Kozák Imre – Szeidl György

FEJEZETEK A SZILÁRDSÁGTANBÓL

KÉZIRAT
2003–2006

Tartalomjegyzék

1. FEJEZET

A tenzorszámítás elemei

1.1. Bevezető megjegyzések

1.1.1. Köznapi tapasztalat, hogy a természet jelenségei függetlenek a megfigyelőtől. Várható tehát, hogy a jelenségeket leíró egyenletek, következőleg az egyenletekben szereplő mennyiségek maguk is, függetlenek a megfigyelő által választott koordináta-rendszertől (továbbiakban KR). Másként fogalmazva az egyenletek és a bennük szereplő mennyiségek változatlanok, idegen szóval *invariánsok*, maradnak a KR megváltoztatása során.

A KR megváltoztatásán tágabb értelemben a KR eltolását és elforgatását, szűkebb értelemben elforgatását értjük.

1.1.2. Azokat a mennyiségeket, amelyeket a klasszikus fizika törvényeit alkotó egyenletek tartalmaznak és amelyek, a fentiek szerint véve, invariáns mennyiségek, általában *tenzoroknak* nevezzük. Matematikai terminológiával élve

- a skalárokat nulladrendű,
- a vektorokat elsőrendű

tenzoroknak fogjuk nevezni és megkülönböztetünk

- másodrendű,
- harmadrendű, illetve
- magasabbrendű tenzorokat.

A másodrendű tenzorokkal kapcsolatos kérdések bevezető jellegű ismertetése a jelen fejezet fő feladata.

Amint az később ki fog derülni, mechanikai nézőpontból véve azt mondhatjuk mindig (másodrendű) tenzorra van szükség, ha valamilyen vektormennyiség (elsőrendű tenzor) nemcsak a helykoordináták függvénye, hanem egy adott pontban függ az ottani irányoktól is. Ez okból, hacsak nem nevezzük meg külön a rendűséget, a tenzor szón másodrendű tenzort fogunk érteni.

1.2. Függvények

1.2.1. Ami az alkalmazott jelöléseket illeti az alábbiakat emeljük ki:

A skalár mennyiségeket latin vagy görög kurzív (dőlt) betű jelöli. Ez kis- és nagybetű egyaránt lehet. Így például ρ jelöli a sűrűséget. A rugalmas testben terhelés során felhalmozódott rugalmas energiát (más néven alakváltozási energiát) pedig a nagy U-val jelöljük.

A vektorokat álló félkövér kis vagy nagybetű, a másodrendű tenzorokat pedig félkövér kurzív nagybetű jelöli. Ezzel összhangban az elmozdulásvektor jele például $\mathbf{u}$, az un. feszültségi tenzor jele pedig $\boldsymbol{T}$.

A harmad- és magasabbrendű tenzorokat félkövér sans serif típusú betűvel szedjük: pl. $\boldsymbol{\mathsf{C}}$.

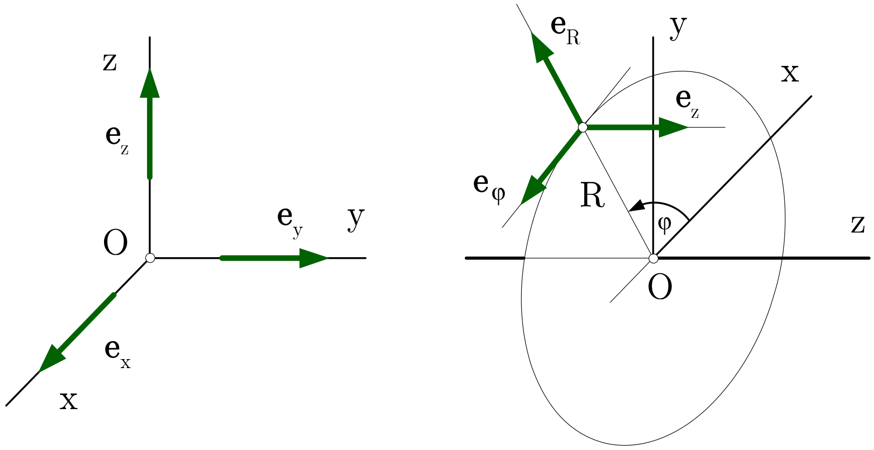
A skalárszorzásnak $\cdot$, a vektoriális szorzásnak $\times$, a később bevezetésre kerülő diádikus szorzásnak pedig $\circ$ a műveleti jele.

A mátrixokat illetően abban állapodunk meg, hogy a mátrix betűjele egyszer aláhúzott félkövér álló betű. Ha szükséges, erre többnyire a mátrix értelmezésekor van igény, akkor megadjuk a mátrix méretét is. A

$$\underline{\mathbf{T}} = \underset{(3\times3)}{\underline{\mathbf{T}}}$$

mátrix például a feszültségi tenzor 3×3 méretű mátrixa valamilyen KR-ben.

A mátrixok között értelmezett szorzásra nem használunk külön műveleti jelet.



1.1. ábra.

Ami a KR-eket illeti, kartéziuszi KR-t fogunk alkalmazni – itt a koordinátákat rendre x, y és z, a vonatkozó egységvektorokat pedig $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ jelöli – vagy pedig hengerKR-t – itt R a sugár, φ a polárszög, és z a harmadik koordináta, a vonatkozó egységvektorokat pedig rendre $\mathbf{e}_R, \mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_z$ jelöli – ezek a koordinátavonalak érintői. Fennállnak az $\mathbf{e}_R = \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R$ valamint az $\mathbf{e}_z = \mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_\varphi$ összefüggések, azaz a hengerKR, akárcsak a kartéziuszi KR, ortogonális és jobbsodratú. Az említett két KR-t az 1.1. ábra szemlélteti.

Ha valamely mátrixot egy adott KR-hez kötötten tekintünk, akkor szükség lehet arra, hogy ez a jelölésből is kitűnjön. Így például

$$\underline{\mathbf{T}} = \underset{(R,\varphi,z)}{\underline{\mathbf{T}}}$$

a feszültségi tenzor mátrixa a polárkoordináta-rendszer egy adott pontjában.

Megjegyezzük, hogy 3×3 mátrixok esetén a mátrixok elemeinek indexelésére vagy számokat, illetve gyakorta – különösen akkor, ha a mátrix oszlopai háromméretű vektoroknak tekinthetők az xyz illetve az $R\varphi z$ KR-ben – betűket alkalmazunk oly módon, hogy az 1, 2 és 3 számoknak rendre x, y és z vagy R, φ és z felel meg. Így például a $\underline{\mathbf{W}}$ mátrix elemeit vagy a megszokott módon a

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix}, \tag{1.1a}$$

vagypedig a

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{bmatrix}, \quad \text{illetve a} \quad \underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} w_{RR} & w_{R\varphi} & w_{Rz} \\ w_{\varphi R} & w_{\varphi\varphi} & w_{\varphi z} \\ w_{zR} & w_{z\varphi} & w_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.1b}$$

módon is írhatjuk.

1.2.2. Ami a függvények osztályozását illeti beszélhetünk skalár-skalár függvényekről, skalár-vektor függvényekről illetve vektor-vektor függvényekről.

Skalár-skalár függvényre példaként vehető az $y = f(x)$ egyváltozós függvény, ez görbe egyenlete; a $z = f(x, y)$ kétváltozós függvény, ez felület egyenlete; illetve a $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$ háromváltozós függvény, ami mondjuk egy test hőmérsékletmezejét adja meg.

Az $y = mx$ függvényt *homogén lineáris függvénynek* nevezzük, hiszen nyilvánvalóan lineáris és mivel $x = 0$-ra $y = 0$ azért homogén is.

Az $y = f(x)$ egyváltozós függvényt *általában* akkor nevezzük *homogén lineáris függvénynek*, ha fennáll az

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \tag{1.2}$$

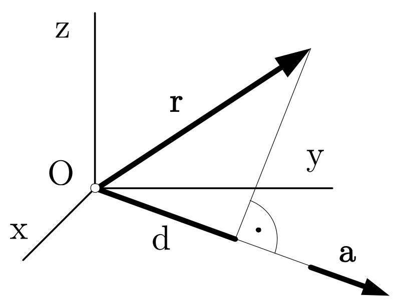
egyenlet. Az

$$y(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = m(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 (m x_1) + \lambda_2 (m x_2) = \lambda_1 y(x_1) + \lambda_2 y(x_2)$$

átalakításból azonnal következik, hogy az $y{=}mx$ függvény az utóbbi kritérium szerint is homogén lineáris. Az (1.2) egyenlettel adott definíciónak az az előnye, amint azt a későbbiekben látni fogjuk, hogy könnyen általánosítható.

A *skalár-vektor függvény* például az $f(\mathbf{r})$ módon jelölhető, ahol $\mathbf{r}{=}x\mathbf{e}_x{+}y\mathbf{e}_y{+}z\mathbf{e}_z$ a helyvektor. Skalár-vektor függvénynek tekinthetjük pl. a helyvektor adott irányú vetületének számítását. Az 1.2. ábra jelöléseivel

$$d = f(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = \underline{\mathbf{a}}^T \underline{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \qquad |\mathbf{a}| = 1\,, \tag{1.3}$$



1.2. ábra.

ahol $\mathbf{a}$ az irányvektor. A mátrix betűjele mellett jobbra fenn álló T a mátrix transzponáltját jelöli.

A fenti példa jól illusztrálja, hogy az xyz KR-ben bármely vektor, így az $\mathbf{a}$ vagy mondjuk a $\mathbf{v}$ vektor is megadható az x, y illetve a z irányú egységvektorok segítségével felírt összetevőivel:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{e}_x + a_y\mathbf{e}_y + a_z\mathbf{e}_z, \qquad \mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z \tag{1.4}$$

illetve a vektor koordinátáival képzett oszlopmátrix segítségével:

$$\underline{\mathbf{a}}^T = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{v}}^T = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}. \tag{1.5}$$

Innen az $\mathbf{a}$ illetve $\mathbf{v}$ vektorok ismeretében

$$a_x = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_x \qquad a_y = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_y \qquad a_z = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_z \tag{1.6a}$$

$$v_x = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_x \qquad v_y = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_y \qquad v_z = \mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_z \tag{1.6b}$$

az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$-re vonatkoztatott (irányú) koordináták. Kitűnik az (1.3) egyenletből, hogy a vektorok közötti skalárszorzás az xyz KR-ben

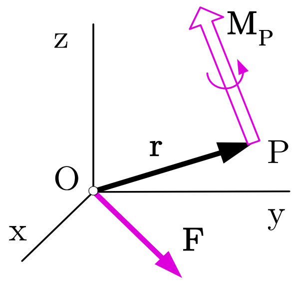
- vagy a tengelyirányú összetevők közötti műveletekkel
- vagy a vonatkozó mátrixok közötti műveletekkel, nevezetesen azok szorzásával

végezhető el. Ez a tulajdonsága a skalárszorzásnak más vektorok, illetve tenzorok közötti értelmezett műveletekre is érvényben marad, ami azt jelenti, hogy ezek a műveletek is elvégezhetők vagy a vektorok illetve tenzorok összetevőivel, vagypedig a hozzájuk rendelt mátrixok segítségével. A tenzor összetevőire lásd pl. az (1.28) képletet.

