét kövesse.)

4.3. Írja föl csavart kör- és körgyűrű keresztmetszetű prizmatikus rúd esetén az elmozdulásmezőt, az alakváltozási tenzort és a feszültségi tenzort az xyz kartéziuszi KR-ben – a (4.34) képletből érdemes kiindulni.

4.4. A 4.31. ábrán vázolt vékonyfalú csövet az $M_c = 1256$ Nm csavarónyomaték terheli. Az ábra feltünteti a cső egy K keresztmetszetét is. [Az (a),…,(e) kérdések megválaszolásakor a 4.1. szakasz



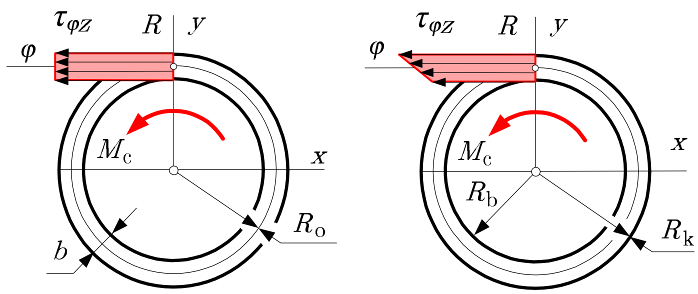
4.31. ábra.

képleteit alkalmazza!] (a) Számítsa ki a K keresztmetszet D pontjában a τ_{yz} feszültség értékét ($\pi \approx 3.14$)! (b) Írja fel a $\boldsymbol{T}_D$ feszültségi tenzor mátrixát az xyz kartéziuszi és az $R\varphi z$ henger KR-ben és szemléltesse a D pont feszültségi állapotát az elemi kockán! (c) Számítsa ki a D pontbeli alakváltozási tenzor mátrixát mindkét KR-ben, ha a cső bronzból készült ($G_{\mathrm{bronz}} = 40$ GPa)! (d) Számítsa ki az A keresztmetszet szögelfordulását a befogott B keresztmetszethez viszonyítva! (e) Mekkora a csőben felhalmozódott alakváltozási energia?

4.5. Oldja meg az előző feladatot vastag falúnak tekintve a csövet. Hány százaléka az előző feladat (a) kérdésének megválaszolása során kapott τ_{yz} feszültség abszolut értéke a pontos megoldásból adódó $\tau_{\max}$-nak?

4.6. Mekkora legyen a 4.31 ábrán vázolt cső belső átmérője változatlan külső átmérő mellett, ha 22.25 kNm a csavarónyomaték értéke és $\tau_{\mathrm{meg}} = 50\,\mathrm{MPa}$?

4.7. A 4.32. ábra körgyűrűkeresztmetszetű rúd esetén szemlélteti a rúd egy keresztmetszetében az M_c csavarónyomaték hatására kialakuló feszültségeloszlást az y tengely mentén $y > 0$ esetén, ha a rúd vékonyfalú és a vonatkozó (4.13) közelítő, illetve ha a pontos (4.43) megoldást használjuk.



4.32. ábra.

(a) Mutassa meg felhasználva az ábra adatait, hogy a pontos megoldásból számított $\tau_{\max}$ és a közelítő megoldásból számított $|\tau_{\varphi z}| = \tau$ eleget tesz a

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau} = \frac{1 + \dfrac{b}{2R_o}}{1 + \left(\dfrac{b}{2R_o}\right)^2}$$

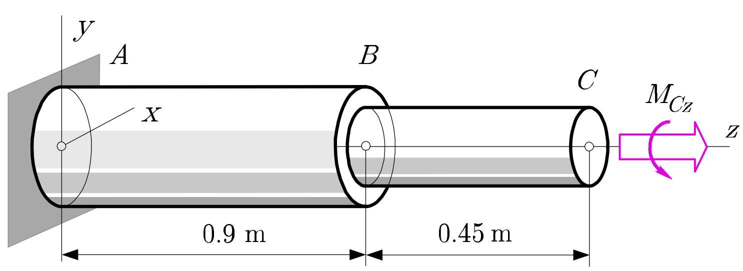
összefüggésnek! (b) Igazolja, kihasználva a fenti összefüggést, hogy a $b/2R_o < 0.112$ reláció fennállása esetén kisebb mint 5% a pontos megoldáshoz viszonyított hiba!

