

Kozák Imre – Szeidl György

FEJEZETEK A SZILÁRDSÁGTANBÓL

KÉZIRAT
2003–2006

TARTALOMJEGYZÉK

1. Fejezet. A tenzorszámítás elemei	1
1.1. Bevezető megjegyzések	1
1.2. Függvények	1
1.3. A másodrendű tenzor fogalmának geometriai bevezetése	5
1.4. Speciális tenzorok	7
1.5. Tenzorok és mátrixok	10
1.6. Szimmetrikus tenzorok sajátértékfeladata	12
1.7. Tenzorok transzformációja	16
1.8. Mintafeladatok	18
Gyakorlatok	21
2. Fejezet. Szilárdságtani alapfogalmak	23
2.1. Mi a szilárdságtan	23
2.2. Elmozdulási és alakváltozási állapot	28
2.2.1. Az elmozdulásmező	28
2.2.2. Derivált tenzor	29
2.2.3. Forgató tenzor, alakváltozási tenzor	32
2.2.4. Jelölések és számítási képletek	34
2.2.5. Geometriai szemléltetés	36
2.2.6. Az alakváltozás geometriai tartalma I	38
2.2.7. Az alakváltozás geometriai tartalma II	40
2.2.8. Az alakváltozás geometriai tartalma III	42
2.2.9. Az alakváltozási tenzor főtengetőproblémája	43
2.3. Feszültségi állapot, belső erőrendszer	44
2.3.1. Feszültségvektor	44
2.3.2. A feszültségvektor felbontása, normálfeszültség, nyírófeszültség	45
2.3.3. Cauchy tétele, feszülstégtenzor	46
2.3.4. A feszültségi tenzor főtengetőproblémája	50
2.3.5. Feszültségi eredők	51
2.4. Energetikai állapot	53
2.4.1. A belső ER munkája	53
2.4.2. Alakváltozási energia	53
2.5. Az elemi környezet szilárdságtani állapota	53
2.6. Test szilárdságtani állapota	54
2.7. Mintafeladatok	54
Gyakorlatok	60
3. Fejezet. A szilárdságtan alapkísérletei I. Egyenes rúd húzása, zömök rúd nyomása	63
3.1. Az alapkísérletek célja	63
3.2. Prizmatikus rúd húzása, zömök rúd nyomása	64
3.2.1. A húzókísérlet leírása és eredményei. A szilárdságtani állapot homogenitása	64
3.2.2. Kapcsolat ϵ_z és σ_z között. Szakítódigram	67
3.2.3. Ideális testek szakítódigramjai	68
3.2.4. Prizmatikus rúd nyomása, nyomódigram	69
3.2.5. Hooke törvény egytengetőű feszültségi állapotra	70
3.2.6. Alakváltozási energia	71
3.2.7. Ellenőrzés, méretezés, biztonsági tényező	72

3.3.	Változó keresztmetszetű rúd	73
3.3.1.	Szakaszonként állandó keresztmetszet	73
3.3.2.	Polytonosan változó keresztmetszet	74
3.4.	Statikailag határozatlan feladatok	75
3.5.	A hőmérsékletváltozás hatása	76
3.6.	Mintafeladatok	77
	Gyakorlatok	83
4. Fejezet.	A szilárdságtan alapkísérletei II. Kör- és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása	87
4.1.	Vékonyfalú körgyűrű keresztmetszetű rúd csavarása	87
4.1.1.	A kísérlet leírása és eredményei	87
4.1.2.	Csavaródiagram. Hooke törvény nyírófeszültségekre	90
4.1.3.	A feszültségi állapot szemléltetése. Részleges Mohr féle kördiagram	91
4.1.4.	A szerkesztés lépéseinek összegezése	95
4.1.5.	A szerkesztés két alkalmazása. Összefüggés a rugalmassági állandók között	96
4.1.6.	A csavart vékonyfalú cső alakváltozási energiája	98
4.2.	Kör- és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása	99
4.2.1.	Elmozdulási és alakváltozási állapot	99
4.2.2.	Feszültségi és energetikai állapot	101
4.2.3.	Ellenőrzés, méretezés	104
4.3.	Változó keresztmetszetű rúd	105
4.3.1.	Szakaszonként állandó keresztmetszet	105
4.3.2.	Polytonosan változó keresztmetszet	106
4.4.	Statikailag határozatlan feladatok	106
4.5.	Vékonyfalú, zárt szelvényű prizmatikus rudak szabad csavarása	107
4.6.	Mintafeladatok	110
	Gyakorlatok	118
5. Fejezet.	A szilárdságtan alapkísérletei III. Tiszta hajlítás	125
5.1.	Egyenes prizmatikus rúd tiszta egyenes hajlítása	125
5.1.1.	Bevezető megjegyzések	125
5.1.2.	Tiszta egyenes hajlításra igénybevett rúd szilárdságtani állapota	125
5.1.3.	Ellenőrzés, méretezés	131
5.2.	Síkidomok (keresztmetszetek) másodrendű nyomatékai	133
5.2.1.	Bevezető megjegyzések	133
5.2.2.	Másodrendű nyomatékok értelmezése	133
5.2.3.	A koordinátarendszer eltolásának hatása. Steiner tétele	135
5.3.	Prizmatikus rúd tiszta ferde hajlítása. Tehetetlenségi tenzor.	137
5.3.1.	Általánosítás	137
5.3.2.	Az A keresztmetszet tehetetlenségi tenzorai	139
5.3.3.	Az I_S tenzor főtengetőproblémája	140
5.4.	Mintafeladatok	143
	Gyakorlatok	151
6. Fejezet.	A szilárdságtan általános egyenletei	153
6.1.	Bevezetés	153
6.2.	Egyenletek a feszültségekre	153
6.2.1.	Feszültségi tenzormező: az egyensúly lokális feltételei	153
6.2.2.	A Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram	155
6.2.3.	Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram: a τ_n iránya	163
6.2.4.	Teljes feszültségi kördiagram, ha ismert egy feszültségi főirány	164
6.3.	Alakváltozási állapot	165
6.3.1.	Kinematikai egyenletek	165

6.3.2.	A Mohr-féle alakváltozási kördiagram	165
6.4.	Általános Hooke törvény	166
6.4.1.	Egytengelyű feszültségi állapotok.	166
6.4.2.	Általános Hooke törvény: levezetés a szuperpozíció elv felhasználásával.	167
6.4.3.	Egyesített Mohr-féle feszültségi és alakváltozási kördiagram.	169
6.5.	Energetikai állapot	171
6.5.1.	Rugalmas test fajlagos alakváltozási energiája.	171
6.5.2.	Fajlagos torzítási-, és térfogatváltozási energia.	173
6.5.2.	Fajlagos alakváltozási energia rudak egyszerű igénybevételeire.	175
6.6.	A rugalmasságtan alapegyenlet-rendszere	175
6.7.	Mintafeladatok	176
	Gyakorlatok	183
7. Fejezet.	Az ellenőrzés és méretezés egyes kérdései	185
7.1.	Bevezetés	185
7.1.1.	Az ellenőrzés és méretezés fogalma.	185
7.1.2.	Az ellenőrzés és méretezés célja.	185
A. Függelék.	Kulcsok a gyakorlatokhoz	187
.	Irodalomjegyzék	189

A tenzorszámítás elemei

1.1. Bevezető megjegyzések

1.1.1. Köznapi tapasztalat, hogy a természet jelenségei függetlenek a megfigyelőtől. Várható tehát, hogy a jelenségeket leíró egyenletek, következésképp az egyenletekben szereplő mennyiségek maguk is, függetlenek a megfigyelő által választott koordináta-rendszertől (továbbiakban KR). Másként fogalmazva az egyenletek és a bennük szereplő mennyiségek változatlanok, idegen szóval *invariánsok*, maradnak a KR megváltoztatása során.

A KR megváltoztatásán tágabb értelemben a KR eltolását és elforgatását, szűkebb értelemben elforgatását értjük.

1.1.2. Azokat a mennyiségeket, amelyeket a klasszikus fizika törvényeit alkotó egyenletek tartalmaznak és amelyek, a fentiek szerint véve, invariáns mennyiségek, általában *tenzoroknak* nevezzük. Matematikai terminológiával élve

- a skalárokat nulladrendű,
- a vektorokat elsőrendű

tenzoroknak fogjuk nevezni és megkülönböztetünk

- másodrendű,
- harmadrendű, illetve
- magasabbrendű tenzorokat.

A másodrendű tenzorokkal kapcsolatos kérdések bevezető jellegű ismertetése a jelen fejezet fő feladata.

Amint az később ki fog derülni, mechanikai nézőpontból véve azt mondhatjuk mindig (másodrendű) tenzorra van szükség, ha valamilyen vektormennyiség (elsőrendű tenzor) nemcsak a helykoordináták függvénye, hanem egy adott pontban függ az ottani irányoktól is. Ez okból, hacsak nem nevezzük meg külön a rendűséget, a tenzor szón másodrendű tenzort fogunk érteni.

1.2. Függvények

1.2.1. Ami az alkalmazott jelöléseket illeti az alábbiakat emeljük ki:

A skalár mennyiségeket latin vagy görög kurzív (dőlt) betű jelöli. Ez kis- és nagybetű egyaránt lehet. Így például ρ jelöli a sűrűséget. A rugalmas testben terhelés során felhalmozódott rugalmas energiát (más néven alakváltozási energiát) pedig a nagy U -val jelöljük.

A vektorokat álló félkövér kis vagy nagybetű, a másodrendű tenzorokat pedig félkövér kurzív nagybetű jelöli. Ezzel összhangban az elmozdulásvektor jele például $\mathbf{u}$, az un. feszültségi tenzor jele pedig $\mathbf{T}$.

A harmad- és magasabbrendű tenzorokat félkövér sans serif típusú betűvel szedjük: pl. $\mathbf{C}$.

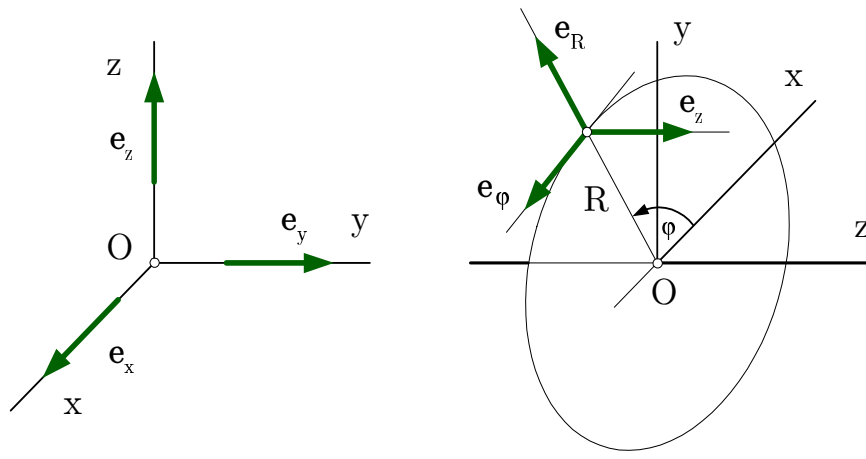
A skalárszorzásnak $\cdot$, a vektoriális szorzásnak $\times$, a később bevezetésre kerülő diádikus szorzásnak pedig $\circ$ a műveleti jele.

A mátrixokat illetően abban állapodunk meg, hogy a mátrix betűjele egyszer aláhúzott félkövér álló betű. Ha szükséges, erre többnyire a mátrix értelmezésekor van igény, akkor megadjuk a mátrix méretét is. A

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}_{(3 \times 3)}$$

mátrix például a feszültségi tenzor 3×3 méretű mátrixa valamilyen KR-ben.

A mátrixok között értelmezett szorzásra nem használunk külön műveleti jelet.



1.1. ábra.

Ami a KR-eket illeti, kartéziuszi KR-t fogunk alkalmazni – itt a koordinátákat rendre x, y és z , a vonatkozó egységvektorokat pedig $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ jelöli – vagy pedig hengerKR-t – itt R a sugár, φ a polárszög, és z a harmadik koordináta, a vonatkozó egységvektorokat pedig rendre $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_z$ jelöli – ezek a koordinátavonalak érintői. Fennállnak az $\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R$ valamint az $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_\varphi$ összefüggések, azaz a hengerKR, akár csak a kartéziuszi KR, ortogonális és jobbsodratú. Az említett két KR-t az 1.1. ábra szemlélteti.