Vektor-vektor függvényről beszélünk ha az $\mathbf{f}$ függő változó – ezt a mennyiséget fizikai problémák esetén többnyire a mennyiség fizikai jelentésére utaló betű jelöli – vektormennyiség, ugyanúgy mint a független változó.

Példaként említhetjük az origóban működő $\mathbf{F}$ erő térpontokra vett nyomatékát:

$$\mathbf{M}_P(\mathbf{r}) = \mathbf{F}\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ F_x & F_y & F_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (F_y z - F_z y)\mathbf{e}_x + (F_z x - F_x z)\mathbf{e}_y + (F_x y - F_y x)\mathbf{e}_z \tag{1.7}$$



1.3. ábra.

Vegyük észre, hogy a fenti szorzat mátrixok segítségével is felírható:

$$\underline{\mathbf{M}}_P = \begin{bmatrix} 0 & -F_z & F_y \\ F_z & 0 & -F_x \\ -F_y & F_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_y z - F_z y \\ F_z x - F_x z \\ F_x y - F_y x \end{bmatrix} . \tag{1.8}$$

Az utóbbi mátrixszorzat első szorzótényezője egy *ferdeszimmetrikus* 3×3 *mátrix*, melyben az zy, xz és yx indexű elemek a vektorszorzat első szorzótényezőjének koordinátái, míg a yz, zx és xy indexű elemek ezek ellentettjei. A második szorzótényező a vektorszorzat második szorzótényezőjéből képzett oszlopmátrix.

Legyen

$$\underline{\boldsymbol{\Psi}} = \begin{bmatrix} 0 & \psi_{xy} & \psi_{xz} \\ \psi_{yx} & 0 & \psi_{yz} \\ \psi_{zx} & \psi_{zy} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

ferdeszimmetrikus mátrix, azaz $\psi_{xy} = -\psi_{yx}$, $\psi_{xz} = -\psi_{zx}$ és $\psi_{yz} = -\psi_{zy}$. Legyen továbbá

$$\Delta \underline{\mathbf{r}}^T = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix} \tag{1.10}$$

a helyvektor megváltozása. Nyilvánvaló az (1.7) és (1.8) képletek alapján, hogy a

$$\underline{\boldsymbol{\Psi}}\, \Delta \underline{\mathbf{r}} \tag{1.11}$$

mátrixszorzatnak a

$$\boldsymbol{\varphi} \times \Delta \mathbf{r} \tag{1.12}$$

vektorszorzat felel meg, ahol

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x \mathbf{e}_x + \varphi_y \mathbf{e}_y + \varphi_z \mathbf{e}_z \quad \text{és} \quad \varphi_x = \psi_{zy}, \quad \varphi_y = \psi_{xz}, \quad \text{illetve} \quad \varphi_z = \psi_{yx} . \tag{1.13}$$

A mondottak szerint bármely ferdeszimmetrikus mátrix és egy oszlopmátrix szorzatának vektoriális szorzás feleltethető meg, és persze megfordítva is, amint azt az (1.7) és (1.8) képletek kapcsán részletesen láttuk.

1.2.3. Fentebb rámutattunk arra, hogy az xyz KR-ben bármely vektor megadható az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorok segítségével. A továbbiakban megmutatjuk, hogy bármely vektor, mondjuk a $\mathbf{v}$ vektor, megadható három nem komplanáris vektor felhasználásával. Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ un. *bázisvektorokra* nézve – a bázis szó, mint jelző arra utal, hogy e három vektor segítségével, bármely más vektor előállítható – kikötjük, hogy

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot \mathbf{a}_3 = [\mathbf{a}_1\, \mathbf{a}_2\, \mathbf{a}_3] = a_o \neq 0 \,, \tag{1.14}$$

azaz nem komplanárisok. Az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorokhoz tartozó un. *reciprok bázisvektorokat* a

$$\overset{*}{\mathbf{a}}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{a_o} \,, \qquad \overset{*}{\mathbf{a}}_2 = \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{a_o} \qquad \text{és} \qquad \overset{*}{\mathbf{a}}_3 = \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{a_o} \tag{1.15}$$

képletek értelmezik. Egyszerű számítással ellenőrizhető, hogy

$$\mathbf{a}_i \cdot \overset{*}{\mathbf{a}}_j = \delta_{ij} \,, \qquad \text{ahol} \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ha } i = j \\ 0 & \text{ha } i \neq j \end{cases} \qquad i, j = 1,2,3 \quad . \tag{1.16}$$

A fentiek alapján a $\mathbf{v}$ vektor valóban megadható a

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{a}_1 + v_2 \mathbf{a}_2 + v_3 \mathbf{a}_3 \tag{1.17}$$

alakban, ahol

$$v_1 = \mathbf{v} \cdot \overset{*}{\mathbf{a}}_1, \qquad v_2 = \mathbf{v} \cdot \overset{*}{\mathbf{a}}_2 \qquad \text{és} \qquad v_3 = \mathbf{v} \cdot \overset{*}{\mathbf{a}}_3 \tag{1.18}$$

a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ bázisvektorokra vonatkoztatott koordinátái. Ugyanilyen módon látható be, hogy a $\mathbf{v}$ vektor a

$$\mathbf{v} = \overset{*}{v}_1 \overset{*}{\mathbf{a}}_1 + \overset{*}{v}_2 \overset{*}{\mathbf{a}}_2 + \overset{*}{v}_3 \overset{*}{\mathbf{a}}_3 \tag{1.19}$$

alakban is megadható, ahol

$$\overset{*}{v}_1 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_1, \qquad \overset{*}{v}_2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_2 \qquad \text{és} \qquad \overset{*}{v}_3 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{a}_3 \tag{1.20}$$

a $\mathbf{v}$ vektor $\overset{*}{\mathbf{v}}_1$, $\overset{*}{\mathbf{v}}_2$ és $\overset{*}{\mathbf{v}}_3$ reciprok bázisvektorokra vonatkoztatott koordinátái.

1.3. A másodrendű tenzor fogalmának geometriai bevezetése

1.3.1. A másodrendű tenzor fogalmának bevezetéseként megvizsgáljuk a *homogén lineáris vektor-vektor függvények* tulajdonságait. Visszaidézve az egyváltozós homogén lineáris függvényeket értelmező (1.2) egyenlet szerkezetét azt mondjuk, hogy homogén lineáris a

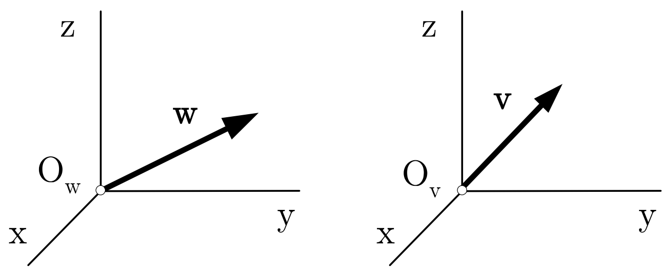
$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) \tag{1.21}$$

vektor-vektor függvény, ha teljesül az

$$\mathbf{f}\left(v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z\right) = v_x\mathbf{f}(\mathbf{e}_x) + v_y\mathbf{f}(\mathbf{e}_y) + v_z\mathbf{f}(\mathbf{e}_z) \tag{1.22}$$

egyenlet. Geometriailag a fenti egyenlet olyan függvénynek tekinthető, amely a tetszőleges O_v pontból felmért $\mathbf{v}$ vektorok háromméretű terét leképezi az ugyancsak tetszőleges O_w pontból felmért $\mathbf{w}$ vektorok háromméretű terére – *1.4. ábra.* A $\mathbf{v}$ vektorokat tárgyvektoroknak, a $\mathbf{w}$ vektorokat képvektoroknak nevezzük. Röviden az mondható, hogy a $\mathbf{w}$ a $\mathbf{v}$ képe.

Azt mondjuk, hogy *nem elfajuló* a leképezés, ha a $\mathbf{v}$ vektorok teljes háromméretű terét a $\mathbf{w}$ vektorok teljes háromméretű terére képezzük le.



1.4. ábra.

Jelölje az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorok képét rendre

$$\mathbf{w}_x = \mathbf{f}(\mathbf{e}_x), \qquad \mathbf{w}_y = \mathbf{f}(\mathbf{e}_y) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{w}_z = \mathbf{f}(\mathbf{e}_z)\,, \tag{1.23}$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_x &= w_{xx}\mathbf{e}_x + w_{yx}\mathbf{e}_y + w_{zx}\mathbf{e}_z\,, \\ \mathbf{w}_y &= w_{xy}\mathbf{e}_x + w_{yy}\mathbf{e}_y + w_{zy}\mathbf{e}_z\,, \\ \mathbf{w}_z &= w_{xz}\mathbf{e}_x + w_{yz}\mathbf{e}_y + w_{zz}\mathbf{e}_z\,. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Nyilvánvaló az (1.22) alapján, hogy

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}(\mathbf{v}) = v_x\mathbf{w}_x + v_y\mathbf{w}_y + v_z\mathbf{w}_z = \mathbf{w}_x\underbrace{(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{v})}_{v_x} + \mathbf{w}_y\underbrace{(\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{v})}_{v_y} + \mathbf{w}_z\underbrace{(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{v})}_{v_z}, \tag{1.25}$$

azaz a leképezést egyértelműen meghatározza az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorok $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képe, vagyis kilenc skalármennyiség.