4.8. Jelölje a csavart kőrgyűrűkeresztmetszetű rúd külső átmérőjét R_k, belső átmérőjét pedig R_b. Határozza meg az előző feladatból vett $\tau_{\max}/\tau$ hányados értékét az $R_b/R_k = 1.0$, 0.95, 0.9, 0.85, 0.8, 0.75, és 0.5 viszonyszámokra.

4.9. Mekkora az átmérője a 6.4 m hosszú csavart acélrúdnak, ha a véglapja egy teljes fordulatot végez és a maximális nyírófeszültség nem haladhatja meg a 125.6 MPa értéket ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{MPa}$; $\pi \approx 3.14$).

4.10. Melegvíz kút fúrásakor a fúrófej a 900 m mélységet érte el. Újraindításkor azt figyelték meg, hogy a 200 mm külső átmérőjű acél fúrócső egy teljes fordulatot végez mielőtt a fúrófej újra munkához kezdene. Mekkora a fúrócsőben a csavarásból adódó nyírófeszültség maximuma? ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{MPa}$.)

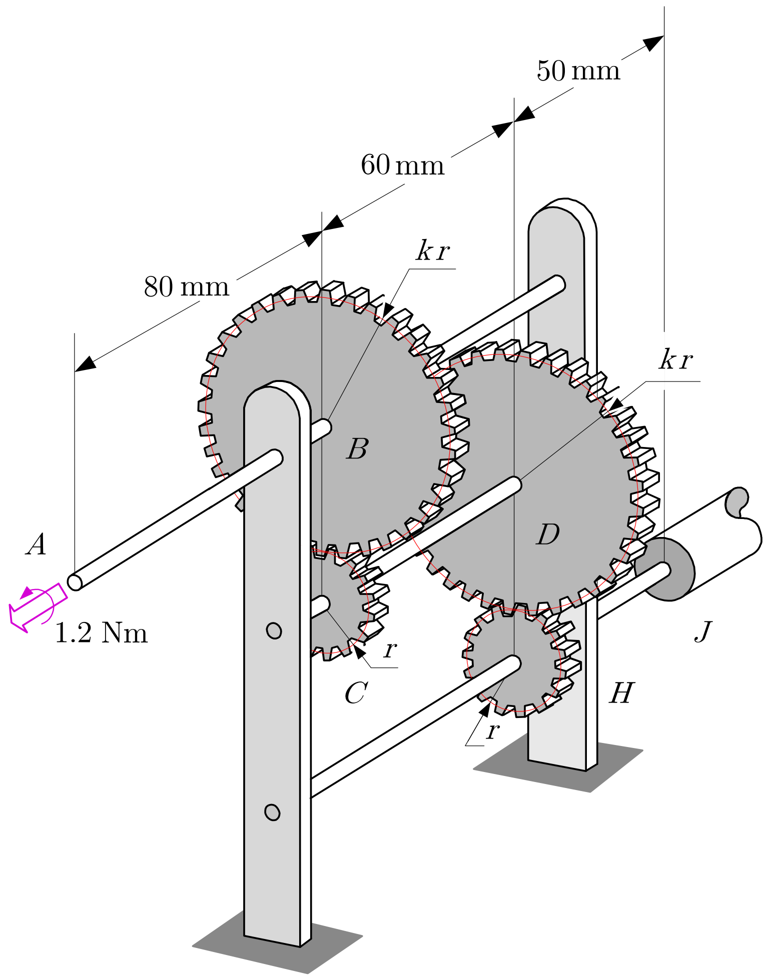
4.11. A 4.33. ábrán vázolt rúd AB szakaszán 36 MPa, BC szakaszán pedig 90 MPa a megengedett nyírófeszültség. Az AB szakasznak 92 mm a BC szakasznak pedig 70 mm az átmérője. Mekkora lehet a rudat terhelő M_{Cz} csavarónyomaték maximuma, ha nem vesszük figyelembe a keresztmetszetváltozás feszültséggyüjtő hatását?