Ha valamely mátrixot egy adott KR-hez kötöten tekintünk, akkor szükség lehet arra, hogy ez a jelölésből is kitűnjön. Így például

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}_{(R, \varphi, z)}$$

a feszültségi tenzor mátrixa a polárkoordináta-rendszer egy adott pontjában.

Megjegyezzük, hogy 3×3 mátrixok esetén a mátrixok elemeinek indexelésére vagy számokat, illetve gyakorta – különösen akkor, ha a mátrix oszlopai háromméretű vektoroknak tekinthetők az xyz illetve az $R\varphi z$ KR-ben – betűket alkalmazunk oly módon, hogy az 1, 2 és 3 számoknak rendre x, y és z vagy R, φ és z felel meg. Így például a $\underline{\mathbf{W}}$ mátrix elemeit vagy a megszokott módon a

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}, \quad (1.1a)$$

vagy pedig a

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{bmatrix}, \quad \text{illetve a} \quad \underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_{RR} & w_{R\varphi} & w_{Rz} \\ w_{\varphi R} & w_{\varphi\varphi} & w_{\varphi z} \\ w_{zR} & w_{z\varphi} & w_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.1b)$$

módon is írhatjuk.

1.2.2. Ami a függvények osztályozását illeti beszélhetünk skalár-skalár függvényekről, skalár-vektor függvényekről illetve vektor-vektor függvényekről.

Skalár-skalár függvényre példaként vehető az $y = f(x)$ egyváltozós függvény, ez görbe egyenlete; a $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény, ez felület egyenlete; illetve a $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$ háromváltozós függvény, ami mondjuk egy test hőmérsékletmezejét adja meg.

Az $y = mx$ függvényt *homogén lineáris függvénynek* nevezzük, hiszen nyilvánvalóan lineáris és mivel $x = 0$ -ra $y = 0$ azért homogén is.

Az $y = f(x)$ egyváltozós függvényt általában akkor nevezzük *homogén lineáris függvénynek*, ha fennáll az

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \quad (1.2)$$

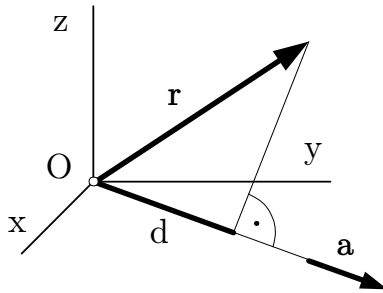
egyenlet. Az

$$y(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = m(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 (mx_1) + \lambda_2 (mx_2) = \lambda_1 y(x_1) + \lambda_2 y(x_2)$$

átalakításból azonnal következik, hogy az $y = mx$ függvény az utóbbi kritérium szerint is homogén lineáris. Az (1.2) egyenlettel adott definíciónak az az előnye, amint azt a későbbiekben látni fogjuk, hogy könnyen általánosítható.

A *skalár-vektor függvény* például az $f(\mathbf{r})$ módon jelölhető, ahol $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ a helyvektor. Skalár-vektor függvénynek tekinthetjük pl. a helyvektor adott irányú vetületének számítását. Az 1.2. ábra jelöléseivel

$$d = f(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad |\mathbf{a}| = 1, \quad (1.3)$$



1.2. ábra.

ahol $\mathbf{a}$ az irányvektor. A mátrix betűjele mellett jobbra fenn álló T a mátrix transzponáltját jelöli.

A fenti példa jól illusztrálja, hogy az xyz KR-ben bármely vektor, így az $\mathbf{a}$ vagy mondjuk a $\mathbf{v}$ vektor is megadható az x, y illetve a z irányú egységvektorok segítségével felírt összetevőivel:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z \quad (1.4)$$

illetve a vektor koordinátaival képzett oszlopmátrix segítségével:

ségével:

$$\underline{\mathbf{a}}^T = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{v}}^T = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Innen az $\mathbf{a}$ illetve $\mathbf{v}$ vektorok ismeretében

$$a_x = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_x \quad a_y = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_y \quad a_z = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_z \quad (1.6a)$$

$$v_x = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x \quad v_y = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y \quad v_z = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z \quad (1.6b)$$

az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ -re vonatkoztatott (irányú) koordináták. Kitűnik az (1.3) egyenletből, hogy a vektorok közötti skalárszorzás az xyz KR-ben

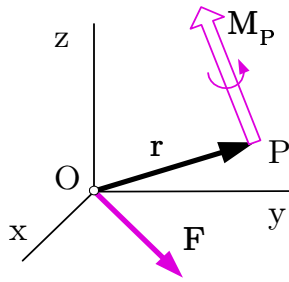
- vagy a tengelyirányú összetevők közötti műveletekkel
- vagy a vonatkozó mátrixok közötti műveletekkel, nevezetesen azok szorzásával

végezhető el. Ez a tulajdonsága a skalárszorzásnak más vektorok, illetve tenzorok közötti értelmezett műveletekre is érvényben marad, ami azt jelenti, hogy ezek a műveletek is elvégezhetők vagy a vektorok illetve tenzorok összetevőivel, vagypedig a hozzájuk rendelt mátrixok segítségével. A tenzor összetevőire lásd pl. az (1.28) képletet.

Vektor-vektor függvényről beszélünk ha az $\mathbf{f}$ függő változó – ezt a mennyiséget fizikai problémák esetén többnyire a mennyiség fizikai jelentésére utaló betű jelöli – vektormennyiség, ugyanúgy mint a független változó.

Példaként említhetjük az origóban működő $\mathbf{F}$ erő térpontokra vett nyomatékát:

$$\mathbf{M}_P(\mathbf{r}) = \mathbf{F} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ F_x & F_y & F_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (F_y z - F_z y) \mathbf{e}_x + (F_z x - F_x z) \mathbf{e}_y + (F_x y - F_y x) \mathbf{e}_z \quad (1.7)$$



1.3. ábra.

Legyen

$$\underline{\Psi} = \begin{bmatrix} 0 & \psi_{xy} & \psi_{xz} \\ \psi_{yx} & 0 & \psi_{yz} \\ \psi_{zx} & \psi_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

ferdeszimmetrikus mátrix, azaz $\psi_{xy} = -\psi_{yx}$, $\psi_{xz} = -\psi_{zx}$ és $\psi_{yz} = -\psi_{zy}$. Legyen továbbá

$$\Delta \underline{\mathbf{r}}^T = [\Delta x \quad \Delta y \quad \Delta z] \quad (1.10)$$

a helyvektor megváltozása. Nyilvánvaló az (1.7) és (1.8) képletek alapján, hogy a

$$\underline{\Psi} \Delta \underline{\mathbf{r}} \quad (1.11)$$

mátrixszorzatnak a

$$\varphi \times \Delta \underline{\mathbf{r}} \quad (1.12)$$

vektorszorzat felel meg, ahol

$$\varphi = \varphi_x \mathbf{e}_x + \varphi_y \mathbf{e}_y + \varphi_z \mathbf{e}_z \quad \text{és} \quad \varphi_x = \psi_{zy}, \quad \varphi_y = \psi_{xz}, \quad \text{illetve} \quad \varphi_z = \psi_{yx}. \quad (1.13)$$

A mondottak szerint bármely ferdeszimmetrikus mátrix és egy oszlopmátrix szorzatának vektoriális szorzás feleltethető meg, és persze megfordítva is, amint azt az (1.7) és (1.8) képletek kapcsán részletesen láttuk.

1.2.3. Fentebb rámutattunk arra, hogy az xyz KR-ben bármely vektor megadható az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorok segítségével. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bármely vektor, mondjuk a $\mathbf{v}$ vektor, megadható három nem komplanáris vektor felhasználásával. Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ un. *bázisvektorokra* nézve – a bázis szó, mint jelző arra utal, hogy e három vektor segítségével, bármely más vektor előállítható – kikötjük, hogy

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = a_o \neq 0, \quad (1.14)$$

azaz nem komplanárisok. Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorokhoz tartozó un. *reciprok bázisvektorokat* a

$$\mathbf{a}_1^* = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{a_o}, \quad \mathbf{a}_2^* = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{a_o} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_3^* = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{a_o} \quad (1.15)$$

képletek értelmezik. Egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j^* = \delta_{ij}, \quad \text{ahol} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.16)$$

A fentiek alapján a $\mathbf{v}$ vektor valóban megadható a

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2 + v_3 \mathbf{a}_3 \quad (1.17)$$

alakban, ahol

$$v_1 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1^*, \quad v_2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2^* \quad \text{és} \quad v_3 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3^* \quad (1.18)$$

Vegyük észre, hogy a fenti szorzat mátrixok segítségével is felírható:

$$\underline{\mathbf{M}}_P = \begin{bmatrix} 0 & -F_z & F_y \\ F_z & 0 & -F_x \\ -F_y & F_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_y z - F_z y \\ F_z x - F_x z \\ F_x y - F_y x \end{bmatrix}. \quad (1.8)$$

Az utóbbi mátrixszorzat első szorzótényezője egy *ferdeszimmetrikus* 3×3 *mátrix*, melyben az zy , xz és yx indexű elemek a vektorszorzat első szorzótényezőjének koordinátái, míg a yz , zx és xy indexű elemek ezek ellentettjei. A második szorzótényező a vektorszorzat második szorzótényezőjéből képzett oszlopmátrix.

a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ bázisvektorokra vonatkoztatott koordinátái. Ugyanilyen módon látható be, hogy a $\mathbf{v}$ vektor a

$$\mathbf{v} = v_1^* \mathbf{a}_1 + v_2^* \mathbf{a}_2 + v_3^* \mathbf{a}_3 \quad (1.19)$$

alakban is megadható, ahol

$$v_1^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_1, \quad v_2^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_2 \quad \text{és} \quad v_3^* = \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}_3 \quad (1.20)$$

a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{v}_1^*$, $\mathbf{v}_2^*$ és $\mathbf{v}_3^*$ reciprok bázisvektorokra vonatkoztatott koordinátái.

1.3. A másodrendű tenzor fogalmának geometriai bevezetése

1.3.1. A másodrendű tenzor fogalmának bevezetéseként megvizsgáljuk a *homogén lineáris vektor-vektor függvények* tulajdonságait. Visszaidézve az egyváltozós homogén lineáris függvényeket értelmező (1.2) egyenlet szerkezetét azt mondjuk, hogy homogén lineáris a

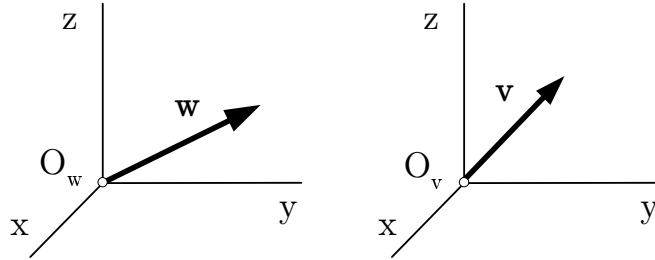
$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \quad (1.21)$$

vektor-vektor függvény, ha teljesül az

$$\mathbf{f}(v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z) = v_x \mathbf{f}(\mathbf{e}_x) + v_y \mathbf{f}(\mathbf{e}_y) + v_z \mathbf{f}(\mathbf{e}_z) \quad (1.22)$$

egyenlet. Geometriaileg a fenti egyenlet olyan függvénynek tekinthető, amely a tetszőleges O_v pontból felmért $\mathbf{v}$ vektorok háromméretű terét leképezi az ugyancsak tetszőleges O_w pontból felmért $\mathbf{w}$ vektorok háromméretű terére – 1.4. ábra. A $\mathbf{v}$ vektorokat tárgyvektoroknak, a $\mathbf{w}$ vektorokat képvektoroknak nevezzük. Röviden az mondható, hogy a $\mathbf{w}$ a $\mathbf{v}$ képe.

Azt mondjuk, hogy *nem elfajuló* a leképezés, ha a $\mathbf{v}$ vektorok teljes háromméretű terét a $\mathbf{w}$ vektorok teljes háromméretű terére képezzük le.



1.4. ábra.