1.3.2. További tartalom adható a (1.25) képlet jobboldalának ha értelmezzük két vektor *diádikus szorzatát.* Jelölje az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok diádikus szorzatát, más néven *diádot*

$$\mathbf{a}\circ\mathbf{b}\,.$$

A szorzat a rajta végzett műveletek kapcsán kap mélyebb értelmet. Ha a diádikus szorzatot jobbról, vagy balról szorozzuk skalárisan a $\mathbf{v}$ vektorral, akkor a lenti értelmezés szerinti vektorok az eredmény:

$$(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\cdot\mathbf{v}=\mathbf{a}\ (\mathbf{b}\cdot\mathbf{v})\ , \tag{1.26a}$$

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\ \mathbf{b}\,, \tag{1.26b}$$

ahonnan azonnal látszik, hogy általában

$$(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\cdot\mathbf{v}\neq\mathbf{v}\cdot(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\ .$$

Ha a diádikus szorzatot jobbról, vagy balról szorozzuk vektoriálisan a $\mathbf{v}$ vektorral, akkor a lenti értelmezés szerint az eredmény továbbra is diád:

$$(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\times\mathbf{v}=\mathbf{a}\circ\ (\mathbf{b}\times\mathbf{v})\ , \tag{1.27a}$$

$$\mathbf{v}\times(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})=(\mathbf{v}\times\mathbf{a})\ \circ\mathbf{b} \tag{1.27b}$$

és az is látszik, hogy

$$(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\times\mathbf{v}\neq\mathbf{v}\times(\mathbf{a}\circ\mathbf{b})\ .$$

Az (1.26a) képlet alapján a

$$\mathbf{w}_x\underbrace{(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{v})}_{v_x}=(\mathbf{w}_x\circ\mathbf{e}_x)\cdot\mathbf{v}\,,\quad \mathbf{w}_y\underbrace{(\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{v})}_{v_y}=(\mathbf{w}_y\circ\mathbf{e}_y)\cdot\mathbf{v}\quad \text{és}\quad \mathbf{w}_z\underbrace{(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{v})}_{v_z}=(\mathbf{w}_z\circ\mathbf{e}_z)\cdot\mathbf{v}$$

összefüggések írhatók fel, amelyekkel (1.25)-ből a

$$\mathbf{w}=\mathbf{f}(\mathbf{v})=(\mathbf{w}_x\circ\mathbf{e}_x+\mathbf{w}_y\circ\mathbf{e}_y+\mathbf{w}_z\circ\mathbf{e}_z)\cdot\mathbf{v}$$

eredmény következik. Az utóbbi képletben álló

$$\boxed{\boldsymbol{W}=\mathbf{w}_x\circ\mathbf{e}_x+\mathbf{w}_y\circ\mathbf{e}_y+\mathbf{w}_z\circ\mathbf{e}_z} \tag{1.28}$$

diádösszeget másodrendű tenzornak nevezzük. A $\boldsymbol{W}$ tenzor segítségével a leképezést adó $\mathbf{f}(\mathbf{v})$ homogén lineáris függvény a

$$\boxed{\mathbf{w}=\mathbf{f}(\mathbf{v})=\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{v}} \tag{1.29}$$

alakban írható fel. Ez az előállítás ugyanolyan jellegű mint az egyváltozós homogén lineáris függvények $y=mx$ alakja (y-nak $\mathbf{w}$, m-nek $\boldsymbol{W}$, x-nek $\mathbf{v}$ felel meg).

Mivel maga a leképezés KR független, a $\boldsymbol{W}$ tenzor, ugyanúgy mint valamely vektor, KR független mennyiség. Az (1.28) diádösszeg azonban már KR-hez kötött, az xyz KR-ben adja meg az invariáns $\boldsymbol{W}$ tenzort. Más szavakkal a diádok szorzótényezői, a tárgyvektorok (egységvektorok) és a hozzájuk tartozó képvektorok már egy adott KR-ben lettek véve.

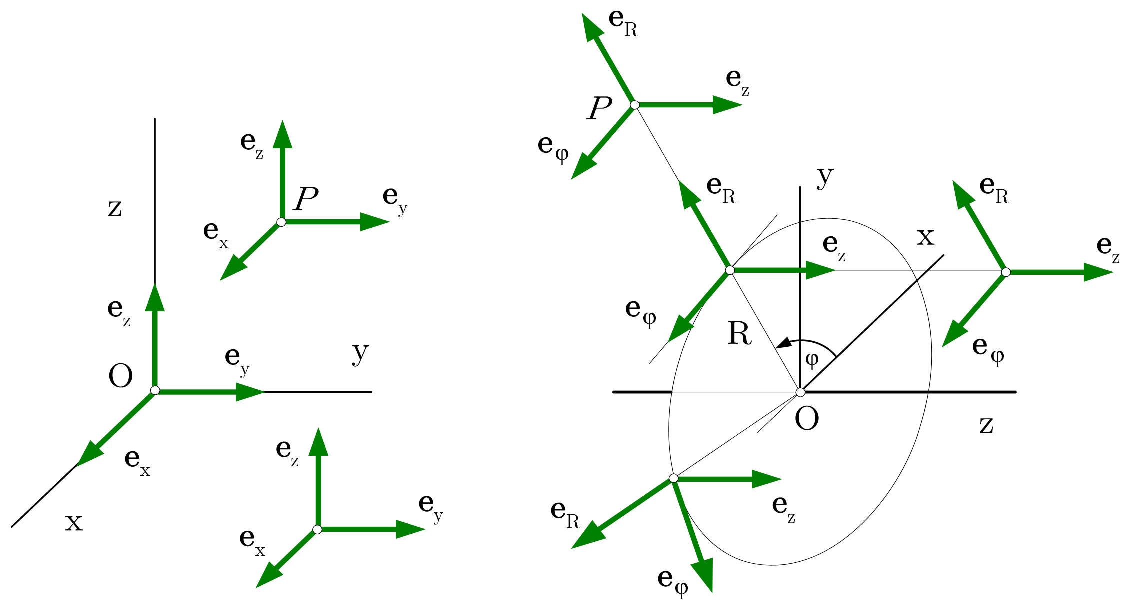
A $\boldsymbol{W}$ tenzor ismeretében a

$$\boxed{\mathbf{w}_x=\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{e}_x,\qquad \mathbf{w}_y=\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{e}_y,\qquad \mathbf{w}_z=\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{e}_z} \tag{1.30}$$

szorzatok adják az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokhoz tartozó és a tenzort az xyz KR-ben meghatározó $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorokat. A $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok w_{xx}, w_{yx}, etc. w_{zz} koordinátái pedig a vektorok koordinátáinak számítására szolgáló (1.6a,b) és az (1.24) képletek alapján a

$$\boxed{w_{mn}=\mathbf{e}_m\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{e}_n\qquad\qquad m,n=x,y,z} \tag{1.31}$$

összefüggésekkel határozhatók meg.



1.5. ábra.

A test pontjaihoz kötött vektorokat és tenzorokat a test pontjaihoz kötött, un. *lokális KR-ekben* állítjuk elő, hiszen azok a tekintett pont valamilyen fizikai állapotát adják meg kvantitatíve. Az xyz KR-ben a minden pontban azonos lokális KR bázisvektorai (egységvektorai) megegyeznek a koordinátatengelyek egységvektoraival. Az $R\varphi z$ KR-ben azonban pontról pontra változnak a lokális KR-ek illetve a bázisvektorok. Ez annak a következménye, hogy ez a KR görbevonalú. Az 1.5. ábra mindkét esetet szemlélteti.

1.3.3. A leképezés során az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $[\mathbf{a}_1\,\mathbf{a}_2\,\mathbf{a}_3]=a_0\neq 0$ vektorhármas is vehető bázisnak. Ha ismerjük az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok

$$\mathbf{w}_1=\mathbf{f}(\mathbf{a}_1),\qquad \mathbf{w}_2=\mathbf{f}(\mathbf{a}_2)\qquad \text{és}\qquad \mathbf{w}_3=\mathbf{f}(\mathbf{a}_3) \tag{1.32}$$

képeit, akkor a leképzőfüggvény homogén lineáris voltát valamint az (1.18) képletet kihasználva kapjuk, hogy

$$\mathbf{w}=\mathbf{f}(\mathbf{v})=\mathbf{f}(v_1\mathbf{a}_1+v_2\mathbf{a}_2+v_3\mathbf{a}_3)=v_1\mathbf{w}_1+v_2\mathbf{w}_2+v_3\mathbf{w}_3=\mathbf{w}_1\underbrace{(\overset{*}{\mathbf{a}}_1\cdot\mathbf{v})}_{v_1}+\mathbf{w}_2\underbrace{(\overset{*}{\mathbf{a}}_2\cdot\mathbf{v})}_{v_2}+\mathbf{w}_3\underbrace{(\overset{*}{\mathbf{a}}_3\cdot\mathbf{v})}_{v_3}.$$

A diádokkal kapcsolatos (1.26a) műveleti szabály alapján kiemelhetjük innen a $\mathbf{v}$ vektort

$$\mathbf{w}=\mathbf{f}(\mathbf{v})=\underbrace{\left(\mathbf{w}_1\circ\overset{*}{\mathbf{a}}_1+\mathbf{w}_2\circ\overset{*}{\mathbf{a}}_2+\mathbf{w}_3\circ\overset{*}{\mathbf{a}}_3\right)}_{\boldsymbol{W}}\cdot\mathbf{v}\,,$$

ahol a

$$\boldsymbol{W}=\mathbf{w}_1\circ\overset{*}{\mathbf{a}}_1+\mathbf{w}_2\circ\overset{*}{\mathbf{a}}_2+\mathbf{w}_3\circ\overset{*}{\mathbf{a}}_3 \tag{1.33}$$

együttható ismét a $\boldsymbol{W}$ tenzort adja.

1.4. Speciális tenzorok

1.4.1. A $\boldsymbol{W}$ tenzor transzponáltját kapjuk, ha felcseréljük (1.28)-ban a diádikus szorzatok szorzótényezőinek sorrendjét:

$$\boxed{\boldsymbol{W}^T=\mathbf{e}_x\circ\mathbf{w}_x+\mathbf{e}_y\circ\mathbf{w}_y+\mathbf{e}_z\circ\mathbf{w}_z\,.} \tag{1.34}$$

Vegyük észre, hogy

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{W}^T=\mathbf{v}\cdot(\mathbf{e}_x\circ\mathbf{w}_x+\mathbf{e}_y\circ\mathbf{w}_y+\mathbf{e}_z\circ\mathbf{w}_z)=\underbrace{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_x)}_{v_x}\mathbf{w}_x+\underbrace{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_y)}_{v_y}\mathbf{w}_y+\underbrace{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_z)}_{v_z}\mathbf{w}_z=$$

$$=\mathbf{w}_x\underbrace{(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{v})}_{v_x}+\mathbf{w}_y\underbrace{(\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{v})}_{v_y}+\mathbf{w}_z\underbrace{(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{v})}_{v_z}=(\mathbf{w}_x\circ\mathbf{e}_x+\mathbf{w}_y\circ\mathbf{e}_y+\mathbf{w}_z\circ\mathbf{e}_z)\cdot\mathbf{v}=\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{v}\,,$$

vagy tömören

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{W}^T=\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{v}\,, \tag{1.35}$$

ahonnan

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{W}^T\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{v} \tag{1.36}$$

bármilyen legyen is az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ vektor.