4.33. ábra.

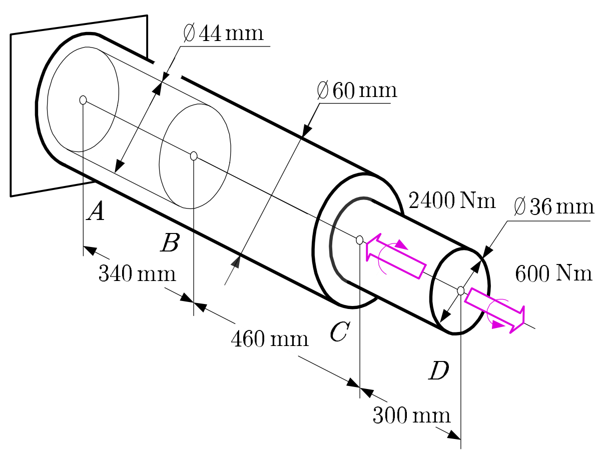
4.12. A 4.33. ábrán vázolt rúd AB szakasza bronzból ($G_{\text{bronz}} = 40\,\text{GPa}$), BC szakasza pedig acélból ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{MPa}$) készült. A megengedett nyírófeszültség értéke ugyanakkora mindkét szakaszon, mint az előző feladatban. A rudat az $M_{Cz} = 6\,\text{kNm}$ csavarónyomaték terheli. Határozza meg (a) az AB és BC szakaszok átmérőit, majd (b) a C keresztmetszet szögelfordulását, és végül (c) a rúdban felhalmozódott alakváltozási energiát.

4.13. Az AB tengely valamely műszer mért jellel arányos elfordulását közvetíti egy fogaskerekekből és tengelyekből álló és alkalmas áttételt biztosító jelátalakító révén, amely négy merevnek tekintett fogaskerékből és 5 mm átmérőjű tengelyekből áll. Két fogaskeréknek r, a másik két fogaskeréknek pedig kr a sugara. Mekkora az A keresztmetszet szögelfordulása, ha a jelfogadó oldal megakad, azaz nem tud elfordulni a J keresztmetszet. ($G = 80\,\mathrm{GPa}$, $k = 2$.)



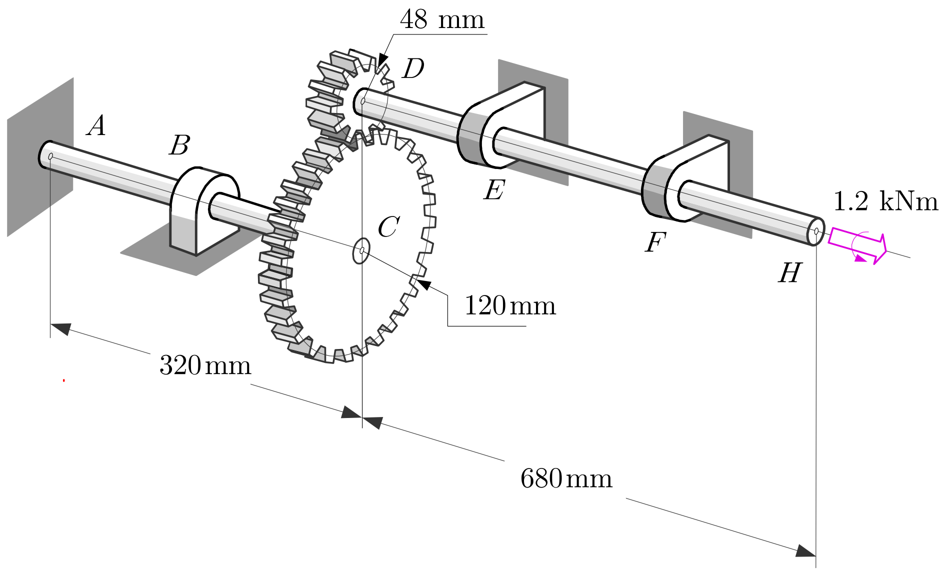
4.34. ábra.