Jelölje az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorok képét rendre

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{f}(\mathbf{e}_x), \quad \mathbf{w}_y = \mathbf{f}(\mathbf{e}_y) \quad \text{és} \quad \mathbf{w}_z = \mathbf{f}(\mathbf{e}_z), \quad (1.23)$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_x &= w_{xx} \mathbf{e}_x + w_{yx} \mathbf{e}_y + w_{zx} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{w}_y &= w_{xy} \mathbf{e}_x + w_{yy} \mathbf{e}_y + w_{zy} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{w}_z &= w_{xz} \mathbf{e}_x + w_{yz} \mathbf{e}_y + w_{zz} \mathbf{e}_z. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Nilvánvaló az (1.22) alapján, hogy

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = v_x \mathbf{w}_x + v_y \mathbf{w}_y + v_z \mathbf{w}_z = \underbrace{\mathbf{w}_x (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v})}_{v_x} + \underbrace{\mathbf{w}_y (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{v})}_{v_y} + \underbrace{\mathbf{w}_z (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v})}_{v_z}, \quad (1.25)$$

azaz a leképezést egyértelműen meghatározza az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorok $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képe, vagyis kilenc skalármennyiség.

1.3.2. További tartalom adható a (1.25) képlet jobboldalának ha értelmezzük két vektor *diádikus szorzatát*. Jelölje az **a** és **b** vektorok diádikus szorzatát, más néven *diádot*

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} .$$

A szorzat a rajta végzett műveletek kapcsán kap mélyebb értelmet. Ha a diádikus szorzatot jobbról, vagy balról szorozzuk skalárisan a **v** vektorral, akkor a lenti értelmezés szerinti vektorok az eredmény:

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}) , \quad (1.26a)$$

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} , \quad (1.26b)$$

ahonnan azonnal látszik, hogy általában

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \cdot \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \cdot (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) .$$

Ha a diádikus szorzatot jobbról, vagy balról szorozzuk vektoriálisan a **v** vektorral, akkor a lenti értelmezés szerint az eredmény továbbra is diád:

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \times \mathbf{v} = \mathbf{a} \circ (\mathbf{b} \times \mathbf{v}) , \quad (1.27a)$$

$$\mathbf{v} \times (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) = (\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \circ \mathbf{b} \quad (1.27b)$$

és az is látszik, hogy

$$(\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) \times \mathbf{v} \neq \mathbf{v} \times (\mathbf{a} \circ \mathbf{b}) .$$

Az (1.26a) képlet alapján a

$$\mathbf{w}_x \underbrace{(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v})}_{v_x} = (\mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{v} , \quad \mathbf{w}_y \underbrace{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{v})}_{v_y} = (\mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y) \cdot \mathbf{v} \quad \text{és} \quad \mathbf{w}_z \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v})}_{v_z} = (\mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{v}$$

összefüggések írhatók fel, amelyekkel (1.25)-ből a

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = (\mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{v}$$

eredmény következik. Az utóbbi képletben álló

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z} \quad (1.28)$$

diádösszeget másodrendű tenzornak nevezzük. A **W** tenzor segítségével a leképezést adó **f(v)** homogén lineáris függvény a

$$\boxed{\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}} \quad (1.29)$$

alakban írható fel. Ez az előállítás ugyanolyan jellegű mint az egyváltozós homogén lineáris függvények $y = mx$ alakja (y -nak **w**, m -nek **W**, x -nek **v** felel meg).

Mivel maga a leképezés KR független, a **W** tenzor, ugyanúgy mint valamely vektor, KR független mennyiség. Az (1.28) diádösszeg azonban már KR-hez kötött, az xyz KR-ben adja meg az invariáns **W** tenzort. Más szavakkal a diádok szorzótényezői, a tárgyvektorok (egységvektorok) és a hozzájuk tartozó képvektorok már egy adott KR-ben lettek véve.

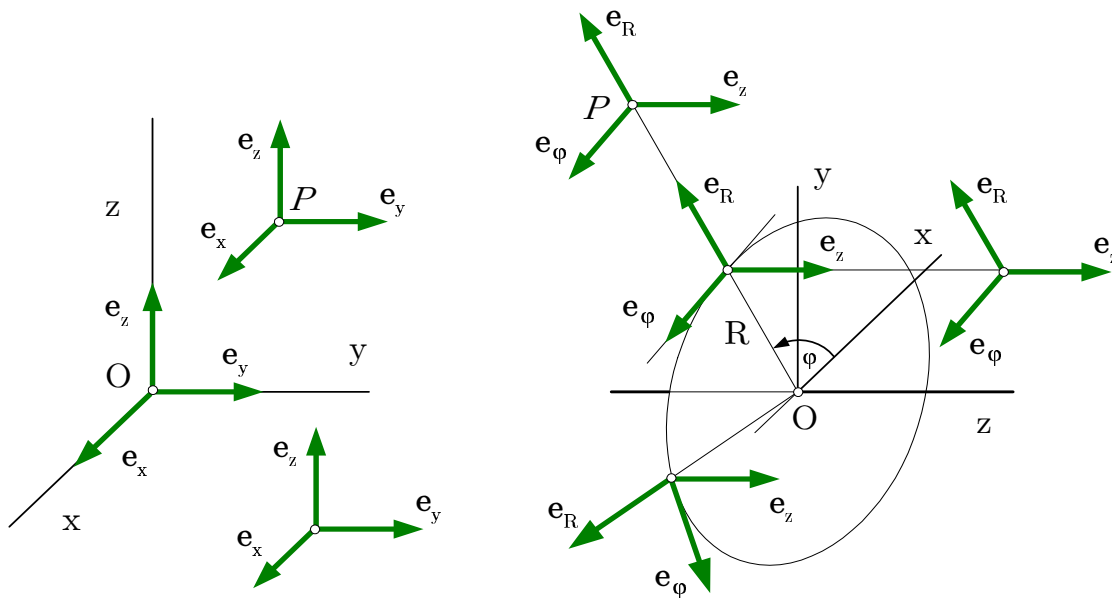
A **W** tenzor ismeretében a

$$\boxed{\mathbf{w}_x = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{w}_y = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{w}_z = \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_z} \quad (1.30)$$

szorzatok adják az **e_x**, **e_y** és **e_z** egységvektorokhoz tartozó és a tenzort az xyz KR-ben meghatározó **w_x**, **w_y** és **w_z** képvektorokat. A **w_x**, **w_y** és **w_z** képvektorok w_{xx} , w_{yx} , etc. w_{zz} koordinátái pedig a vektorok koordinátáinak számítására szolgáló (1.6a,b) és az (1.24) képletek alapján a

$$\boxed{w_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_n \quad m, n = x, y, z} \quad (1.31)$$

összefüggésekkel határozhatók meg.



1.5. ábra.

A test pontjaihoz kötött vektorokat és tenzorokat a test pontjaihoz kötött, un. *lokális KR-ekben* állítjuk elő, hiszen azok a tekintett pont valamilyen fizikai állapotát adják meg kvantitatíve. Az xyz KR-ben a minden pontban azonos lokális KR bázisvektorai (egységvektorai) megegyeznek a koordinátatengelyek egységvektoraival. Az $R\varphi z$ KR-ben azonban pontról pontra változnak a lokális KR-ek illetve a bázisvektorok. Ez annak a következménye, hogy ez a KR görbevonalú. Az 1.5. ábra mindkét esetet szemlélteti.

1.3.3. A leképezés során az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = a_0 \neq 0$ vektorhármas is vehető bázisnak. Ha ismerjük az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{a}_1), \quad \mathbf{w}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{a}_2) \quad \text{és} \quad \mathbf{w}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{a}_3) \quad (1.32)$$

képeit, akkor a leképzőfüggvény homogén lineáris voltát valamint az (1.18) képletet kihasználva kapjuk, hogy

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \mathbf{f}(v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2 + v_3 \mathbf{a}_3) = v_1 \mathbf{w}_1 + v_2 \mathbf{w}_2 + v_3 \mathbf{w}_3 = \underbrace{\mathbf{w}_1 (\mathbf{a}_1^* \cdot \mathbf{v})}_{v_1} + \underbrace{\mathbf{w}_2 (\mathbf{a}_2^* \cdot \mathbf{v})}_{v_2} + \underbrace{\mathbf{w}_3 (\mathbf{a}_3^* \cdot \mathbf{v})}_{v_3}.$$

A diádokkal kapcsolatos (1.26a) műveleti szabály alapján kiemelhetjük innen a $\mathbf{v}$ vektort

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = \underbrace{(\mathbf{w}_1 \circ \mathbf{a}_1^* + \mathbf{w}_2 \circ \mathbf{a}_2^* + \mathbf{w}_3 \circ \mathbf{a}_3^*)}_{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{v},$$

ahol a

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}_1 \circ \mathbf{a}_1^* + \mathbf{w}_2 \circ \mathbf{a}_2^* + \mathbf{w}_3 \circ \mathbf{a}_3^* \quad (1.33)$$

együttható ismét a $\mathbf{W}$ tenzort adja.

1.4. Speciális tenzorok

1.4.1. A $\mathbf{W}$ tenzor transzponáltját kapjuk, ha felcseréljük (1.28)-ban a diádikus szorzatok szorzótényezőinek sorrendjét:

$$\mathbf{W}^T = \mathbf{e}_x \circ \mathbf{w}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{w}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{w}_z. \quad (1.34)$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}^T &= \mathbf{v} \cdot (\mathbf{e}_x \circ \mathbf{w}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{w}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{w}_z) = \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_x)}_{v_x} \mathbf{w}_x + \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_y)}_{v_y} \mathbf{w}_y + \underbrace{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_z)}_{v_z} \mathbf{w}_z = \\ &= \mathbf{w}_x \underbrace{(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v})}_{v_x} + \mathbf{w}_y \underbrace{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{v})}_{v_y} + \mathbf{w}_z \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v})}_{v_z} = (\mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v},\end{aligned}$$

vagy tömören

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}^T = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.35)$$

ahonnan

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad (1.36)$$

bármilyen legyen is az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor.

A $\mathbf{W}$ tenzor *szimmetrikus*, ha

$$\boxed{\mathbf{W} = \mathbf{W}^T.} \quad (1.37)$$

Ha a $\mathbf{W}$ tenzor szimmetrikus, akkor (1.35) és (1.36) alapján

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad \text{illetve} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad (1.38)$$

bármilyen legyen is az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$.

A $\mathbf{W}$ tenzor *ferdeszimmetrikus*, ha

$$\boxed{\mathbf{W} = -\mathbf{W}^T.} \quad (1.39)$$

Ha a $\mathbf{W}$ tenzor ferdeszimmetrikus, akkor (1.35) és (1.36) alapján

$$-\mathbf{v} \cdot \mathbf{W} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad \text{illetve} \quad -\mathbf{v} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} \quad (1.40)$$

bármilyen legyen is az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$.

A $\mathbf{W}$ tenzor

$$\left. \begin{array}{l} \text{pozitív definit} \\ \text{pozitív szemidefinit} \\ \text{negatív szemidefinit} \\ \text{negatív definit} \end{array} \right\} \quad \text{ha bármely } \mathbf{u} - \text{ra} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} > 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} \geq 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} \leq 0 \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{u} < 0 \end{array} \right. .$$

Az $\mathbf{E}$ *egységtenzor* önmagára képezi le a $\mathbf{v}$ vektorok terét. A

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x \underbrace{(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v})}_{v_x} + \mathbf{e}_y \underbrace{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{v})}_{v_y} + \mathbf{e}_z \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v})}_{v_z} = \\ &= \underbrace{(\mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z)}_{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{v}\end{aligned}$$

átalakítás alapján azonnal kapjuk, hogy

$$\boxed{\mathbf{E} = \mathbf{E}^T = \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z} \quad (1.41)$$

ahonnan az is látszik, hogy szimmetrikus az $\mathbf{E}$ egységtenzor.