A $\boldsymbol{W}$ tenzor *szimmetrikus*, ha

$$\boxed{\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}^T\,.} \tag{1.37}$$

Ha a $\boldsymbol{W}$ tenzor szimmetrikus, akkor (1.35) és (1.36) alapján

$$\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{v}\qquad\text{illetve}\qquad\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{v} \tag{1.38}$$

bármilyen legyen is az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$.

A $\boldsymbol{W}$ tenzor *ferdeszimmetrikus*, ha

$$\boxed{\boldsymbol{W}=-\boldsymbol{W}^T\,.} \tag{1.39}$$

Ha a $\boldsymbol{W}$ tenzor ferdeszimmetrikus, akkor (1.35) és (1.36) alapján

$$-\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{W}=\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{v}\qquad\text{illetve}\qquad-\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{v} \tag{1.40}$$

bármilyen legyen is az $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$.

A $\boldsymbol{W}$ tenzor

$$\left.\begin{array}{l}\text{pozitív definit}\\ \text{pozitív szemidefinit}\\ \text{negatív szemidefinit}\\ \text{negatív definit}\end{array}\right\}\quad\text{ha bármely }\mathbf{u}-\text{ra}\quad\left\{\begin{array}{l}\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{u}>0\\ \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{u}\geq 0\\ \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{u}\leq 0\\ \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{u}<0\end{array}\right. .$$

Az $\boldsymbol{E}$ *egységtenzor* önmagára képezi le a $\mathbf{v}$ vektorok terét. A

$$\mathbf{v}=v_x\mathbf{e}_x+v_y\mathbf{e}_y+v_z\mathbf{e}_z=\mathbf{e}_x\underbrace{(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{v})}_{v_x}+\mathbf{e}_y\underbrace{(\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{v})}_{v_y}+\mathbf{e}_z\underbrace{(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{v})}_{v_z}=$$

$$=\underbrace{(\mathbf{e}_x\circ\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y\circ\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_z\circ\mathbf{e}_z)}_{\boldsymbol{E}}\cdot\mathbf{v}$$

átalakítás alapján azonnal kapjuk, hogy

$$\boxed{\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^T=\mathbf{e}_x\circ\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y\circ\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_z\circ\mathbf{e}_z} \tag{1.41}$$

ahonnan az is látszik, hogy szimmetrikus az $\boldsymbol{E}$ egységtenzor.

A

$$\boldsymbol{W}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{W}^T\right)+\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{W}-\boldsymbol{W}^T\right) \tag{1.42}$$

átalakítás alapján adódik a következtetés, hogy bármely $\boldsymbol{W}$ tenzor felbontható egy szimmetrikus $\boldsymbol{W}_{sz}$ és egy ferdeszimmetrikus $\boldsymbol{W}_{asz}$ tenzor összegére:

$$\boxed{\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}_{sz} + \boldsymbol{W}_{asz}\ ,} \tag{1.43}$$

ahol

$$\boxed{\boldsymbol{W}_{sz} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{W} + \boldsymbol{W}^T\right) \qquad \text{illetve} \qquad \boldsymbol{W}_{asz} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}^T\right)\ .} \tag{1.44}$$

Ez az eredmény az *additív felbontási tétel* néven ismeretes.

1.4.2. Vizsgáljuk meg milyen a $\boldsymbol{W}$ tenzor ferdeszimmetrikus részéhez tartozó leképezés.

A ferdeszimmetrikus részt adó $(1.44)_2$, továbbá az (1.34) képlet felhasználásával – kihasználva egyúttal a diádokon végzett skaláris szorzás műveleti szabályait és a kétszeres vektorszorzatokkal kapcsolatos kifejtési tételt – írható, hogy

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{W}_{asz}\cdot\mathbf{v} &= \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}^T\right)\cdot\mathbf{v} = \\
&= \frac{1}{2}\left(\mathbf{w}_x\circ\mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y\circ\mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z\circ\mathbf{e}_z\right)\cdot\mathbf{v} - \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_x\circ\mathbf{w}_x + \mathbf{e}_y\circ\mathbf{w}_y + \mathbf{e}_z\circ\mathbf{w}_z\right)\cdot\mathbf{v} = \\
&= \frac{1}{2}\underbrace{[\mathbf{w}_x\left(\mathbf{e}_x\cdot\mathbf{v}\right) - \mathbf{e}_x\left(\mathbf{w}_x\cdot\mathbf{v}\right)]}_{-(\mathbf{w}_x\times\mathbf{e}_x)\times\mathbf{v}} + \frac{1}{2}\underbrace{[\mathbf{w}_y\left(\mathbf{e}_y\cdot\mathbf{v}\right) - \mathbf{e}_y\left(\mathbf{w}_y\cdot\mathbf{v}\right)]}_{-(\mathbf{w}_y\times\mathbf{e}_y)\times\mathbf{v}} + \frac{1}{2}\underbrace{[\mathbf{w}_z\left(\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{v}\right) - \mathbf{e}_z\left(\mathbf{w}_z\cdot\mathbf{v}\right)]}_{-(\mathbf{w}_z\times\mathbf{e}_z)\times\mathbf{v}} = \\
&= \underbrace{-\frac{1}{2}\left[\mathbf{w}_x\times\mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y\times\mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z\times\mathbf{e}_z\right]}_{\mathbf{w}_a}\times\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{1.45}$$

vagy, elhagyva a közbülső átalakítás lépéseit

$$\boxed{\boldsymbol{W}_{asz}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{w}_a\times\mathbf{v}} \tag{1.46}$$

ahol, összhangban a fentiekkel

$$\boxed{\mathbf{w}_a = -\frac{1}{2}\left[\mathbf{w}_x\times\mathbf{e}_x + \mathbf{w}_y\times\mathbf{e}_y + \mathbf{w}_z\times\mathbf{e}_z\right]\ .} \tag{1.47}$$

A $\mathbf{w}_a$ vektor a $\boldsymbol{W}$ tenzor un. *vektorinvariánsa*. Mivel az (1.45) baloldalán álló leképezés KR független, a jobboldal $\mathbf{w}_a$ vektora is KR független kell, hogy legyen. Maga az invariáns szó erre a körülményre utal.

Vegyük észre, hogy az (1.47) képlet könnyen megjegyezhető, hiszen csak annyit kell tenni a memorizáláskor, hogy a $\boldsymbol{W}$ tenzort megadó (1.28) képletben a diádikus szorzás $\circ$ műveleti jelét a vektoriális szorzás $\times$ műveleti jelére cseréljük, majd megszorozzuk az eredményt $-1/2$-el.

Az (1.24) képvektorokat felhasználva

$$\mathbf{w}_x\times\mathbf{e}_x = w_{zx}\mathbf{e}_y - w_{yx}\mathbf{e}_z\ , \qquad \mathbf{w}_y\times\mathbf{e}_y = w_{xy}\mathbf{e}_z - w_{zy}\mathbf{e}_x \qquad \text{és} \qquad \mathbf{w}_z\times\mathbf{e}_z = w_{yz}\mathbf{e}_x - w_{xz}\mathbf{e}_y\ ,$$

amelyekkel

$$\boxed{\mathbf{w}_a = w_{ax}\mathbf{e}_x + w_{ay}\mathbf{e}_y + w_{az}\mathbf{e}_z\ ,} \tag{1.48a}$$

ahol

$$\boxed{w_{ax} = -\frac{1}{2}\left(w_{yz} - w_{zy}\right)\ , \quad w_{ay} = -\frac{1}{2}\left(w_{zx} - w_{xz}\right) \quad \text{és} \quad w_{az} = -\frac{1}{2}\left(w_{xy} - w_{yx}\right)\ .} \tag{1.48b}$$

Ha a $\boldsymbol{W}$ tenzor szimmetrikus, akkor az (1.46) és (1.45) első sora alapján – figyelembevéve a $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^T$ szimmetriafeltételt – írható, hogy

$$\mathbf{w}_a\times\mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{W} - \boldsymbol{W}^T\right)\cdot\mathbf{v} = 0\ .$$

Mivel ez az egyenlet bármely $\mathbf{v}$-re fennáll, következik, hogy $\mathbf{w}_a = \mathbf{0}$, azaz, hogy *szimmetrikus tenzorok* esetén az xyz KR $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektoraihoz rendelt $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok koordinátái eleget tesznek a

$$\boxed{w_{xy} = w_{yx}\,, \qquad w_{yz} = w_{zy} \qquad \text{és} \qquad w_{zx} = w_{xz}\,.} \tag{1.49}$$

feltételeknek.

Ha a $\boldsymbol{W}$ tenzor ferdeszimmetrikus, akkor a w_{mn}-t adó (1.31) és az $(1.40)_2$ képletek szerint, az utóbbiban rendre $\mathbf{e}_m$ és $\mathbf{e}_n$-t gondolunk $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ helyére, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_m \cdot \boldsymbol{W} \cdot \mathbf{e}_n &= -\mathbf{e}_n \cdot \boldsymbol{W} \cdot \mathbf{e}_m \qquad m \neq n, \quad m, n = x, y, z \\ \mathbf{e}_m \cdot \boldsymbol{W} \cdot \mathbf{e}_m &= -\mathbf{e}_m \cdot \boldsymbol{W} \cdot \mathbf{e}_m \qquad m = x, y, z \end{aligned}$$

azaz, hogy *ferdeszimmetrikus tenzorok* esetén az xyz KR $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektoraihoz rendelt $\mathbf{w}_x, \mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok koordinátái eleget tesznek a

$$\boxed{\begin{array}{c} w_{xy} = -w_{yx}\,, \qquad w_{yz} = -w_{zy} \qquad \text{és} \qquad w_{zx} = -w_{xz}\,, \\ \text{továbbá a} \qquad w_{xx} = w_{yy} = w_{zz} = 0 \end{array}} \tag{1.50}$$

feltételeknek.