4.14. A 4.35. ábrán vázolt tengelyszerű alkatrész AC szakasza bronzból ($G_{\mathrm{bronz}} = 39\,\mathrm{GPa}$), CD szakasza pedig alumíniumból készült ($G_{\mathrm{al}} = 26\,\mathrm{GPa}$). Az AB szakaszban 44 mm átmérőjű furat van. Határozza meg az ábra adataival (a) a maximális nyírófeszültséget, (b) a véglap szögelfordulását és (c) az alakváltozási energiát!



4.35. ábra.

4.15. A 4.36. ábrán vázolt és egymáshoz merevnek vett fogaskerekekkel kapcsolódó két acéltengely ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{GPa}$) azonos átmérőjű kell, hogy legyen. További követelmény, hogy a nyírófeszültség maximumának ki kell elégítenie a $\tau_{\max} \leq 64$ MPa relációt és hogy a H keresztmetszet rúd tengelye körüli szögelfordulása nem nagyobb, mint 1.5^o. Határozza meg a tengelyek közös átmérőjét, ha csak a csavarás hatását vesszük figyelembe!

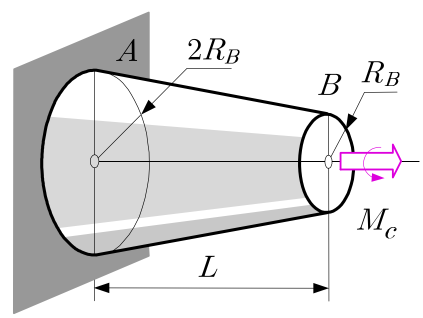


4.36. ábra.

4.16. Mutassa meg, hogy a 4.37. ábrán vázolt kúpos tengely esetén

$$\Phi_{AB} = \frac{7}{12\pi}\frac{M_c\,L}{G\,R_B^4}$$

a B keresztmetszet A keresztmetszethez viszonyított szögelfordulása. (Az igazolás a (4.61) képlet értelemszerű alkalmazásán alapul.)



4.37. ábra.

4.17. A 4.38. ábrán vázolt kúpalakú héj vékony ($b/R_B < 0.1$). Mutassa meg, hogy ez esetben

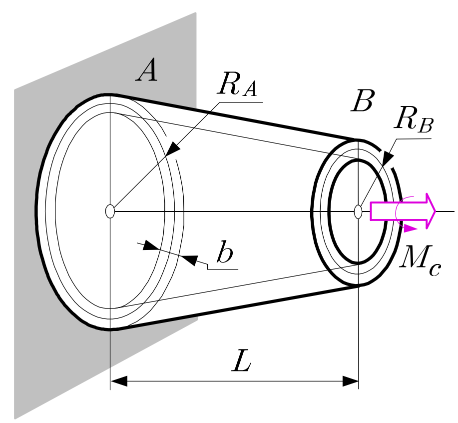
$$\Phi_{AB} = \frac{M_c}{4\pi G}\frac{L}{b}\frac{R_A + R_B}{R_A^2 R_B^2}$$

a B keresztmetszet A keresztmetszethez viszonyított szögelfordulása.

4.18. Igazolja, hogy a 4.38. ábrán vázolt kúpalakú héj esetén

$$\Phi_{AB} = \frac{M_c}{6\pi G}\frac{L}{R_A - R_B}\frac{1}{b^3}\ln\frac{1+\left(\frac{b/2}{R_B}\right)^2}{1+\left(\frac{b/2}{R_A}\right)^2}$$

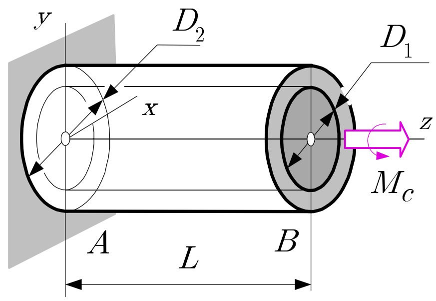
a B keresztmetszet A keresztmetszethez viszonyított szögelfordulása, ha vastag a héj.



4.38. ábra.

4.19. Oldja meg a 4.8. Mintafeladatot, ha a rúd teljes egészében (a) acélból illetve (b) bronzból készült. Mi a változás lényege a befogás helyén ébredő támasztónyomatékok (csavarónyomatékok) tekintetében?