A

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2} (\mathbf{W} + \mathbf{W}^T) + \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T) \quad (1.42)$$

átalakítás alapján adódik a következtetés, hogy bármely $\mathbf{W}$ tenzor felbontható egy szimmetrikus $\mathbf{W}_{sz}$ és egy ferdeszimmetrikus $\mathbf{W}_{asz}$ tenzor összegére:

$$\mathbf{W} = \mathbf{W}_{sz} + \mathbf{W}_{asz} , \quad (1.43)$$

ahol

$$\mathbf{W}_{sz} = \frac{1}{2} (\mathbf{W} + \mathbf{W}^T) \quad \text{illetve} \quad \mathbf{W}_{asz} = \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T) . \quad (1.44)$$

Ez az eredmény az *additív felbontási tétel* néven ismeretes.

1.4.2. Vizsgáljuk meg milyen a $\mathbf{W}$ tenzor ferdeszimmetrikus részéhez tartozó leképezés.

A ferdeszimmetrikus részt adó (1.44)₂, továbbá az (1.34) képlet felhasználásával – kihasználva egyúttal a diádokon végzett skaláris szorzás műveleti szabályait és a kétszeres vektorszorzatokkal kapcsolatos kifejtési tételt – írható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{asz} \cdot \mathbf{v} &= \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T) \cdot \mathbf{v} = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{2} (\mathbf{e}_x \circ \mathbf{w}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{w}_y + \mathbf{e}_z \circ \mathbf{w}_z) \cdot \mathbf{v} = \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{w}_x (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{e}_x (\mathbf{w}_x \cdot \mathbf{v})]}_{-(\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x) \times \mathbf{v}} + \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{w}_y (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{e}_y (\mathbf{w}_y \cdot \mathbf{v})]}_{-(\mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y) \times \mathbf{v}} + \frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{w}_z (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{e}_z (\mathbf{w}_z \cdot \mathbf{v})]}_{-(\mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z) \times \mathbf{v}} = \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{[\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z]}_{\mathbf{w}_a} \times \mathbf{v} \end{aligned} \quad (1.45)$$

vagy, elhagyva a közbülső átalakítás lépéseit

$$\mathbf{W}_{asz} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w}_a \times \mathbf{v} \quad (1.46)$$

ahol, összhangban a fentiekkel

$$\mathbf{w}_a = -\frac{1}{2} [\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z] . \quad (1.47)$$

A $\mathbf{w}_a$ vektor a $\mathbf{W}$ tenzor un. *vektorinvariánsa*. Mivel az (1.45) baloldalán álló leképezés KR független, a jobboldal $\mathbf{w}_a$ vektora is KR független kell, hogy legyen. Maga az invariáns szó erre a körülményre utal.

Vegyük észre, hogy az (1.47) képlet könnyen megjegyezhető, hiszen csak annyit kell tenni a memorizáláskor, hogy a $\mathbf{W}$ tenzort megadó (1.28) képletben a diádikus szorzás $\circ$ műveleti jelét a vektoriális szorzás $\times$ műveleti jelére cseréljük, majd megszorozzuk az eredményt $-1/2$ -el.

Az (1.24) képvektorokat felhasználva

$$\mathbf{w}_x \times \mathbf{e}_x = w_{zx} \mathbf{e}_y - w_{yx} \mathbf{e}_z , \quad \mathbf{w}_y \times \mathbf{e}_y = w_{xy} \mathbf{e}_z - w_{zy} \mathbf{e}_x \quad \text{és} \quad \mathbf{w}_z \times \mathbf{e}_z = w_{yz} \mathbf{e}_x - w_{xz} \mathbf{e}_y ,$$

amelyekkel

$$\mathbf{w}_a = w_{ax} \mathbf{e}_x + w_{ay} \mathbf{e}_y + w_{az} \mathbf{e}_z , \quad (1.48a)$$

ahol

$$w_{ax} = -\frac{1}{2} (w_{yz} - w_{zy}) , \quad w_{ay} = -\frac{1}{2} (w_{zx} - w_{xz}) \quad \text{és} \quad w_{az} = -\frac{1}{2} (w_{xy} - w_{yx}) . \quad (1.48b)$$

Ha a $\mathbf{W}$ tenzor szimmetrikus, akkor az (1.46) és (1.45) első sora alapján – figyelembevéve a $\mathbf{W} = \mathbf{W}^T$ szimmetriafeltételt – írható, hogy

$$\mathbf{w}_a \times \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\mathbf{W} - \mathbf{W}^T) \cdot \mathbf{v} = 0 .$$

Mivel ez az egyenlet bármely $\mathbf{v}$ -re fennáll, következik, hogy $\mathbf{w}_a = \mathbf{0}$, azaz, hogy *szimmetrikus tenzorok* esetén az xyz KR $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektoraihoz rendelt $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok koordinátái eleget tesznek a

$$\boxed{w_{xy} = w_{yx}, \quad w_{yz} = w_{zy} \quad \text{és} \quad w_{zx} = w_{xz}. \quad (1.49)}$$

feltételeknek.

Ha a $\mathbf{W}$ tenzor ferdeszimmetrikus, akkor a w_{mn} -t adó (1.31) és az (1.40)₂ képletek szerint, az utóbbiban rendre $\mathbf{e}_m$ és $\mathbf{e}_n$ -t gondolunk $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ helyére, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_n &= -\mathbf{e}_n \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_m & m \neq n, \quad m, n = x, y, z \\ \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_m &= -\mathbf{e}_m \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_m & m = x, y, z \end{aligned}$$

azaz, hogy *ferdeszimmetrikus tenzorok* esetén az xyz KR $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektoraihoz rendelt $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok koordinátái eleget tesznek a

$$\boxed{\begin{aligned} w_{xy} &= -w_{yx}, \quad w_{yz} = -w_{zy} \quad \text{és} \quad w_{zx} = -w_{xz}, \\ \text{továbbá a} \quad w_{xx} &= w_{yy} = w_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (1.50)}$$

feltételeknek.

1.5. Tenzorok és mátrixok

1.5.1. A $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{w}$ képvektorához, valamint az egységvektorok $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektoraihoz rendelt $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{w}}_x, \underline{\mathbf{w}}_y$ és $\underline{\mathbf{w}}_z$ oszlopvektorok (oszlopmátrixok) segítségével mátrix jelölésekkel is felírható a leképezéssel kapcsolatos (1.25) képlet:

$$\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{f}}(\mathbf{v}) = \underline{\mathbf{w}}_x v_x + \underline{\mathbf{w}}_y v_y + \underline{\mathbf{w}}_z v_z.$$

Kirészletezve

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xx} \\ w_{yx} \\ w_{zx} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}_x} v_x + \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xy} \\ w_{yy} \\ w_{zy} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}_y} v_y + \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xz} \\ w_{yz} \\ w_{zz} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}_z} v_z = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{W}}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{v}}}.$$

Ebben az egyenletben

$$\underline{\mathbf{W}}_{(3 \times 3)} = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\mathbf{w}}_x & \underline{\mathbf{w}}_y & \underline{\mathbf{w}}_z \end{array} \right] = \begin{bmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.51)$$

a $\mathbf{W}$ tenzor mátrixa az xyz KR-ben és az is kiolvasható a fenti képletekből, hogy a $\mathbf{v}$ leképezésével kapcsolatos (1.29) egyenletnek a

$$\boxed{\underline{\mathbf{w}}_{(3 \times 1)} = \underline{\mathbf{W}}_{(3 \times 3)} \underline{\mathbf{v}}_{(3 \times 1)}} \quad (1.52)$$

összefüggés felel meg.

Figyeljük meg, hogy a $\mathbf{W}$ tenzor xyz KR-beni $\underline{\mathbf{W}}$ mátrixának oszlopait rendre az $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorokhoz tartozó $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok mátrixai, azaz a $\underline{\mathbf{w}}_x, \underline{\mathbf{w}}_y$ és $\underline{\mathbf{w}}_z$ oszlopvektorok alkotják.

Megjegyezzük, hogy a képvektorok mátrixokkal történő felírása során a vonatkozó mátrixok méreteit a továbbiakban csak akkor írjuk ki, ha ezt valamilyen okból hangsúlyozni kívánjuk.

1.5.2. A $\mathbf{W}$ tenzort adó diádösszeg – lásd a $\mathbf{W}$ -t adó (1.28) képlet jobboldalát– minden egyes tagja külön külön tenzor, az alábbi leképezésekkel:

a $\mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x$ tenzor az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorokhoz rendre a $\mathbf{w}_x$, zérus, zérus vektorokat,

a $\mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y$ tenzor az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorokhoz rendre a zérus, $\mathbf{w}_y$, zérus vektorokat,

a $\mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z$ tenzor az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorokhoz rendre a zérus, zérus, $\mathbf{w}_z$ vektorokat rendeli.

Visszaidézve, hogy a $\mathbf{W}$ tenzor (1.51) szerinti mátrixában az első oszlop az $\mathbf{e}_x$ -hez, a második oszlop az $\mathbf{e}_y$ -hoz, a harmadik oszlop az $\mathbf{e}_z$ -hez rendelt képvektor mátrixa azt kapjuk, hogy

– a $\mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x$ diádnak, mint tenzornak

$$\begin{bmatrix} w_{xx} & 0 & 0 \\ w_{yx} & 0 & 0 \\ w_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{xx} \\ w_{yx} \\ w_{zx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{w}_x}_{(3 \times 1)} \underbrace{\mathbf{e}_x^T}_{(1 \times 3)} ;$$

– a $\mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y$ diádnak, mint tenzornak

$$\begin{bmatrix} 0 & w_{xy} & 0 \\ 0 & w_{yy} & 0 \\ 0 & w_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{xy} \\ w_{yy} \\ w_{zy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{w}_y}_{(3 \times 1)} \underbrace{\mathbf{e}_y^T}_{(1 \times 3)} ;$$

– a $\mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z$ diádnak, mint tenzornak pedig

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & w_{xz} \\ 0 & 0 & w_{yz} \\ 0 & 0 & w_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{xz} \\ w_{yz} \\ w_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{w}_z}_{(3 \times 1)} \underbrace{\mathbf{e}_z^T}_{(1 \times 3)}$$

a mátrixa, ahol $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ az egységvektorok oszlopmátrixai.

A

$$\mathbf{T} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a} \circ (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) = \underbrace{\mathbf{a} b_x}_{\mathbf{t}_x} \circ \mathbf{e}_x + \underbrace{\mathbf{a} b_y}_{\mathbf{t}_y} \circ \mathbf{e}_y + \underbrace{\mathbf{a} b_z}_{\mathbf{t}_z} \circ \mathbf{e}_z$$

diád mint tenzor mátrixára hasonló gondolatmenettel a

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}} &= \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{t}_x & \mathbf{t}_y & \mathbf{t}_z \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a} b_x & \mathbf{a} b_y & \mathbf{a} b_z \end{array} \right] = \\ &= \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \underbrace{\mathbf{a}}_{(3 \times 1)} \underbrace{\mathbf{b}^T}_{(1 \times 3)} \end{aligned}$$

eredmény következik.

A fenti képletek szerint két vektor diádikus szorzatának mátrixa az első vektor oszlopmátrixának és a második vektor oszlopmátrixa transzponáltjának szorzata. Ezt a szorzatot is diádikus szorzatnak nevezzük.

1.5.3. A $\mathbf{W}$ tenzor transzponáltjának mátrixa a transzponált tenzort értelmező (1.34) képlet és az előzőek szerint adódik:

$$\underbrace{\mathbf{e}_x}_{(3 \times 1)} \underbrace{\mathbf{w}_x^T}_{(1 \times 3)} + \underbrace{\mathbf{e}_y}_{(3 \times 1)} \underbrace{\mathbf{w}_y^T}_{(1 \times 3)} + \underbrace{\mathbf{e}_z}_{(3 \times 1)} \underbrace{\mathbf{w}_z^T}_{(1 \times 3)} = \begin{bmatrix} w_{xx} & w_{yx} & w_{zx} \\ w_{xy} & w_{yy} & w_{zy} \\ w_{xz} & w_{yz} & w_{zz} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{W}}^T ,$$

azaz a tenzor transzponáltjának mátrixa megegyezik a tenzor mátrixának transzponáltjával.

Nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{E}$ egységtenzornak az $\underline{\mathbf{E}}$ egységmátrix a mátrixa:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underbrace{\mathbf{e}_x}_{(3 \times 1)} \underbrace{\mathbf{e}_x^T}_{(1 \times 3)} + \underbrace{\mathbf{e}_y}_{(3 \times 1)} \underbrace{\mathbf{e}_y^T}_{(1 \times 3)} + \underbrace{\mathbf{e}_z}_{(3 \times 1)} \underbrace{\mathbf{e}_z^T}_{(1 \times 3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \quad (1.53)$$

A szimmetrikus tenzorokkal kapcsolatos (1.49) összefüggés szerint a szimmetrikus tenzorok mátrixa is szimmetrikus:

$$\underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{W}}^T . \quad (1.54)$$

A ferdeszimmetrikus tenzorokkal kapcsolatos (1.50) összefüggés szerint a ferdeszimmetrikus tenzorok mátrixa is ferdeszimmetrikus:

$$\underline{\mathbf{W}} = -\underline{\mathbf{W}}^T . \quad (1.55)$$

Az (1.43) és (1.44) egyenletekkel adott felbontási tételnek a

$$\underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{W}}_{sz} + \underline{\mathbf{W}}_{asz} \quad (1.56)$$

egyenlet, ahol

$$\underline{\mathbf{W}}_{sz} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{W}} + \underline{\mathbf{W}}^T) \quad \text{és} \quad \underline{\mathbf{W}}_{asz} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{W}} - \underline{\mathbf{W}}^T) , \quad (1.57)$$

a mátrix alakja.

1.6. Szimmetrikus tenzorok sajátértékfeladata

1.6.1. Legyen a $\mathbf{W}$ tenzor szimmetrikus. Keressük azokat az n irányokat – ezeket *főirányoknak* nevezzük majd – amelyekre nézve fennáll, hogy az irányt kijelölő

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z; \quad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \quad (1.58)$$

egységvektor és a hozzátartozó $\mathbf{w}_n$ képvektor egymással párhuzamos – az 1.6. ábra ezt az esetet szemlélteti. Ha párhuzamos a $\mathbf{w}_n$ és $\mathbf{n}$ akkor fennáll a

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{W} \cdot \mathbf{n} = \lambda \mathbf{n} \quad (1.59)$$

összefüggés, ahol a λ , hasonlóan az n_x , n_y és n_z -hez, egyelőre ismeretlen paraméter. Mivel az $\mathbf{E}$ egységtenzor minden vektort önmagára képez le a fenti egyenlet átírható a

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{n} - \lambda \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} ,$$

vagy ami ugyanaz a

$$(\mathbf{W} - \lambda \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \quad (1.60)$$

alakba. A $\mathbf{W}$ és $\mathbf{E}$ tenzorok, valamint az $\mathbf{n}$ vektor mátrixait felhasználva innen a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{xx} - \lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} - \lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} - \lambda \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{E}}} \underbrace{\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{n}}} = \mathbf{0} \quad (1.61)$$

homogén lineáris egyenletrendszer következik.

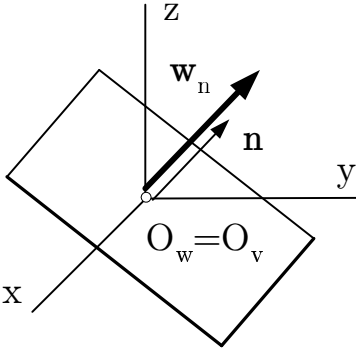
Legyen $P_3(\lambda) = -\det(\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{E}})$. Ez a függvény λ köbös polinomja, a karakterisztikus polinom. Triválistól különböző megoldás csak akkor létezik, ha a fenti egyenletrendszer determinánsa eltűnik, azaz ha

$$P_3(\lambda) = - \begin{vmatrix} w_{xx} - \lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} - \lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - W_I \lambda^2 + W_{II} \lambda - W_{III} = 0 . \quad (1.62)$$

A determinánsokkal kapcsolatos kifejtési tétel felhasználásával és némi kézi számolással – ezt nem részletezzük – belátható, hogy itt

$$W_I = w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} , \quad (1.63a)$$

$$W_{II} = \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & w_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xz} \\ w_{zx} & w_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zy} & w_{zz} \end{vmatrix} \quad (1.63b)$$



1.6. ábra.

és

$$W_{III} = \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{vmatrix}. \quad (1.63c)$$

A W_I , W_{II} és W_{III} együtthatókat a $\mathbf{W}$ tenzor első, második és harmadik skalárinvariánsainak nevezzük. Az elnevezést az indokolja, hogy a $\mathbf{W}$ szimmetrikus tenzorral kapcsolatos és az (1.60) egyenlettel definiált *sajátértékfeladat* megoldása a tenzorhoz tartozó leképezés egy geometriai sajátosságát tükrözi és mint ilyen KR független. Következésképp a megoldás első lépésében kiadódó (1.62) *karakterisztikus egyenlet* gyökei is KR függetlenek kell, hogy legyenek. Ez viszont csak akkor lehetséges, ha a karakterisztikus egyenlet (karakterisztikus polinom) W_I , W_{II} és W_{III} együtthatói függetlenek a KR választásától.

1.6.2. Legyen λ_1 és λ_2 az (1.62) *karakterisztikus egyenlet* két különböző gyöke, azaz a sajátértékfeladat két különböző *sajátértéke*. Jelölje $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ a vonatkozó egységvektorokat. Ekkor

$$(\mathbf{W} - \lambda_1 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \quad \text{és} \quad (\mathbf{W} - \lambda_2 \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n}_2 = 0. \quad (1.64)$$

Innen, első esetben az $\mathbf{n}_2$ -vel, második esetben pedig az $\mathbf{n}_1$ -el történő skaláris szorzással azonnal adódik, hogy

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_1 = \lambda_1 \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_1 \quad \text{és} \quad \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_2 = \lambda_2 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2. \quad (1.65)$$

A szimmetrikus tenzorokkal kapcsolatos (1.38)₂ képlet szerint

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_2.$$

Az utóbbi egyenlet figyelembevételével képezve az (1.65)-öt alkotó egyenletek különbségét a

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \quad \text{azaz az} \quad \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

eredmény következik vagyis a különböző sajátértékekhez tartozó főirányok merőlegesek egymásra.

Tegyük fel, hogy komplex szám a λ_1 sajátérték. Ekkor a vonatkozó főirányt adó

$$\mathbf{W} \cdot \mathbf{n}_1 = \lambda_1 \cdot \mathbf{n}_1 \quad (1.66)$$

egyenlet jobboldala komplex, a baloldal pedig a $\mathbf{W}$ valós volta miatt csak akkor lehet komplex, ha az $\mathbf{n}_1$ is komplex. Következésképp az $\mathbf{n}_1$ felírható az

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_{1\text{Re}} + i\mathbf{n}_{1\text{Im}}$$

alakban. Nyilvánvaló az is, hogy a $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \neq \lambda_1$ – a felülvonás a komplex konjugáltat jelöli – ugyancsak sajátérték, a vonatkozó főirány pedig az (1.66) egyenlet konjugálásával írható

$$\mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 = \bar{\lambda}_1 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1, \quad \text{azaz a} \quad \mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{n}}_1 = \lambda_2 \cdot \bar{\mathbf{n}}_1$$

képlet szerint

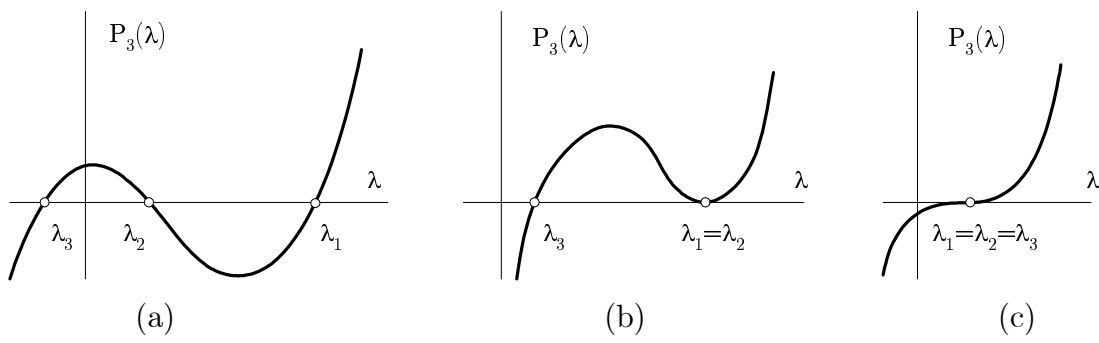
$$\mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{n}_{1\text{Re}} - i\mathbf{n}_{1\text{Im}}.$$

Mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$ fenn kell állnia az $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ egyenletnek. Ugyanakkor az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ -t adó fenti képletek felhasználásával

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = (\mathbf{n}_{1\text{Re}} + i\mathbf{n}_{1\text{Im}}) \cdot (\mathbf{n}_{1\text{Re}} - i\mathbf{n}_{1\text{Im}}) = \mathbf{n}_{1\text{Re}} \cdot \mathbf{n}_{1\text{Re}} + \mathbf{n}_{1\text{Im}} \cdot \mathbf{n}_{1\text{Im}} = |\mathbf{n}_1|^2 \neq 0,$$

azaz nem zérus az $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ skalárszorzat. Az a feltevés tehát, hogy a λ_1 komplex ellentmondásra vezet. Következésképp valósak a λ_k ($k = 1, 2, 3$) sajátértékek.

1.6.3. Az alábbiakban a főirányok számítását tekintjük át, ha ismertek a $P_3(\lambda)$ karakterisztikus polinom gyökei. A gyökök nagyságát tekintve három jellegzetes esetet különböztethetünk meg: a gyökök különböznek egymástól (minden gyök egyszeres multiplicitású), van két egybeeső gyök (egy gyök kétszeres, egy gyök egyszeres multiplicitású), mindhárom gyök egybeesik (egy háromszoros multiplicitású gyök van). Az 1.7. ábra ezekre az esetekre külön-külön szemlélteti a karakterisztikus polinomot. Az egyes eseteket az alábbiakban vesszük sorra.



1.7. ábra.

1. Legyenek különbözőek a $P_3(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$. Jelölje Δ_{mn} az n_x, n_y és n_z -t adó (1.61) lineáris egyenletrendszer

$$\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} w_{xx} - \lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} - \lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} - \lambda \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixa nm -ik ($m, n = x, y, z$) eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst. A determinánsok kifejtési tételével ellenőrizhető – magát az ellenőrzést az 1.6. Gyakorlatra hagyjuk –, hogy

$$P'_3(\lambda_k) = \left. \frac{dP_3(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda_k} = - \left. \frac{d}{d\lambda} \det(\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{E}}) \right|_{\lambda_k} = \Delta_{xx}(\lambda_k) + \Delta_{yy}(\lambda_k) + \Delta_{zz}(\lambda_k). \quad (1.67)$$

Mivel a három gyök különböző, ezért egyszeres, vagyis adott λ_k esetén legalább az egyike a $\Delta_{mm}(\lambda_k)$ determinánsoknak, mondjuk a $\Delta_{zz}(\lambda_k)$, különbözik zérustól. Ha ugyanis nem így lenne, eltűnne a $P'_3(\lambda_k)$ derivált, következésképp nem lenne egyszeres a λ_k gyök – példaként lásd az 1.7.(b) ábra $\lambda_1 = \lambda_2$ kettős gyökét, ahol vízszintes az érintő.

Ha mondjuk a $\Delta_{zz}(\lambda_k)$ különbözik zérustól, akkor az (1.61) lineáris egyenletrendszer első két egyenlete, n_x és n_y -t ismeretlennek, n_z -t pedig paraméternek véve, független egymástól a megoldás pedig

$$^k n_x = \frac{\Delta_{xz}(\lambda_k)}{\Delta_{zz}(\lambda_k)} ^k n_z, \quad ^k n_y = \frac{\Delta_{yz}(\lambda_k)}{\Delta_{zz}(\lambda_k)} ^k n_z \quad (1.68)$$

alakú. Az $^k n_z$ -t az utóbbi megoldás (1.58)₂ normálási feltételbe történő helyettesítésével kapjuk meg:

$$^k n_z = \frac{\Delta_{zz}(\lambda_k)}{D}; \quad D^2 = \Delta_{xx}^2(\lambda_k) + \Delta_{yy}^2(\lambda_k) + \Delta_{zz}^2(\lambda_k).$$

Az $^k n_z$ (1.68)-ba történő visszahelyettesítése szerint egységes formula érvényes mindegyik ismeretlenre:

$$^k n_m = \frac{\Delta_{mz}(\lambda_k)}{D}; \quad m = x, y, z. \quad (1.69)$$

Vegyük észre, hogy ez a megoldás a harmadik egyenletet is kielégíti, hiszen a behelyettesítés szerint

$$\frac{1}{D} [w_{zx} \Delta_{xz}(\lambda_k) + w_{zy} \Delta_{yz}(\lambda_k) + (w_{zz} - \lambda_k) \Delta_{zm}(\lambda_k)] = \frac{P_3(\lambda_k)}{D} = 0,$$

ahol a szögletes zárójelben álló kifejezés – $\det(\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{E}})|_{\lambda_k}$, ha az utolsó sor szerint végezzük el a determináns kifejtését.