1.5. Tenzorok és mátrixok

1.5.1. A $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{w}$ képvektorához, valamint az egységvektorok $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektoraihoz rendelt $\underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{w}}$, $\underline{\mathbf{w}}_x$, $\underline{\mathbf{w}}_y$ és $\underline{\mathbf{w}}_z$ oszlopvektorok (oszlopmátrixok) segítségével mátrix jelölésekkel is felírható a leképezéssel kapcsolatos (1.25) képlet:

$$\underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{f}}(\mathbf{v}) = \underline{\mathbf{w}}_x v_x + \underline{\mathbf{w}}_y v_y + \underline{\mathbf{w}}_z v_z\,.$$

Kirészletezve

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xx} \\ w_{yx} \\ w_{zx} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}_x} v_x + \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xy} \\ w_{yy} \\ w_{zy} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}_y} v_y + \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xz} \\ w_{yz} \\ w_{zz} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{w}}_z} v_z = \underbrace{\begin{bmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{W}}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{v}}}.$$

Ebben az egyenletben

$$\underset{(3\times3)}{\underline{\mathbf{W}}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\mathbf{w}}_x & \underline{\mathbf{w}}_y & \underline{\mathbf{w}}_z \end{array}\right] = \begin{bmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.51}$$

a $\mathbf{W}$ tenzor mátrixa az xyz KR-ben és az is kiolvasható a fenti képletekből, hogy a $\mathbf{v}$ leképezésével kapcsolatos (1.29) egyenletnek a

$$\boxed{\underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{w}}} = \underset{(3\times3)}{\underline{\mathbf{W}}}\ \underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{v}}}} \tag{1.52}$$

összefüggés felel meg.

Figyeljük meg, hogy a $\boldsymbol{W}$ tenzor xyz KR-beni $\underline{\mathbf{W}}$ mátrixának oszlopait rendre az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorokhoz tartozó $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok mátrixai, azaz a $\underline{\mathbf{w}}_x$, $\underline{\mathbf{w}}_y$ és $\underline{\mathbf{w}}_z$ oszlopvektorok alkotják.

Megjegyezzük, hogy a képvektorok mátrixokkal történő felírása során a vonatkozó mátrixok méreteit a továbbiakban csak akkor írjuk ki, ha ezt valamilyen okból hangsúlyozni kívánjuk.

1.5.2. A $\boldsymbol{W}$ tenzort adó diádösszeg – lásd a $\boldsymbol{W}$-t adó (1.28) képlet jobboldalát– minden egyes tagja külön külön tenzor, az alábbi leképezésekkel:

a $\mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x$ tenzor az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorokhoz rendre a $\mathbf{w}_x$, zérus, zérus vektorokat,
a $\mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y$ tenzor az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorokhoz rendre a zérus, $\mathbf{w}_y$, zérus vektorokat,
a $\mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z$ tenzor az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorokhoz rendre a zérus, zérus, $\mathbf{w}_z$ vektorokat

rendeli.

Visszaidézve, hogy a $\boldsymbol{W}$ tenzor (1.51) szerinti mátrixában az első oszlop az $\mathbf{e}_x$-hez, a második oszlop az $\mathbf{e}_y$-hoz, a harmadik oszlop az $\mathbf{e}_z$-hez rendelt képvektor mátrixa azt kapjuk, hogy

– a $\mathbf{w}_x \circ \mathbf{e}_x$ diádnak, mint tenzornak

$$\begin{bmatrix} w_{xx} & 0 & 0 \\ w_{yx} & 0 & 0 \\ w_{zx} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{xx} \\ w_{yx} \\ w_{zx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{w}}_x} \; \underset{(1\times3)}{\underline{\mathbf{e}}_x^T} \; ;$$

– a $\mathbf{w}_y \circ \mathbf{e}_y$ diádnak, mint tenzornak

$$\begin{bmatrix} 0 & w_{xy} & 0 \\ 0 & w_{yy} & 0 \\ 0 & w_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{xy} \\ w_{yy} \\ w_{zy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{w}}_y} \; \underset{(1\times3)}{\underline{\mathbf{e}}_y^T} \; ;$$

– a $\mathbf{w}_z \circ \mathbf{e}_z$ diádnak, mint tenzornak pedig

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & w_{xz} \\ 0 & 0 & w_{yz} \\ 0 & 0 & w_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{xz} \\ w_{yz} \\ w_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{w}}_z} \; \underset{(1\times3)}{\underline{\mathbf{e}}_z^T}$$

a mátrixa, ahol $\underline{\mathbf{e}}_x$, $\underline{\mathbf{e}}_y$ és $\underline{\mathbf{e}}_z$ az egységvektorok oszlopmátrixai.

A

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{a} \circ \mathbf{b} = \mathbf{a} \circ (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) = \underbrace{\mathbf{a} b_x}_{\mathbf{t}_x} \circ \mathbf{e}_x + \underbrace{\mathbf{a} b_y}_{\mathbf{t}_y} \circ \mathbf{e}_y + \underbrace{\mathbf{a} b_z}_{t_z} \circ \mathbf{e}_z$$

diád mint tenzor mátrixára hasonló gondolatmenettel a

$$\underline{\mathbf{T}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\mathbf{t}}_x & \underline{\mathbf{t}}_y & \underline{\mathbf{t}}_z \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\mathbf{a}} b_x & \underline{\mathbf{a}} b_y & \underline{\mathbf{a}} b_z \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{a}}} \; \underset{(1\times3)}{\underline{\mathbf{b}}^T}$$

eredmény következik.

A fenti képletek szerint *két vektor diádikus szorzatának mátrixa az első vektor oszlopmátrixának és a második vektor oszlopmátrixa transzponáltjának szorzata.* Ezt a szorzatot is diádikus szorzatnak nevezzük.

1.5.3. A $\boldsymbol{W}$ tenzor transzponáltjának mátrixa a transzponált tenzort értelmező (1.34) képlet és az előzőek szerint adódik:

$$\underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{e}}_x} \; \underset{(1\times3)}{\underline{\mathbf{w}}_x^T} + \underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{e}}_y} \; \underset{(1\times3)}{\underline{\mathbf{w}}_y^T} + \underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{e}}_z} \; \underset{(1\times3)}{\underline{\mathbf{w}}_z^T} = \begin{bmatrix} w_{xx} & w_{yx} & w_{zx} \\ w_{xy} & w_{yy} & w_{zy} \\ w_{xz} & w_{yz} & w_{zz} \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{W}}^T ,$$

azaz a tenzor transzponáltjának mátrixa megegyezik a tenzor mátrixának transzponáltjával.

Nyilvánvaló, hogy az $\boldsymbol{E}$ egységtenzornak az $\underline{\mathbf{E}}$ egységmátrix a mátrixa:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{e}}_x} \; \underset{(1\times3)}{\underline{\mathbf{e}}_x^T} + \underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{e}}_y} \; \underset{(1\times3)}{\underline{\mathbf{e}}_y^T} + \underset{(3\times1)}{\underline{\mathbf{e}}_z} \; \underset{(1\times3)}{\underline{\mathbf{e}}_z^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{1.53}$$

A szimmetrikus tenzorokkal kapcsolatos (1.49) összefüggés szerint a szimmetrikus tenzorok mátrixa is szimmetrikus:

$$\underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{W}}^T . \tag{1.54}$$

A ferdeszimmetrikus tenzorokkal kapcsolatos (1.50) összefüggés szerint a ferdeszimmetrikus tenzorok mátrixa is ferdeszimmetrikus:

$$\underline{\mathbf{W}} = -\underline{\mathbf{W}}^T . \tag{1.55}$$

Az (1.43) és (1.44) egyenletekkel adott felbontási tételnek a

$$\underline{\mathbf{W}} = \underline{\mathbf{W}}_{sz} + \underline{\mathbf{W}}_{asz} \tag{1.56}$$

egyenlet, ahol

$$\underline{\mathbf{W}}_{sz} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{W}} + \underline{\mathbf{W}}^T\right) \qquad \text{és} \qquad \underline{\mathbf{W}}_{asz} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{W}} - \underline{\mathbf{W}}^T\right) , \tag{1.57}$$

a mátrix alakja.

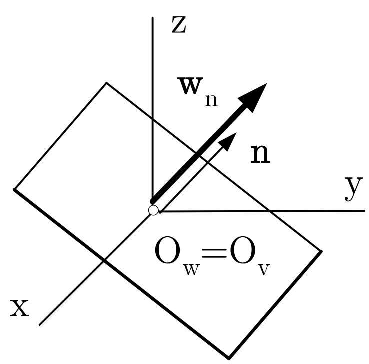
1.6. Szimmetrikus tenzorok sajátértékfeladata

1.6.1. Legyen a $\boldsymbol{W}$ tenzor szimmetrikus. Keressük azokat az n irányokat – ezeket *főirányoknak* nevezzük majd – amelyekre nézve fennáll, hogy az irányt kijelölő

$$\mathbf{n} = n_x\mathbf{e}_x + n_y\mathbf{e}_y + n_z\mathbf{e}_z; \qquad n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \tag{1.58}$$

egységvektor és a hozzátartozó $\mathbf{w}_n$ képvektor egymással párhuzamos – az 1.6. ábra ezt az esetet szemlélteti. Ha párhuzamos a $\mathbf{w}_n$ és $\mathbf{n}$ akkor fennáll a

$$\mathbf{w}_n = \boldsymbol{W} \cdot \mathbf{n} = \lambda\mathbf{n} \tag{1.59}$$



1.6. ábra.

összefüggés, ahol a λ, hasonlóan az n_x, n_y és n_z-hez, egyelőre ismeretlen paraméter. Mivel az $\boldsymbol{E}$ egységtenzor minden vektort önmagára képez le a fenti egyenlet átírható a

$$\boldsymbol{W} \cdot \mathbf{n} - \lambda\boldsymbol{E} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} ,$$

vagy ami ugyanaz a

$$(\boldsymbol{W} - \lambda\boldsymbol{E}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{1.60}$$

alakba. A $\boldsymbol{W}$ és $\boldsymbol{E}$ tenzorok, valamint az $\mathbf{n}$ vektor mátrixait felhasználva innen a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} w_{xx}-\lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy}-\lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz}-\lambda \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{W}}-\lambda\underline{\mathbf{E}}} \underbrace{\begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{n}}} = 0 \tag{1.61}$$

homogén lineáris egyenletrendszer következik.

Legyen $P_3(\lambda) = -\det(\underline{\mathbf{W}} - \lambda\underline{\mathbf{E}})$. Ez a függvény λ köbös polinomja, a karakterisztikus polinom. Triválistól különböző megoldás csak akkor létezik, ha a fenti egyenletrendszer determinánsa eltűnik, azaz ha

$$P_3(\lambda) = -\begin{vmatrix} w_{xx}-\lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy}-\lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz}-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - W_I\lambda^2 + W_{II}\lambda - W_{III} = 0 . \tag{1.62}$$

A determinánsokkal kapcsolatos kifejtési tétel felhasználásával és némi kézi számolással – ezt nem részletezzük – belátható, hogy itt

$$W_I = w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} , \tag{1.63a}$$

$$W_{II} = \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} \\ w_{yx} & w_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xz} \\ w_{zx} & w_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zy} & w_{zz} \end{vmatrix} \tag{1.63b}$$

és

$$W_{III} = \begin{vmatrix} w_{xx} & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} \end{vmatrix} . \tag{1.63c}$$

A W_I, W_{II} és W_{III} együtthatókat a $\boldsymbol{W}$ tenzor első, második és harmadik skalárinvariánsainak nevezzük. Az elnevezést az indokolja, hogy a $\boldsymbol{W}$ szimmetrikus tenzorral kapcsolatos és az (1.60) egyenlettel definiált *sajátértékfeladat* megoldása a tenzorhoz tartozó leképezés egy geometriai sajátosságát tükrözi és mint ilyen KR független. Következőleg a megoldás első lépésében kiadódó (1.62) *karakterisztikus egyenlet* gyökei is KR függetlenek kell, hogy legyenek. Ez viszont csak akkor lehetséges, ha a karakterisztikus egyenlet (karakterisztikus polinom) W_I, W_{II} és W_{III} együtthatói függetlenek a KR választásától.