4.20. Tételezze fel, hogy 4.14. Gyakorlatban vizsgált és a 4.35. ábrán vázolt tengelyszerű alkatrész D keresztmetszete is befogott. Mekkora a maximális nyírófeszültség, ha az alkatrészt a D keresztmetszeteben működő és az ábrán is feltüntetett 2400 Nm nyomaték terheli.



4.39. ábra.

4.21. A 4.39. ábra heterogén anyagú tengelyt szemléltet. Ennek, ha $0 \leq R < D_1/2$ akkor G_1 és ν_1, ha $D_1/2 < R \leq D_2/2$ akkor pedig G_2 és ν_2 az anyagjellemzői. A két különböző anyag közös felületén, azaz a $D_1/2$ sugarú hengeren azonos a φ irányú elmozdulás. Mutassa meg, hogy

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_{c1}}{I_{p1}} R \quad \text{ha} \quad 0 \leq R < D_1/2$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_{c2}}{I_{p2}} R \quad \text{ha} \quad D_1/2 < R \leq D_2/2$$

ahol I_{p1} és I_{p2} rendre a D_1 átmérőjű kör illetve a D_1 belső-, és D_2 külső átmérőjű körgyűrű poláris másodrendű nyomatéka, és

$$\vartheta = \frac{M_c}{I_{p1}G_1 + I_{p2}G_2}$$

a fajlagos szögelfordulás, amellyel

$$M_{ci} = \vartheta G_i I_{pi} = \frac{I_{pi}G_i}{I_{p1}G_1 + I_{p2}G_2} M_c \,, \qquad i = 1, 2\,.$$

(Abból a körülményből érdemes kiindulni, hogy a heterogén tengely elmozdulásmezeje úgyanúgy számítható mint homogén esetben, azaz érvényesek a (4.34), (4.36) és (4.37) összefüggések.)

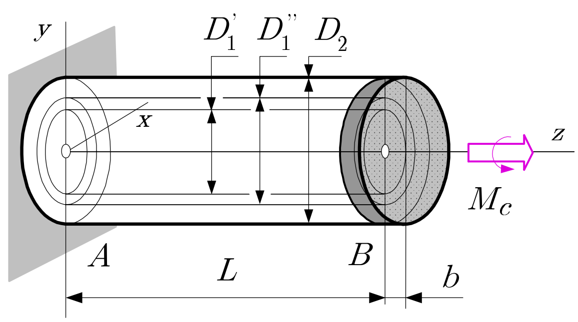
4.22. Mutassa meg, hogy az előző feladatban vizsgált tengely esetén

$$\Phi_{AB} = \frac{M_c\,L}{I_{p1}G_1 + I_{p2}G_2}\,, \qquad U = \frac{1}{2}\,\frac{M_c^2\,L}{I_{p1}G_1 + I_{p2}G_2}$$

a B keresztmetszet A keresztmetszethez viszonyított szögelfordulása és a tengelyben felhalmozódó rugalmas energia.

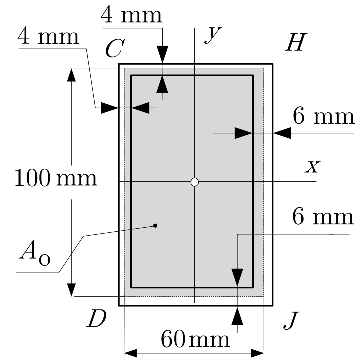
4.23. Általánosítsa a 4.21. és 4.22. Gyakorlatok eredményeit három, vagy több különböző rétegből felépülő tengely esetére.