A fentebb mondottaknak megfelelően eljárva minden egyes λ_k ($k = 1, 2, 3$) gyökhöz meghatározható olyan

$$\mathbf{n}_k = ^k n_x \mathbf{e}_x + ^k n_y \mathbf{e}_y + ^k n_z \mathbf{e}_z; \quad |\mathbf{n}_k| = 1$$

irányvektor, hogy

$$\mathbf{w}_k = \underline{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{n}_k = \lambda_k \mathbf{n}_k. \quad (1.70)$$

Az $\mathbf{n}_k$ vektorok előjelét szabadon lehet megválasztani. Következésképp mindig lehetséges olyan választás, hogy az $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokhoz tartozó irányok jobbsodratú kartéziszi KR-t alkotósanak. Ez a KR a *főtengelyek KR-e*, a vonatkozó koordinátasíkok pedig az ún. *fősíkok*.

Az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ egységvektorok által kifeszített kartéziszi KR-ben – azaz a főtengekelyek KR-ében – felhasználva a képvektorokat adó (1.70) képletet

$$\mathbf{W} = \mathbf{w}_1 \circ \mathbf{n}_1 + \mathbf{w}_2 \circ \mathbf{n}_2 + \mathbf{w}_3 \circ \mathbf{n}_3 = \lambda_1 \mathbf{n}_1 \circ \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 \circ \mathbf{n}_2 + \lambda_3 \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3 \quad (1.71)$$

a tenzor diádikus alakja. Visszaidezve, hogy adott KR-ben az egységvektorokhoz tartozó képvektorok alkotják a tenzor mátrixának oszlopait írhatjuk, hogy

$$\underset{(3 \times 3)}{\mathbf{W}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \lambda_1 \mathbf{n}_1 & \lambda_2 \mathbf{n}_2 & \lambda_3 \mathbf{n}_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{array} \right], \quad (1.72)$$

ahonnan jól látszik, hogy diagonális a tenzor mátrixa.

2. Legyen $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Az előzőekben áttekintett gondolatmenet és eredmények változatlanul érvényesek maradnak az $\mathbf{n}_3$ -ra nézve, azaz

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 0. \quad (1.73)$$

Ami a kettős gyököt illeti

$$P_3'(\lambda_k) = 0; \quad k = 1, 2$$

és, amint az az (1.67) jobboldalának felhasználásával és némi számolással ellenőrizhető, fennáll, hogy

$$\frac{1}{2} P_3''(\lambda_k) = (w_{xx} - \lambda_k) + (w_{yy} - \lambda_k) + (w_{zz} - \lambda_k); \quad k = 1, 2$$

ahol a jobboldalon álló összeg legalább egy összeadandója, mondjuk az első, nem zérus, ellenkező esetben ugyanis három lenne a λ_k gyök multiplicitása.

Az $\overset{1}{n}_x$, $\overset{1}{n}_y$ és $\overset{1}{n}_z$ ismeretlenek meghatározására két egyenlet, az (1.61) lineáris egyenletrendszer első egyenlete, valamint az (1.58)₂ normálási feltétel használható fel. Az így kapott megoldással identikusan teljesül az (1.61) lineáris egyenletrendszer második és harmadik egyenlete – ez annak a következménye, hogy $P_3'(\lambda_1) = 0$ és $P_3(\lambda_1) = 0$.¹

Az $\mathbf{n}_2$ vektort úgy érdemes megválasztani, hogy teljesüljön az $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ ortogonalitási feltétel. Kettős gyök esetén tehát csak az $\mathbf{n}_3$ főirány egyértelműen meghatározott, a másik kettő elvben szabadon felvehető az $\mathbf{n}_3$ -ra merőleges síkban, célszerű azonban betartani az említett ortogonalitási feltételt. A $\mathbf{W}$ tenzor diádikus előállítását annak figyelembevételével kapjuk, hogy most $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \lambda_1 (\mathbf{n}_1 \circ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \circ \mathbf{n}_2) + \lambda_3 \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3 = \\ &= \lambda_1 \underbrace{(\mathbf{n}_1 \circ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \circ \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3)}_{\mathbf{E}} + (\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3 \end{aligned}$$

azaz

$$\mathbf{W} = \lambda_1 \mathbf{E} + (\lambda_3 - \lambda_1) \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3 \quad (1.74)$$

Az utóbbi egyenlet szépen mutatja, hogy egyedül $\mathbf{n}_3$ igazi tenzorjellemző. Figyelemmel arra, hogy a főirányokat kijelölő $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ előjele megváltoztatható, mindig biztosíthatjuk, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokhoz tartozó irányok jobbsodratú kartéziszi KR-t alkossanak.

3. Háromszoros gyök esetén $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ és

$$\mathbf{W} = \lambda_1 \mathbf{E}, \quad (1.75)$$

következőleg bármely irány főirány. Az ilyen tenzort *izotróp vagy gömbi tenzornak* nevezzük. Az utóbbi elnevezést az indokolja, hogy a vonatkozó geometriai leképezés gömböt rendel gömbhöz. Az is nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokat mindig megválaszthatjuk oly módon, hogy a hozzájuk tartozó irányok jobbsodratú kartéziszi KR-t alkossanak.

¹Kétszeres gyök esetén 1 az $(\mathbf{W} - \lambda \mathbf{E})|_{\lambda_k}$ együtthatómátrix rangja, azaz $\Delta_{mn} = 0$; $m, n = x, y, z$. Következésképp valóban identikusan teljesülnek az $\overset{1}{n}_x$ -re vonatkozó

$$\overset{1}{n}_x = -\frac{1}{w_{xx} - \lambda_1} [w_{xy} \overset{1}{n}_y + w_{xz} \overset{1}{n}_z]$$

megoldás második és harmadik egyenletbe történő visszahelyettesítésével kapott

$$\Delta_{zz} \overset{1}{n}_y - \Delta_{yz} \overset{1}{n}_z = 0 \quad \text{és} \quad -\Delta_{zy} \overset{1}{n}_y + \Delta_{yy} \overset{1}{n}_z = 0$$

egyenletek.

1.6.4. A szimmetrikus tenzorok sajátértékfeladatával kapcsolatos eredményeket illetően összegezésszerűen az alábbiakat emeljük ki. A sajátértékfeladatnak legalább három megoldása van a főirányokra nézve. Ha csak három a megoldások száma, akkor ezek az irányok kölcsönösen merőlegesek egymásra. Ha azonban több mint három a megoldások száma, akkor végtelen sok megoldás van, de mindig kiválasztható ezek közül három egymásra kölcsönösen merőleges megoldás. A λ_k ($k = 1, 2, 3$) sajátértékeket nagyság szerint rendezettnek tekintjük, vagyis úgy választjuk meg az indexüket, hogy fennálljon a

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$$

reláció. A vonatkozó $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ irányvektorokat pedig úgy érdemes megválasztani, hogy azok jobbsodratú kartéziszi KR-t alkossanak. Ez a választás mindig lehetséges.

1.7. Tenzorok transzformációja

1.7.1. Legyen xyz és $\xi\eta\zeta$ két, ugyanazon ponthoz kötött de egymástól különböző kartéziszi KR – 1.8. ábra. A vonatkozó egységvektorokat (bázisvektorokat) a szokásos módon jelöljük:

$$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z \quad \text{illetve} \quad \mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta.$$

Mindkét KR egységvektorai megadhatók a másik KR-ben is, erre jelölésben, ha az szükséges az egyértelműség miatt, a

$$\begin{matrix} \mathbf{e}_x \\ (\xi, \eta, \zeta) \end{matrix}, \begin{matrix} \mathbf{e}_y \\ (\xi, \eta, \zeta) \end{matrix}, \begin{matrix} \mathbf{e}_z \\ (\xi, \eta, \zeta) \end{matrix} \quad \text{illetve a} \quad \begin{matrix} \mathbf{e}_\xi \\ (x, y, z) \end{matrix}, \begin{matrix} \mathbf{e}_\eta \\ (x, y, z) \end{matrix}, \begin{matrix} \mathbf{e}_\zeta \\ (x, y, z) \end{matrix}$$

módon, azaz a KR-t azonosító betűhármassnak a változót adó betű alatti kiegészítésével utalunk. Ez a megfogalmazás

általános érvényű, azaz más vektorok, illetve tenzorok esetén is hasonlóan írjuk ki, ha szükséges, hogy melyik KR-ben tekintjük az adott mennyiséget, vektort vagy tenzort.

A tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor mind az xyz mind pedig a $\xi\eta\zeta$ KR-ben megadható:

$$\begin{matrix} \mathbf{v} \\ (x, y, z) \end{matrix} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z, \quad \begin{matrix} \mathbf{v} \\ (\xi, \eta, \zeta) \end{matrix} = v_\xi \mathbf{e}_\xi + v_\eta \mathbf{e}_\eta + v_\zeta \mathbf{e}_\zeta. \quad (1.76)$$

Ha ismerjük a vektort az egyik KR-ben, és ismerjük ugyanebben a KR-ben a másik KR egységvektorait, akkor a vektor másik KR-ben vett koordinátáit a vonatkozó egységvektorral való skaláris szorzással kapjuk:

$$\boxed{\begin{matrix} v_m = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_m, \\ (x, y, z) \quad (\xi, \eta, \zeta) \quad (\xi, \eta, \zeta) \end{matrix} \quad \begin{matrix} v_\mu = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_\mu, \\ (\xi, \eta, \zeta) \quad (x, y, z) \quad (x, y, z) \end{matrix} \quad (1.77)}$$

$m=x, y, z$ $\mu=\xi, \eta, \zeta$

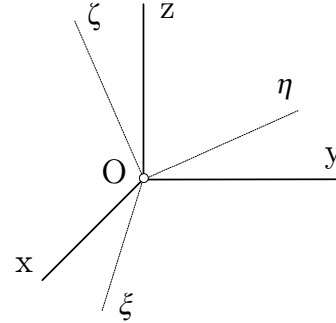
Kirészletezve a v_μ számításával kapcsolatos képleteket írhatjuk, hogy

$$v_\mu = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}.$$

$\mu=\xi, \eta, \zeta$

Ez a három egyenlet egy egyenletbe tömöríthető:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{v} \\ (\xi, \eta, \zeta)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}}_{\substack{\mathbf{v} \\ (x, y, z)}},$$



1.8. ábra.

vagy ami ugyanaz

$$\boxed{\begin{matrix} \underline{\mathbf{v}} \\ (\xi, \eta, \zeta) \end{matrix}} = \underline{\mathbf{K}} \begin{matrix} \underline{\mathbf{v}} \\ (x, y, z) \end{matrix}, \quad (1.78)$$

ahol

$$\boxed{\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\xi \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\zeta \cdot \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\xi, x) & \cos(\xi, y) & \cos(\xi, z) \\ \cos(\eta, x) & \cos(\eta, y) & \cos(\eta, z) \\ \cos(\zeta, x) & \cos(\zeta, y) & \cos(\zeta, z) \end{bmatrix}}. \quad (1.79a)$$

A későbbiek kedvéért kiírjuk a $\underline{\mathbf{K}}$ mátrix transzponáltját is:

$$\underline{\mathbf{K}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\zeta \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x, \xi) & \cos(x, \eta) & \cos(x, \zeta) \\ \cos(y, \xi) & \cos(y, \eta) & \cos(y, \zeta) \\ \cos(z, \xi) & \cos(z, \eta) & \cos(z, \zeta) \end{bmatrix} \quad (1.79b)$$

Vegyük észre, hogy a $\underline{\mathbf{K}}$ mátrix oszlopait az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorok $\xi\eta\zeta$ KR-ben vett koordinátái, sorait pedig az $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$ és $\mathbf{e}_\zeta$ egységvektorok xyz KR-ben vett koordinátái alkotják. Innen következik a $\underline{\mathbf{K}}$ mátrix alábbi két tulajdonsága:

1. Az egy-egy sorban illetve egy-egy oszlopban álló elemek négyzetösszege 1, hiszen ez az összeg egy-egy egységvektor abszolútértéke – a második oszlop esetén például $\mathbf{e}_y$ a vonatkozó egységvektor.
2. Zérus az összege a különböző indexű sorban illetve oszlopban azonos helyen álló elemek szorzatának, hiszen ez az összeg valójában két egymásra merőleges egységvektor skalárszorzata – a második és harmadik sor így képzett szorzata például $\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_\zeta$.