1.6.2. Legyen λ_1 és λ_2 az (1.62) *karakterisztikus egyenlet* két különböző gyöke, azaz a sajátértékfeladat két különböző *sajátértéke*. Jelölje $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ a vonatkozó egységvektorokat. Ekkor

$$(\boldsymbol{W}-\lambda_1\boldsymbol{E})\cdot\mathbf{n}_1 = 0 \qquad \text{és} \qquad (\boldsymbol{W}-\lambda_2\boldsymbol{E})\cdot\mathbf{n}_2 = 0\,. \tag{1.64}$$

Innen, első esetben az $\mathbf{n}_2$-vel, második esetben pedig az $\mathbf{n}_1$-el történő skaláris szorzással azonnal adódik, hogy

$$\mathbf{n}_2\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{n}_1 = \lambda_1\mathbf{n}_2\cdot\mathbf{n}_1 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{n}_1\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{n}_2 = \lambda_2\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2\,. \tag{1.65}$$

A szimmetrikus tenzorokkal kapcsolatos $(1.38)_2$ képlet szerint

$$\mathbf{n}_2\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_1\cdot\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{n}_2\,.$$

Az utóbbi egyenlet figyelembevételével képezve az (1.65)-öt alkotó egyenletek különbségét a

$$(\lambda_1-\lambda_2)\,\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2 = 0\,, \qquad \text{azaz az} \qquad \mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2 = 0$$

eredmény következik vagyis a különböző sajátértékekhez tartozó főirányok merőlegesek egymásra.

Tegyük fel, hogy komplex szám a λ_1 sajátérték. Ekkor a vonatkozó főirányt adó

$$\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{n}_1 = \lambda_1\cdot\mathbf{n}_1 \tag{1.66}$$

egyenlet jobboldala komplex, a baloldal pedig a $\boldsymbol{W}$ valós volta miatt csak akkor lehet komplex, ha az $\mathbf{n}_1$ is komplex. Következésképp az $\mathbf{n}_1$ felírható az

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_{1\mathrm{Re}} + i\mathbf{n}_{1\mathrm{Im}}$$

alakban. Nyilvánvaló az is, hogy a $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \neq \lambda_1$ – a felülvonás a komplex konjugáltat jelöli – ugyancsak sajátérték, a vonatkozó főirány pedig az (1.66) egyenlet konjugálásával írható

$$\boldsymbol{W}\cdot\bar{\mathbf{n}}_1 = \bar{\lambda}_1\cdot\bar{\mathbf{n}}_1\,, \qquad \text{azaz a} \qquad \boldsymbol{W}\cdot\bar{\mathbf{n}}_1 = \lambda_2\cdot\bar{\mathbf{n}}_1$$

képlet szerint

$$\mathbf{n}_2 = \bar{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{n}_{1\mathrm{Re}} - i\mathbf{n}_{1\mathrm{Im}}\,.$$

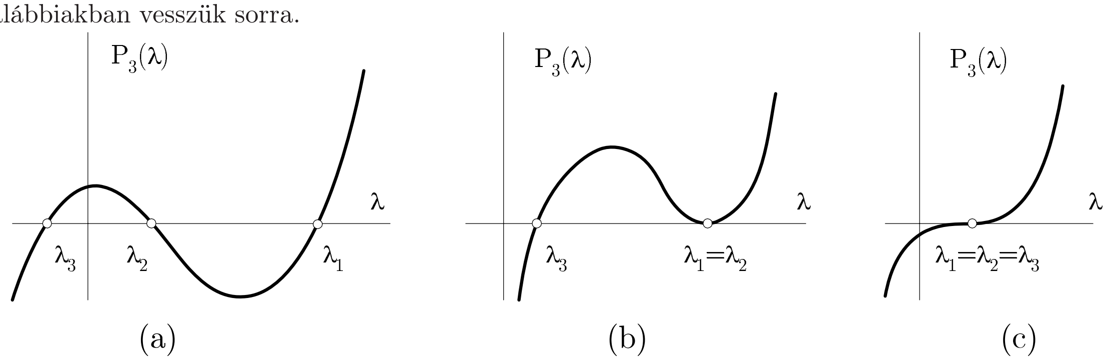
Mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$ fenn kell állnia az $\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2 = 0$ egyenletnek. Ugyanakkor az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$-t adó fenti képletek felhasználásával

$$\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2 = (\mathbf{n}_{1\mathrm{Re}}+i\mathbf{n}_{1\mathrm{Im}})\cdot(\mathbf{n}_{1\mathrm{Re}}-i\mathbf{n}_{1\mathrm{Im}}) = \mathbf{n}_{1\mathrm{Re}}\cdot\mathbf{n}_{1\mathrm{Re}} + \mathbf{n}_{1\mathrm{Im}}\cdot\mathbf{n}_{1\mathrm{Im}} = |\mathbf{n}_1|^2 \neq 0\,,$$

azaz nem zérus az $\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2$ skalárszorzat. Az a feltevés tehát, hogy a λ_1 komplex ellentmondásra vezet. Következésképp valósak a λ_k $(k=1,2,3)$ sajátértékek .

1.6.3.

Az alábbiakban a főirányok számítását tekintjük át, ha ismertek a $P_3(\lambda)$ karakterisztikus polinom gyökei. A gyökök nagyságát tekintve három jellegzetes esetet különböztethetünk meg: a gyökök különböznek egymástól (minden gyök egyszeres multiplicitású), van két egybeeső gyök (egy gyök kétszeres, egy gyök egyszeres multiplicitású), mindhárom gyök egybeesik (egy háromszoros multiplicitású gyök van). Az 1.7. ábra ezekre az esetekre külön-külön szemlélteti a karakterisztikus polinomot. Az egyes eseteket az alábbiakban vesszük sorra.



1.7. ábra.

1. Legyenek különbözőek a $P_3(\lambda)=0$ karakterisztikus egyenlet gyökei: $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$. Jelölje Δ_{mn} az n_x, n_y és n_z-t adó (1.61) lineáris egyenletrendszer

$$\underline{\mathbf{W}}-\lambda\underline{\mathbf{E}}=\begin{bmatrix} w_{xx}-\lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy}-\lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz}-\lambda \end{bmatrix}$$

együtthatómátrixa nm-ik $(m,n=x,y,z)$ eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst. A determinánsok kifejtési tételével ellenőrizhető – magát az ellenőrzést az 1.6. Gyakorlatra hagyjuk – , hogy

$$P_3^{'}(\lambda_k)=\left.\frac{dP_3(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda_k}=-\left.\frac{d}{d\lambda}\det\left(\underline{\mathbf{W}}-\lambda\underline{\mathbf{E}}\right)\right|_{\lambda_k}=\Delta_{xx}(\lambda_k)+\Delta_{yy}(\lambda_k)+\Delta_{zz}(\lambda_k)\,. \tag{1.67}$$

Mivel a három gyök különböző, ezért egyszeres, vagyis adott λ_k esetén legalább az egyike a $\Delta_{mm}(\lambda_k)$ determinánsoknak, mondjuk a $\Delta_{zz}(\lambda_k)$, különbözik zérustól. Ha ugyanis nem így lenne, eltűnne a $P_3^{'}(\lambda_k)$ derivált, következőleg nem lenne egyszeres a λ_k gyök – példaként lásd az 1.7.(b) ábra $\lambda_1=\lambda_2$ kettős gyökét, ahol vízszintes az érintő.

Ha mondjuk a $\Delta_{zz}(\lambda_k)$ különbözik zérustól, akkor az (1.61) lineáris egyenletrendszer első két egyenlete, n_x és n_y-t ismeretlennek, n_z-t pedig paraméternek véve, független egymástól a megoldás pedig

$$\overset{k}{n}_x=\frac{\Delta_{xz}(\lambda_k)}{\Delta_{zz}(\lambda_k)}\overset{k}{n}_z\,,\qquad\qquad \overset{k}{n}_y=\frac{\Delta_{yz}(\lambda_k)}{\Delta_{zz}(\lambda_k)}\overset{k}{n}_z \tag{1.68}$$

alakú. Az $\overset{k}{n}_z$-t az utóbbi megoldás $(1.58)_2$ normálási feltételbe történő helyettesítésével kapjuk meg:

$$\overset{k}{n}_z=\frac{\Delta_{zz}(\lambda_k)}{D};\qquad\qquad D^2=\Delta^2_{xz}(\lambda_k)+\Delta^2_{yz}(\lambda_k)+\Delta^2_{zz}(\lambda_k)\,.$$

Az $\overset{k}{n}_z$ (1.68)-ba történő visszahelyettesítése szerint egységes formula érvényes mindhárom ismeretlenre:

$$\overset{k}{n}_m=\frac{\Delta_{mz}(\lambda_k)}{D};\qquad\qquad m=x,y,z\;. \tag{1.69}$$

Vegyük észre, hogy ez a megoldás a harmadik egyenletet is kielégíti, hiszen a behelyettesítés szerint

$$\frac{1}{D}\left[w_{zx}\Delta_{xz}(\lambda_k)+w_{zy}\Delta_{yz}(\lambda_k)+(w_{zz}-\lambda_k)\,\Delta_{zm}(\lambda_k)\right]=\frac{P_3(\lambda_k)}{D}=0\,,$$

ahol a szögletes zárójelben álló kifejezés $-\det\left(\underline{\mathbf{W}}-\lambda\underline{\mathbf{E}}\right)\big|_{\lambda_k}$, ha az utolsó sor szerint végezzük el a determináns kifejtését.