4.24. A 4.40. ábrán vázolt alkatrész az aluminiumból készült $D_1 = D_1' = 52$ mm átmérőjű tömör tengelyből, valamint a $D_1'' = 60$ mm belső-, illetve $D_2'' = 80$ mm külső átmérőjű bronz csőből áll. Az alkatrész baloldala befogott, jobboldalát pedig egy b vastagságú merev tárcsa zárja le – a tárcsa vastagságának nem lesz szerepe a számításokban –, amely mereven csatlakozik a tengelyhez és a csőhöz (együtt fordul el ezekkel). Az alkatrésznek $L = 800$ mm a hossza, $G_{\text{al}} = G_1 = 26$ GPa, $G_{\text{bronz}} = G_2 = 40$ GPa. Mekkora M_c nyomaték terhelheti az alkatrészt, ha 60 MPa az aluminium és 84 MPa a bronz esetén megengedett nyírófeszültség? Mekkora az így meghatározott nyomaték munkája? (Vegyük észre, hogy értelemszerűen alkalmazhatók a 4.21. és 4.22. Gyakorlatok eredményei a megoldás során.)



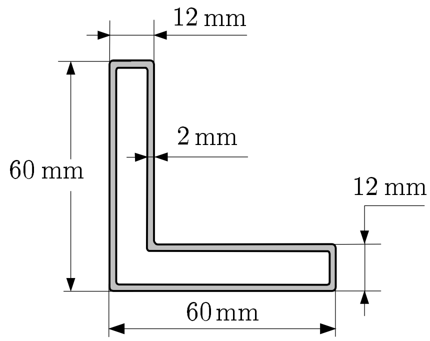
4.40. ábra.

4.25. Válaszolja meg a 4.8. mintafeladat valamennyi kérdését, ha a keresztmetszet CD és CH oldallapjainak 4 mm, a keresztmetszet DJ és HJ jelű oldallapjainak pedig 6 mm a vastagsága – ezt a keresztmetszetet a 4.41. ábra szemlélteti.

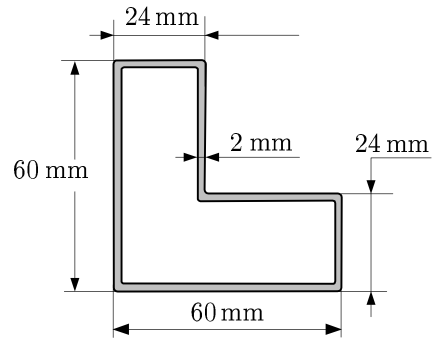


4.41. ábra.

4.26. A 4.42. ábra egy 1.4 m hosszú vékonyfalú aluminium rúd keresztmetszetét mutatja. Mekkora a rúdban ébredő nyírófeszültség, ha 20 Nm csavarónyomaték terheli a rudat. Számítsa ki továbbá (a) a rúd csavarómerevségét, (b) a rúd egyik végének a másikhoz viszonyított szögelfordulását, valamint (c) a rúdban tárolt alakváltozási energiát. ($G_{\mathrm{al}} = 26$ GPa.)

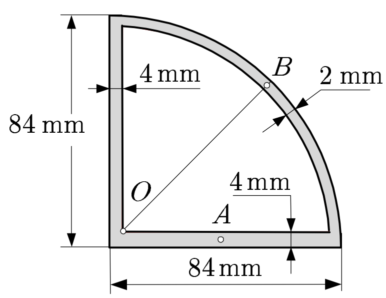


4.42. ábra.



4.43. ábra.

4.27. A 4.43. ábra egy 1.8 m hosszú vékonyfalú acélrúd keresztmetszetét mutatja. Mekkora csavarónyomaték terhelheti a rudat, ha nem haladhartja meg a rúdban ébredő nyírófeszültség a 4 MPa értéket. Számítsa ki (a) a rúd csavarómerevségét, valamint (b) a rúd egyik végének a másikhoz viszonyított szögelfordulását a legnagyobb megengedhető nyomaték esetén. ($G_{\mathrm{acél}} = 80$ GPa.)



4.44. ábra.

4.28. A 4.44. ábra egy 1.8 m hosszú vékonyfalú aluminium rúd keresztmetszetét mutatja. Mekkora a nyírófeszültség, az A és B pontokban, ha 80 Nm csavarónyomaték terheli a rudat. Számítsa ki továbbá (a) a rúd csavarómerevségét, (b) a rúd egyik végének a másikhoz viszonyított szögelfordulását, valamint (c) a rúdban tárolt alakváltozási energiát. ($G_{\mathrm{al}} = 26$ GPa, a köríveknek az O pont a középpontja.)