A két idézett tulajdonság kihasználásával nem nehéz belátni, hogy

$$\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{K}}^T = \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{E}}$$

azaz, hogy

$$\underline{\mathbf{K}}^T = \underline{\mathbf{K}}^{-1}. \quad (1.80)$$

Az olyan mátrixokat, melyekre nézve a mátrix transzponáltja és inverze megegyezik *ortogonális mátrixoknak* nevezzük. A fentiek szerint ortogonális az (1.78) transzformáció $\underline{\mathbf{K}}$ mátrixa. Következésképpen az

$$\boxed{\begin{matrix} \underline{\mathbf{v}} \\ (x, y, z) \end{matrix}} = \underline{\mathbf{K}}^T \begin{matrix} \underline{\mathbf{v}} \\ (\xi, \eta, \zeta) \end{matrix}} \quad (1.81)$$

egyenlet az említett transzformáció megfordítása.

1.7.2. A másodrendű $\mathbf{W}$ tenzorral kapcsolatosan azt a kérdést vizsgáljuk,

- (a) hogyan számítható a tenzor $\underline{\mathbf{W}}_{(x, y, z)}$ mátrixa a xyz KR-ben, ha ismerjük a tenzor $\underline{\mathbf{W}}_{(\xi, \eta, \zeta)}$ mátrixát az $\xi\eta\zeta$ KR-ben, illetve megfordítva,
- (b) hogyan számítható $\underline{\mathbf{W}}_{(\xi, \eta, \zeta)}$, ha ismert $\underline{\mathbf{W}}_{(x, y, z)}$.

Vegyük észre, hogy az (1.31) képlet a $\mathbf{W}$ tenzor mátrixának elemeit adja (R-ben. Ennek a képletnek a

$$w_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_\nu, \quad \mu, \nu = \xi, \eta, \zeta \quad (1.82)$$

egyenlet a párja a $\xi\eta\zeta$ KR-ben. Az említett két összefüggés felhasználásával azonnal megkapjuk a mátrixok elemeivel kapcsolatos transzformációs képleteket:

$$\boxed{\begin{matrix} w_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_n, \\ (x, y, z) \quad (\xi, \eta, \zeta) \quad (\xi, \eta, \zeta) \quad (\xi, \eta, \zeta) \\ m, n = x, y, z \end{matrix}, \quad \begin{matrix} w_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \mathbf{W} \cdot \mathbf{e}_\nu. \\ (\xi, \eta, \zeta) \quad (x, y, z) \quad (x, y, z) \quad (x, y, z) \\ \mu, \nu = \xi, \eta, \zeta \end{matrix}} \quad (1.83)$$

További és a teljes mátrixokkal kapcsolatos szabályhoz úgy juthatunk, ha felírjuk a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{w}$ képét megadó egyenletet mindkét KR-ben:

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{w}} &= \underline{\mathbf{W}} & \underline{\mathbf{v}} \\ (x,y,z) & (x,y,z) & (x,y,z) \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{w}} &= \underline{\mathbf{W}} & \underline{\mathbf{v}} \\ (\xi,\eta,\zeta) & (\xi,\eta,\zeta) & (\xi,\eta,\zeta) \end{array}. \quad (1.84)$$

Az (1.81) és (1.78) első és második egyenletbe történő helyettesítésével a

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{w}} &= \underline{\mathbf{W}} & \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{v}} \\ (x,y,z) & (x,y,z) & (\xi,\eta,\zeta) \end{array} \quad \text{és} \quad \begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{w}} &= \underline{\mathbf{W}} & \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{v}} \\ (\xi,\eta,\zeta) & (\xi,\eta,\zeta) & (x,y,z) \end{array}$$

képleteket kapjuk. Ha az első egyenletet $\underline{\mathbf{K}}$ -val a másodikat $\underline{\mathbf{K}}^T$ -vel szorozzuk, és figyelembe vesszük a vektorokkal kapcsolatos (1.78) és (1.81) transzformációs szabályokat, akkor a

$$\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{w}} &= \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{w}} &= \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{W}} \underbrace{\underline{\mathbf{K}}^T}_{\substack{\underline{\mathbf{W}} \\ (\xi,\eta,\zeta)}} \underline{\mathbf{v}} \\ (\xi,\eta,\zeta) & (x,y,z) & (\xi,\eta,\zeta) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{w}} &= \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{w}} &= \underline{\mathbf{K}}^T \underbrace{\underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{K}}}_{\substack{\underline{\mathbf{W}} \\ (x,y,z)}} \underline{\mathbf{v}} \\ (x,y,z) & (\xi,\eta,\zeta) & (x,y,z) \end{array} \quad (1.85)$$

eredményre jutunk, ahonnan azonnal kiolvashatók – az első egyenletet (1.84)₂-vel, a másodikat (1.84)₁-el kell egybevetni – a $\underline{\mathbf{W}}$ tenzor mátrixaival kapcsolatos

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{W}} &= \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{K}}^T & \text{és} \quad \underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{K}}^T \underline{\mathbf{W}} \underline{\mathbf{K}} \\ (\xi,\eta,\zeta) & (x,y,z) & (\xi,\eta,\zeta) \end{array}} \quad (1.86)$$

transzformációs szabályok.

1.8. Mintafeladatok

1.1. Vizsgálja meg elfajuló esetben a leképezést adó tenzor jellegét.

Nem elfajuló esetben a $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok nem fekehetnek egy síkban következőleg a tenzor három diádikus szorzat segítségével adható meg. Elfajuló esetben a három képvektor vagy egy síkban fekszik, vagy egy egyenesre esik, vagy mindegyik zérusvektor.

Ha a három képvektor egysíkú, akkor mondjuk a harmadik képvektor előállítható az első és második képvektor egy lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{w}_z = \lambda_x \mathbf{w}_x + \lambda_y \mathbf{w}_y,$$

ahol λ_x és λ_y alkalmasan választott skalár. Az utóbbi előállítás (1.28)-be történő helyettesítésével

$$\underline{\mathbf{W}} = \mathbf{w}_x \circ (\mathbf{e}_x + \lambda_x \mathbf{e}_z) + \mathbf{w}_y \circ (\mathbf{e}_y + \lambda_y \mathbf{e}_z)$$

a tenzor alakja, ami azt jelenti, hogy a tenzor két diád összegeként adható meg.

Ha a három képvektor egy egyenesre esik, akkor mondjuk a második és harmadik képvektor mindig felírható a

$$\mathbf{w}_y = \lambda_y \mathbf{w}_x, \quad \mathbf{w}_z = \lambda_z \mathbf{w}_x$$

alakban, amivel (1.28)-ből

$$\underline{\mathbf{W}} = \mathbf{w}_x \circ (\mathbf{e}_x + \lambda_y \mathbf{e}_x + \lambda_z \mathbf{e}_x)$$

a tenzor, azaz egy diád alkotja a tenzort.

1.2. Tegyük fel, hogy a merev test egy rögzített és az xyz KR O origójával egybeeső pontja körül forog. Tegyük fel továbbá, hogy kicsi a merev test elfordulása és jelölje $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x \mathbf{e}_x + \varphi_y \mathbf{e}_y + \varphi_z \mathbf{e}_z$ a forgásvektort. Ismeretes, hogy kicsiny $|\boldsymbol{\varphi}|$ -re $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ a merev test $\mathbf{r}$ helyvektorral azonosított pontjának elmozdulása. Homogén lineáris-e ez a vektor-vektor függvény?

Legyen $\mathbf{r} = \lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2$, ahol λ_1 és λ_2 tetszőleges skalár és $\mathbf{r}_1$ illetve $\mathbf{r}_2$ egymástól különböző vektorok. A vektoriális szorzás jól ismert tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= f(\mathbf{r}) = f(\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\varphi} \times (\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2) = \\ &= \underbrace{(\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_1)}_{\mathbf{u}_1} \lambda_1 + \underbrace{(\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}_2)}_{\mathbf{u}_2} \lambda_2 = f(\mathbf{r}_1) \lambda_1 + f(\mathbf{r}_2) \lambda_2 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2, \end{aligned}$$

azaz a függvény homogén lineáris.

Vegyük észre azt is, hogy a fenti vektor-vektor függvény elfajuló. Geometriaileg ez abból következik, hogy a vektoriális szorzás $\mathbf{u}$ eredménye (a képvektorok halmaza) benne van az O_w origón átmenő és a $\boldsymbol{\varphi}$ vektorra merőleges síkban.

Jelölje Ψ az $\mathbf{u} = \varphi \times \mathbf{r}$ homogén lineáris függvényhez tartozó másodrendű tenzort. Nyilvánvaló, hogy

$$\Psi = \psi_x \circ \mathbf{e}_x + \psi_y \circ \mathbf{e}_y + \psi_z \circ \mathbf{e}_z,$$

ahol

$$\psi_x = \varphi \times \mathbf{e}_x, \quad \psi_y = \varphi \times \mathbf{e}_y \quad \text{illetve} \quad \psi_z = \varphi \times \mathbf{e}_z.$$

Ha a ψ_x , ψ_y és ψ_z képvektorok komplanárisok, és a φ -re merőleges síkban fekszenek, akkor

$$\begin{aligned} \Psi \cdot \varphi &= \psi_x (\mathbf{e}_x \cdot \varphi) + \psi_y (\mathbf{e}_y \cdot \varphi) + \psi_z (\mathbf{e}_z \cdot \varphi) = \psi_x \varphi_x + \psi_y \varphi_y + \psi_z \varphi_z = \\ &= \varphi \times \mathbf{e}_x \varphi_x + \varphi \times \mathbf{e}_y \varphi_y + \varphi \times \mathbf{e}_z \varphi_z = \varphi \times \varphi = 0 \end{aligned}$$

azaz

$$\psi_x \varphi_x + \psi_y \varphi_y + \psi_z \varphi_z = 0,$$

ahonnan $\varphi_z \neq 0$ esetén a képvektorok komplanaritását kifejező

$$\psi_z = -\psi_x \frac{\varphi_x}{\varphi_z} - \psi_y \frac{\varphi_y}{\varphi_z}$$

képlet következik. Ezt az eredményt felhasználva a Ψ tenzor, az elfajuló tenzorokra jellemző módon, két diád segítségével írható fel:

$$\Psi = \psi_x \circ \left(\mathbf{e}_x - \frac{\varphi_x}{\varphi_z} \mathbf{e}_z \right) + \psi_y \circ \left(\mathbf{e}_y - \frac{\varphi_y}{\varphi_z} \mathbf{e}_z \right).$$

1.3. Határozzuk meg a helyvektorokat az y tengely körül $\varphi = \varphi_y$ szöggel elforgató

$$\mathbf{Q} = \mathbf{a} \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{b} \circ \mathbf{e}_y + \mathbf{c} \circ \mathbf{e}_z$$

tenzort.