A fentebb mondottaknak megfelelően eljárva minden egyes λ_k $(k=1,2,3)$ gyökhöz meghatározható olyan

$$\mathbf{n}_k=\overset{k}{n}_x\mathbf{e}_x+\overset{k}{n}_y\mathbf{e}_y+\overset{k}{n}_z\mathbf{e}_z;\qquad\qquad |\mathbf{n}_k|=1$$

irányvektor, hogy

$$\mathbf{w}_k=\boldsymbol{W}\cdot\mathbf{n}_k=\lambda_k\mathbf{n}_k\,. \tag{1.70}$$

Az $\mathbf{n}_k$ vektorok előjelét szabadon lehet megválasztani. Következésképp mindig lehetséges olyan választás, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokhoz tartozó irányok jobbsodratú kartéziuszi KR-t alkossanak. Ez a KR a *főtengelyek KR-e*, a vonatkozó koordinátasíkok pedig az un. *fősíkok*.

Az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ egységvektorok által kifeszített kartéziuszi KR-ben – azaz a főtengelyek KR-ében – felhasználva a képvektorokat adó (1.70) képletet

$$\boldsymbol{W}=\mathbf{w}_1\circ\mathbf{n}_1+\mathbf{w}_2\circ\mathbf{n}_2+\mathbf{w}_3\circ\mathbf{n}_3=\lambda_1\mathbf{n}_1\circ\mathbf{n}_1+\lambda_2\mathbf{n}_2\circ\mathbf{n}_2+\lambda_3\mathbf{n}_3\circ\mathbf{n}_3 \tag{1.71}$$

a tenzor diádikus alakja. Visszaidézve, hogy adott KR-ben az egységvektorokhoz tartozó képvektorok alkotják a tenzor mátrixának oszlopait írhatjuk, hogy

$$\underset{(3\times3)}{\underline{\mathbf{W}}}=\left[\begin{array}{c|c|c}\underline{\mathbf{w}}_1 & \underline{\mathbf{w}}_2 & \underline{\mathbf{w}}_3\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c|c}\lambda_1\underline{\mathbf{n}}_1 & \lambda_2\underline{\mathbf{n}}_2 & \lambda_3\underline{\mathbf{n}}_3\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{bmatrix}, \tag{1.72}$$

ahonnan jól látszik, hogy diagonális a tenzor mátrixa.

2. Legyen $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$. Az előzőekben áttekintett gondolatmenet és eredmények változatlanul érvényesek maradnak az $\mathbf{n}_3$-ra nézve, azaz

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_3 = 0 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = 0\,. \tag{1.73}$$

Ami a kettős gyököt illeti

$$P_3^{'}(\lambda_k) = 0; \qquad k = 1{,}2$$

és, amint az az (1.67) jobboldalának felhasználásával és némi számolással ellenőrizhető, fennáll, hogy

$$\frac{1}{2}P_3^{''}(\lambda_k) = (w_{xx} - \lambda_k) + (w_{yy} - \lambda_k) + (w_{zz} - \lambda_k)\,; \qquad k = 1{,}2$$

ahol a jobboldalon álló összeg legalább egy összeadandója, mondjuk az első, nem zérus, ellenkező esetben ugyanis három lenne a λ_k gyök multiplicitása.

Az $\overset{1}{n}_x$, $\overset{1}{n}_y$ és $\overset{1}{n}_z$ ismeretlenek meghatározására két egyenlet, az (1.61) lineáris egyenletrendszer első egyenlete, valamint az $(1.58)_2$ normálási feltétel használható fel. Az így kapott megoldással identikusan teljesül az (1.61) lineáris egyenletrendszer második és harmadik egyenlete – ez annak a következménye, hogy $P_3^{'}(\lambda_1) = 0$ és $P_3(\lambda_1) = 0$.[1]

Az $\mathbf{n}_2$ vektort úgy érdemes megválasztani, hogy teljesüljön az $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$ ortogonalitási feltétel. Kettős gyök esetén tehát csak az $\mathbf{n}_3$ főirány egyértelműen meghatározott, a másik kettő elvben szabadon felvehető az $\mathbf{n}_3$-ra merőleges síkban, célszerű azonban betartani az említett ortogonalitási feltételt. A $\boldsymbol{W}$ tenzor diádikus előállítását annak figyelembevételével kapjuk, hogy most $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W} &= \lambda_1 (\mathbf{n}_1 \circ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \circ \mathbf{n}_2) + \lambda_3 \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3 = \\ &= \lambda_1 \underbrace{(\mathbf{n}_1 \circ \mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 \circ \mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3)}_{\boldsymbol{E}} + (\lambda_3 - \lambda_1)\, \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3\end{aligned}$$

azaz

$$\boldsymbol{W} = \lambda_1 \boldsymbol{E} + (\lambda_3 - \lambda_1)\, \mathbf{n}_3 \circ \mathbf{n}_3 \tag{1.74}$$

Az utóbbi egyenlet szépen mutatja, hogy egyedül $\mathbf{n}_3$ igazi tenzorjellemző. Figyelemmel arra, hogy a főirányokat kijelölő $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ előjele megváltoztatható, mindig biztosíthatjuk, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokhoz tartozó irányok jobbsodratú kartéziuszi KR-t alkossanak.

3. Háromszoros gyök esetén $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ és

$$\boldsymbol{W} = \lambda_1 \boldsymbol{E}\,, \tag{1.75}$$

következőleg bármely irány főirány. Az ilyen tenzort *izotróp vagy gömbi tenzornak* nevezzük. Az utóbbi elnevezést az indokolja, hogy a vonatkozó geometriai leképezés gömböt rendel gömbhöz. Az is nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ vektorokat mindig megválaszthatjuk oly módon, hogy a hozzájuk tartozó irányok jobbsodratú kartéziuszi KR-t alkossanak.

1.6.4. A szimmetrikus tenzorok sajátértékfeladatával kapcsolatos eredményeket illetően összegezésszerűen az alábbiakat emeljük ki. A sajátértékfeladatnak legalább három megoldása van a főirányokra nézve. Ha csak három a megoldások száma, akkor ezek az irányok kölcsönösen merőlegesek egymásra. Ha azonban több mint három a megoldások száma, akkor végtelen sok megoldás van, de mindig kiválasztható ezek közül három egymásra kölcsönösen merőleges megoldás. A λ_k $(k = 1{,}2{,}3)$ sajátértékeket nagyság szerint rendezettnek tekintjük, vagyis úgy választjuk meg az indexüket, hogy fennálljon a

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$$

reláció. A vonatkozó $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ irányvektorokat pedig úgy érdemes megválasztani, hogy azok jobbsodratú kartéziuszi KR-t alkossanak. Ez a választás mindig lehetséges.

---

[1] Kétszeres gyök esetén 1 az $(\underline{\mathbf{W}} - \lambda\underline{\mathbf{E}})|_{\lambda_k}$ együtthatómátrix rangja, azaz $\Delta_{mn}{=}0; m, n{=}x, y, z$. Következésképp valóban identikusan teljesülnek az $\overset{1}{n}_x$-re vonatkozó

$$\overset{1}{n}_x = -\frac{1}{w_{xx} - \lambda_1}\left[w_{xy}\overset{1}{n}_y + w_{xz}\overset{1}{n}_z\right]$$

megoldás második és harmadik egyenletbe történő visszahelyettesítésével kapott

$$\Delta_{zz}\overset{1}{n}_y - \Delta_{yz}\overset{1}{n}_z = 0 \qquad \text{és} \qquad -\Delta_{zy}\overset{1}{n}_y + \Delta_{yy}\overset{1}{n}_z = 0$$

egyenletek.

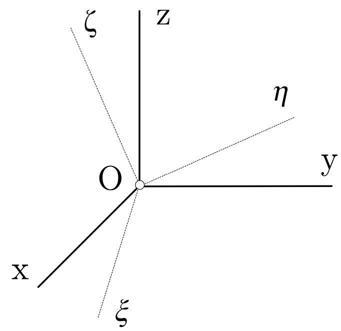
1.7. Tenzorok transzformációja

1.7.1. Legyen xyz és $\xi\eta\zeta$ két, ugyanazon ponthoz kötött de egymástól különböző kartéziuszi KR – 1.8. ábra. A vonatkozó egységvektorokat (bázisvektorokat) a szokásos módon jelöljük:

$$\mathbf{e}_x,\ \mathbf{e}_y,\ \mathbf{e}_z \qquad \text{illetve} \qquad \mathbf{e}_\xi,\ \mathbf{e}_\eta,\ \mathbf{e}_\zeta\,.$$

Mindkét KR egységvektorai megadhatók a másik KR-ben is, erre jelölésben, ha az szükséges az egyértelműség miatt, a

$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{e}_x}\,,\ \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{e}_y}\,,\ \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{e}_z} \qquad \text{illetve a} \qquad \underset{(x,y,z)}{\mathbf{e}_\xi}\,,\ \underset{(x,y,z)}{\mathbf{e}_\eta}\,,\ \underset{(x,y,z)}{\mathbf{e}_\zeta}$$



1.8. ábra.

módon, azaz a KR-t azonosító betűhármasnak a változót adó betű alatti kiszedésével utalunk. Ez a megfogalmazás általános érvényű, azaz más vektorok, illetve tenzorok esetén is hasonlóan írjuk ki, ha szükséges, hogy melyik KR-ben tekintjük az adott mennyiséget, vektort vagy tenzort.

A tetszőleges $\mathbf{v}$ vektor mind az xyz mind pedig a $\xi\eta\zeta$ KR-ben megadható:

$$\underset{(x,y,z)}{\mathbf{v}} = v_x\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_z\,, \qquad \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{v}} = v_\xi\mathbf{e}_\xi + v_\eta\mathbf{e}_\eta + v_\zeta\mathbf{e}_\zeta\,. \tag{1.76}$$

Ha ismerjük a vektort az egyik KR-ben, és ismerjük ugyanebben a KR-ben a másik KR egységvektorait, akkor a vektor másik KR-ben vett koordinátáit a vonatkozó egységvektorral való skaláris szorzással kapjuk:

$$\boxed{\underset{(x,y,z)}{v_m} = \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{v}} \cdot \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{e}_m}\,,\ _{m=x,y,z} \qquad \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{v_\mu} = \underset{(x,y,z)}{\mathbf{v}} \cdot \underset{(x,y,z)}{\mathbf{e}_\mu}\,.\ _{\mu=\xi,\eta,\zeta}} \tag{1.77}$$

Kirészletezve a v_μ számításával kapcsolatos képleteket írhatjuk, hogy

$$v_\mu = \mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{v} = v_x\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_x + v_y\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_y + v_z\mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\mu\cdot\mathbf{e}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}. \qquad _{\mu=\xi,\eta,\zeta}$$