Az 1.9. ábráról leolvasható, hogy

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_x \cos \varphi - \mathbf{e}_z \sin \varphi,$$

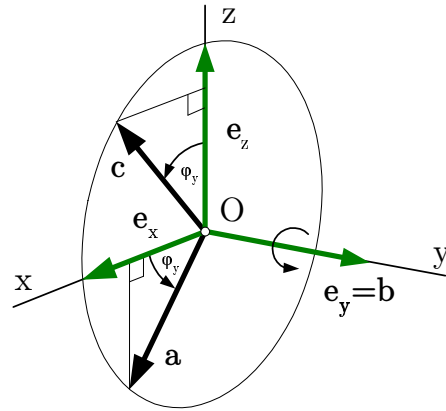
$$\mathbf{b} = \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{c} = \mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \varphi.$$

Ennek alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= (\mathbf{e}_x \cos \varphi - \mathbf{e}_z \sin \varphi) \circ \mathbf{e}_x + \\ &+ \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_x \sin \varphi + \mathbf{e}_z \cos \varphi) \circ \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

a tenzor diádikus alakja. A tenzor mátrixának felírásakor azt kell figyelembe venni, hogy annak oszlopait az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ képvektorok alkotják:

$$\underline{\mathbf{Q}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{array} \right].$$



1.9. ábra.

A tetszőleges $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ vektort a tenzor az

$$\underline{\mathbf{R}} = \underline{\mathbf{Q}} \mathbf{r} = \left[\begin{array}{ccc} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{array} \right] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \cos \varphi + z \sin \varphi \\ y \\ -x \sin \varphi + z \cos \varphi \end{bmatrix},$$

vagyis az

$$\mathbf{R} = (x \cos \varphi + z \sin \varphi) \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + (-x \sin \varphi + z \cos \varphi) \mathbf{e}_z$$

vektorba forgatja. A tenzor szimmetrikus és ferdeszimmetrikus része:

$$\underline{\mathbf{Q}}_{sz} = \left[\begin{array}{ccc} \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi \end{array} \right], \quad \underline{\mathbf{Q}}_{asz} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Kis szögekre $\cos \varphi \approx 1$ és $\sin \varphi \approx \varphi$. Ezeknek a képleteknek felhasználásával linearizálhatók kis szögekkel történő forgatásra a fenti tenzorok:

$$\underline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varphi & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Q}}_{sz} = \underline{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{Q}}_{asz} = \underline{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \varphi \\ 0 & 0 & 0 \\ -\varphi & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az utóbbi képletekkel kis szöggel történő forgatásra

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{Q}_{sz} + \mathbf{Q}_{asz}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} + (\varphi \mathbf{e}_y) \times \mathbf{r}$$

a képvektor, ahol azt is kihasználtuk, hogy a tenzor ferdeszimmetrikus részéhez tartozó leképezés az (1.45) képlet szerint a vektorinvariánssal – ez most $\varphi \mathbf{e}_y = \varphi_y \mathbf{e}_y$ – való szorzással képezhető. Az eredményt általánosítva azt mondhatjuk, hogy a

$$\varphi = \varphi_x \mathbf{e}_x + \varphi_y \mathbf{e}_y + \varphi_z \mathbf{e}_z; \quad |\varphi| \ll 1$$

vektor által leírt forgatás, amely az $\mathbf{r}$ rádiuszvektorokat az

$$\mathbf{e} = \frac{\varphi}{|\varphi|}; \quad |\varphi| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}$$

tengely körül a $\varphi = |\varphi|$ kis szöggel fordítja el a

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{r} = (\mathbf{Q}_{sz} + \mathbf{Q}_{asz}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} + \varphi \times \mathbf{r} \quad (1.87)$$

képlettel számítható, ahol

$$\underline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{\Psi}}. \quad (1.88)$$

Kiolvasható az (1.87) képletből, hogy a rádiuszvektor végpontjának

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{r} = \varphi \times \mathbf{r} \quad (1.89)$$

az elmozdulásvektora a forgatásból, hiszen az előtte álló tag maga a rádiuszvektor így a mozgást csak az utána álló, azaz a fenti tag adhatja meg. A képletben álló $\mathbf{\Psi}$ tenzor a forgató tenzor kis forgásra.

1.4. Határozza meg a

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 85 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 \\ 25 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

mátrixával adott $\mathbf{W}$ tenzor sajátértékeit és főirányait.

Vegyük észre, hogy az y irány főirány hiszen $w_{xy} = w_{yz} = 0$. A vonatkozó sajátértéket jelölje λ_a . Ez nyilvánvalóan a második oszlop diagonális eleme: $\lambda_a = -10$. A

$$\begin{aligned} P_3(\lambda) &= -\det(\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{E}}) = - \begin{vmatrix} w_{xx} - \lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} - \lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= \lambda^3 - W_I \lambda^2 + W_{II} \lambda - W_{III} = (\lambda - \lambda_a)(\lambda - \lambda_b)(\lambda - \lambda_c) = 0 \end{aligned}$$

karakterisztikus egyenletből – mivel nem ismerjük a karakterisztikus értékek sorrendjét azokat egyszerűen λ_a , λ_b és λ_c jelöli – helyettesítések után a

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 85 - \lambda & 0 & 25 \\ 0 & -10 - \lambda & 0 \\ 25 & 0 & -35 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 40\lambda^2 - 4100\lambda - 36\,000 = 0$$

eredmény következik, azaz

$$W_I = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = 40, \quad W_{II} = -4100, \quad W_{III} = \lambda_a \lambda_b \lambda_c = 36\,000,$$

ahol a főteengelyek KR-ét véve alapul és a későbbiek kedvéért kiírtuk képletszerűen is a W_I és W_{III} skalárinvariánsokat. Ha $\lambda \neq \lambda_a$ akkor átoszthatjuk a $P_3(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenletet a $\lambda - \lambda_a$ gyöktényezővel:

$$\frac{P_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_a} = (\lambda - \lambda_b)(\lambda - \lambda_c) = \lambda^2 - (\lambda_b + \lambda_c)\lambda + \lambda_b \lambda_c = 0,$$

ahol

$$\lambda_b + \lambda_c = W_I - \lambda_a = 50 \quad \text{és} \quad \lambda_b \lambda_c = \frac{W_{III}}{\lambda_a} = -36\,000.$$

Következésképp a

$$\lambda^2 - (W_I - \lambda_a)\lambda + \frac{W_{III}}{\lambda_a} = \lambda^2 - 50\lambda - 3600 = 0$$

egyenlet megoldása megadja a két hiányzó sajátértéket: $\lambda_b = 90$, $\lambda_c = -40$. Nagyság szerint rendezve

$$\lambda_1 = \lambda_b = 90, \quad \lambda_2 = \lambda_a = -10, \quad \lambda_3 = \lambda_c = -40$$

és mostmár az is nyilvánvaló, hogy $\mathbf{e}_y = \mathbf{n}_2$. Az $\mathbf{n}_1$ meghatározásához az

$$\begin{bmatrix} w_{xx} - \lambda_1 & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} - \lambda_1 & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85 - \lambda_1 & 0 & 25 \\ 0 & -10 - \lambda_1 & 0 \\ 25 & 0 & -35 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

azaz a

$$-5n_{x1} + 25n_{z1} = 0,$$

$$-100n_{y1} = 0,$$

$$25n_{x1} - 125n_{z1} = 0$$

egyenletrendszer kell megoldani. Mivel $\Delta_{zz} = -5 \times (-100) \neq 0$ választható az első két egyenlet ahonnan, amint az várható is – ortogonalitás –, $n_{y1} = 0$ és

$$n_{x1} = 5n_{z1}.$$

Ennek az egyenletnek egy megoldását a már normált

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}(5\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$$

vektor adja. Az $\mathbf{n}_3$ a sajátvektorok ortogonalitását és azt figyelembevéve számítható hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ jobbsodratú bázis:

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}(5\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z) \times \mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{26}}(-\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z).$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy ezekkel a megoldásokkal valóban teljesül az (1.59) egyenlet.

Gyakorlatok

1.1. Határozza meg azon tenzorok mátrixait, melyek az xy , xz és yz síkokra tükrözik az $\mathbf{r}$ rádiuszvektort.

1.2. Határozza meg azon tenzorok mátrixait, melyek az xy sík minden $\mathbf{r}$ helyvektorához annak

- (a) az origóra vonatkozó szimmetria pontját,
- (b) az x tengelyre vonatkozó szimmetria pontját, illetve
- (c) 30° -al az óramutató járásával egyező irányba való elforgatottját

rendeli.

1.3. Legyen $\mathbf{n}$; $|\mathbf{n}| = 1$ az origón átmenő S sík normálisa. Mutassa meg, hogy az $\mathbf{r}$ rádiuszvektor S síkba eső $\mathbf{r}_\perp$ összetevője az $\mathbf{r}_\perp = \mathbf{W} \cdot \mathbf{r}$ leképezéssel számítható, ahol

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 - n_x n_x & -n_x n_y & -n_x n_z \\ -n_y n_x & 1 - n_y n_y & -n_y n_z \\ -n_z n_x & -n_z n_y & 1 - n_z n_z \end{bmatrix}.$$

1.4. Legyen $\mathbf{n}$; $|\mathbf{n}| = 1$ az origón átmenő S sík normálisa. Mutassa meg, hogy az $\mathbf{r}$ rádiuszvektor S síkra vonatkozó $\mathbf{R}$ tükrökpe az $\mathbf{R} = \mathbf{W} \cdot \mathbf{r}$ leképezéssel számítható, ahol

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 - 2n_x n_x & -2n_x n_y & -2n_x n_z \\ -2n_y n_x & 1 - 2n_y n_y & -2n_y n_z \\ -2n_z n_x & -2n_z n_y & 1 - 2n_z n_z \end{bmatrix}.$$

1.5. Határozzuk meg a helyvektorok végpontjának elmozdulását leíró $\mathbf{Q}$ tenzort a z tengely körüli φ szöggel történő forgatáskor. Általánosítsa az eredményt az **1.3.** Mintafeladat φ vektora által leírt kis forgás esetére.

1.6. Mutassa meg a karakterisztikus polinom W_I , W_{II} és W_{III} együtthatóit adó (1.63a,b,c) képletek helyességét.

1.7. Mutassa meg, hogy

$$-\frac{d}{d\lambda} \det(\mathbf{W} - \lambda \mathbf{E}) \Big|_{\lambda_k} = \Delta_{xx}(\lambda_k) + \Delta_{yy}(\lambda_k) + \Delta_{zz}(\lambda_k).$$

1.8. Igazolja az előző eredmény felhasználásával, hogy

$$-\frac{d^2}{d\lambda^2} \det(\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{E}}) \Big|_{\lambda_k} = 2 [(w_{xx} - \lambda_k) + (w_{yy} - \lambda_k) + (w_{zz} - \lambda_k)] .$$

1.9. Határozza meg a mátrixával adott P pontbeli $\mathbf{T}_P$ feszültségi tenzor sajátértékeit és főirányait. Írja fel a tenzor mátrixát a fő tengelyek KR-ben.

$$\underline{\mathbf{T}}_P = \begin{bmatrix} 44 & 60 & 0 \\ 60 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

(Vegye figyelembe, hogy a z irány ismert főirány.)

1.10. Határozza meg a mátrixával adott $\mathbf{W}$ tenzor sajátértékeit és főirányait. Írja fel a tenzor mátrixát a fő tengelyek KR-ében.

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

(Vegye figyelembe, hogy $\lambda_1 = 4$ sajátérték.)

1.11. A $\xi\eta\zeta$ KR-t az xyz KR z tengely körül φ_z szöggel pozitív irányba történő elforgatásával kapjuk, azaz $z = \zeta$, és az elforgatás utáni x és y tengelyek alkotják a ξ és η tengelyeket. Írja fel az

$$\begin{matrix} \mathbf{e}_\xi & , & \mathbf{e}_\eta & , & \mathbf{e}_\zeta \\ (x,y,z) & (x,y,z) & (x,y,z) \end{matrix}$$

egységvektorokat és a két KR közötti transzformáció $\underline{\mathbf{K}}$ illetve $\underline{\mathbf{K}}^T$ mátrixait ha $\varphi_z = 30^\circ$. Legyen $\mathbf{v}$ egy az origón áthaladó anyagi pont sebessége, és legyen adott a $\mathbf{T}$ feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR origójában:

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_x - 3\sqrt{3}\mathbf{e}_y \text{ [m/s]}, \quad \underline{\mathbf{T}}_O = \begin{bmatrix} 300 & 400 & 0 \\ 400 & -300 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \text{ [MPa]} .$$

Határozza meg a sebességvektort és a feszültségi tenzor mátrixát a $\xi\eta\zeta$ KR-ben.