Ez a három egyenlet egy egyenletbe tömöríthető:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} v_\xi \\ v_\eta \\ v_\zeta \end{bmatrix}}_{\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{v}}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{K}}} \underbrace{\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}}_{\underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{v}}}},$$

vagy ami ugyanaz

$$\boxed{\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{v}}} = \underline{\mathbf{K}}\ \underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{v}}}\,,} \tag{1.78}$$

ahol

$$\boxed{\underline{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\xi\cdot\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\eta\cdot\mathbf{e}_z \\ \mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_y & \mathbf{e}_\zeta\cdot\mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\xi,x) & \cos(\xi,y) & \cos(\xi,z) \\ \cos(\eta,x) & \cos(\eta,y) & \cos(\eta,z) \\ \cos(\zeta,x) & \cos(\zeta,y) & \cos(\zeta,z) \end{bmatrix}.} \tag{1.79a}$$

A későbbiek kedvéért kiírjuk a $\underline{\mathbf{K}}$ mátrix transzponáltját is:

$$\underline{\mathbf{K}}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_\zeta \\ \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_\zeta \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\xi & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\eta & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x,\xi) & \cos(x,\eta) & \cos(x,\zeta) \\ \cos(y,\xi) & \cos(y,\eta) & \cos(y,\zeta) \\ \cos(z,\xi) & \cos(z,\eta) & \cos(z,\zeta) \end{bmatrix} \tag{1.79b}$$

Vegyük észre, hogy a $\underline{\mathbf{K}}$ mátrix oszlopait az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorok $\xi\eta\zeta$ KR-ben vett koordinátái, sorait pedig az $\mathbf{e}_\xi$, $\mathbf{e}_\eta$ és $\mathbf{e}_\zeta$ egységvektorok xyz KR-ben vett koordinátái alkotják. Innen következik a $\underline{\mathbf{K}}$ mátrix alábbi két tulajdonsága:

1. Az egy-egy sorban illetve egy-egy oszlopban álló elemek négyzetösszege 1, hiszen ez az összeg egy-egy egységvektor abszolutértéke – a második oszlop esetén például $\mathbf{e}_y$ a vonatkozó egységvektor.
2. Zérus az összege a különböző indexű sorban illetve oszlopban azonos helyen álló elemek szorzatának, hiszen ez az összeg valójában két egymásra merőleges egységvektor skalárszorzata – a második és harmadik sor így képzett szorzata például $\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_\zeta$.

A két idézett tulajdonság kihasználásával nem nehéz belátni, hogy

$$\underline{\mathbf{K}}\,\underline{\mathbf{K}}^T = \underline{\mathbf{K}}^T\underline{\mathbf{K}} = \underline{\mathbf{E}}$$

azaz, hogy

$$\underline{\mathbf{K}}^T = \underline{\mathbf{K}}^{-1}\,. \tag{1.80}$$

Az olyan mátrixokat, melyekre nézve a mátrix transzponáltja és inverze megegyezik *ortogonális mátrixoknak* nevezzük. A fentiek szerint ortogonális az (1.78) transzformáció $\underline{\mathbf{K}}$ mátrixa. Következőleg az

$$\boxed{\underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{v}}} = \underline{\mathbf{K}}^T \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{v}}}} \tag{1.81}$$

egyenlet az említett transzformáció megfordítása.

1.7.2. A másodrendű $\boldsymbol{W}$ tenzorral kapcsolatosan azt a kérdést vizsgáljuk,

(a) hogyan számítható a tenzor $\underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{W}}}$ mátrixa a xyz KR-ben, ha ismerjük a tenzor $\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{W}}}$ mátrixát az $\xi\eta\zeta$ KR-ben, illetve megfordítva,

(b) hogyan számítható $\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{W}}}$, ha ismert $\underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{W}}}$.

Vegyük észre, hogy az (1.31) képlet a $\boldsymbol{W}$ tenzor mátrixának elemeit adja (R-ben. Ennek a képletnek a

$$w_{\mu\nu} = \mathbf{e}_\mu \cdot \boldsymbol{W} \cdot \mathbf{e}_\nu\,, \qquad \mu,\nu = \xi,\eta,\zeta \tag{1.82}$$

egyenlet a párja a $\xi\eta\zeta$ KR-ben. Az említett két összefüggés felhasználásával azonnal megkapjuk a mátrixok elemeivel kapcsolatos transzformációs képleteket:

$$\boxed{\underset{(x,y,z)}{w_{mn}} = \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{e}_m} \cdot \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\boldsymbol{W}} \cdot \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\mathbf{e}_n}\,,\ _{m,n=x,y,z} \qquad \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{w_{\mu\nu}} = \underset{(x,y,z)}{\mathbf{e}_\mu} \cdot \underset{(x,y,z)}{\boldsymbol{W}} \cdot \underset{(x,y,z)}{\mathbf{e}_\nu}\,.\ _{\mu,\nu=\xi,\eta,\zeta}} \tag{1.83}$$

További és a teljes mátrixokkal kapcsolatos szabályhoz úgy juthatunk, ha felírjuk a $\mathbf{v}$ vektor $\mathbf{w}$ képét megadó egyenletet mindkét KR-ben:

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{w}}} = \underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{W}}}\,\underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{v}}}\,, \qquad \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{w}}} = \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{W}}}\,\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{v}}}\,. \tag{1.84}$$

Az (1.81) és (1.78) első és második egyenletbe történő helyettesítésével a

$$\underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{w}}} = \underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{W}}}\,\underline{\mathbf{K}}^T\,\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{v}}} \qquad \text{és} \qquad \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{w}}} = \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{W}}}\,\underline{\mathbf{K}}\,\underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{v}}}$$

képleteket kapjuk. Ha az első egyenletet $\underline{\mathbf{K}}$-val a másodikat $\underline{\mathbf{K}}^T$-vel szorozzuk, és figyelembe vesszük a vektorokkal kapcsolatos (1.78) és (1.81) transzformációs szabályokat, akkor a

$$\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{w}}} = \underline{\mathbf{K}} \underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{w}}} = \underbrace{\underline{\mathbf{K}} \underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{W}}} \underline{\mathbf{K}}^T}_{\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{W}}}} \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{v}}} \qquad \underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{w}}} = \underline{\mathbf{K}}^T \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{w}}} = \underbrace{\underline{\mathbf{K}}^T \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{W}}} \underline{\mathbf{K}}}_{\underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{W}}}} \underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{v}}} \tag{1.85}$$

eredményre jutunk, ahonnan azonnal kiolvashatók – az első egyenletet $(1.84)_2$-vel, a másodikat $(1.84)_1$-el kell egybevetni – a $\boldsymbol{W}$ tenzor mátrixaival kapcsolatos

$$\boxed{\underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{W}}} = \underline{\mathbf{K}} \underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{W}}} \underline{\mathbf{K}}^T \qquad \text{és} \qquad \underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{W}}} = \underline{\mathbf{K}}^T \underset{(\xi,\eta,\zeta)}{\underline{\mathbf{W}}} \underline{\mathbf{K}}} \tag{1.86}$$

transzformációs szabályok.

1.8. Mintafeladatok

1.1. Vizsgálja meg elfajuló esetben a leképezést adó tenzor jellegét.

Nem elfajuló esetben a $\mathbf{w}_x$, $\mathbf{w}_y$ és $\mathbf{w}_z$ képvektorok nem fekhetnek egy síkban következőleg a tenzor három diádikus szorzat segítségével adható meg. Elfajuló esetben a három képvektor vagy egy síkban fekszik, vagy egy egyenesre esik, vagy mindegyik zérusvektor.

Ha a három képvektor egysíkú, akkor mondjuk a harmadik képvektor előállítható az első és második képvektor egy lineáris kombinációjaként, azaz

$$\mathbf{w}_z = \lambda_x \mathbf{w}_x + \lambda_y \mathbf{w}_y \,,$$

ahol λ_x és λ_y alkalmasan választott skalár. Az utóbbi előállítás (1.28)-be történő helyettesítésével

$$\boldsymbol{W} = \mathbf{w}_x \circ (\mathbf{e}_x + \lambda_x \mathbf{e}_z) + \mathbf{w}_y \circ (\mathbf{e}_y + \lambda_y \mathbf{e}_z)$$

a tenzor alakja, ami azt jelenti, hogy a tenzor két diád összegeként adható meg.

Ha a három képvektor egy egyenesre esik, akkor mondjuk a második és harmadik képvektor mindig felírható a

$$\mathbf{w}_y = \lambda_y \mathbf{w}_x, \qquad \mathbf{w}_z = \lambda_z \mathbf{w}_x$$

alakban, amivel (1.28)-ből

$$\boldsymbol{W} = \mathbf{w}_x \circ (\mathbf{e}_x + \lambda_y \mathbf{e}_x + \lambda_z \mathbf{e}_x)$$

a tenzor, azaz egy diád alkotja a tenzort.

1.2. Tegyük fel, hogy a merev test egy rögzített és az xyz KR O origójával egybeeső pontja körül forog. Tegyük fel továbbá, hogy kicsi a merev test elfordulása és jelölje $\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x \mathbf{e}_x + \varphi_y \mathbf{e}_y + \varphi_z \mathbf{e}_z$ a forgásvektort. Ismeretes, hogy kicsiny $|\boldsymbol{\varphi}|$-re $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ a merev test $\mathbf{r}$ helyvektorral azonosított pontjának elmozdulása. Homogén lineáris-e ez a vektor-vektor függvény?

Legyen $\mathbf{r} = \lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2$, ahol λ_1 és λ_2 tetszőleges skalár és $\mathbf{r}_1$ illetve $\mathbf{r}_2$ egymástól különböző vektorok. A vektoriális szorzás jól ismert tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = f(\mathbf{r}) = f\,(\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2) = \varphi \times (\lambda_1 \mathbf{r}_1 + \lambda_2 \mathbf{r}_2) = \\ = \underbrace{(\varphi \times \mathbf{r}_1)}_{\mathbf{u}_1} \lambda_1 + \underbrace{(\varphi \times \mathbf{r}_2)}_{\mathbf{u}_2} \lambda_2 = f(\mathbf{r}_1)\lambda_1 + f(\mathbf{r}_2)\lambda_2 = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 \,, \end{aligned}$$

azaz a függvény homogén lineáris.

Vegyük észre azt is, hogy a fenti vektor-vektor függvény elfajuló. Geometriailag ez abból következik, hogy a vektoriális szorzás $\mathbf{u}$ eredménye (a képvektorok halmaza) benne van az O_w origón átmenő és a $\boldsymbol{\varphi}$ vektorra merőleges síkban.

Jelölje $\boldsymbol{\Psi}$ az $\mathbf{u} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r}$ homogén lineáris függvényhez tartozó másodrendű tenzort. Nyilvánvaló, hogy

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{\psi}_x \circ \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\psi}_y \circ \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\psi}_z \circ \mathbf{e}_z \,,$$

ahol

$$\boldsymbol{\psi}_x = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_x, \qquad \boldsymbol{\psi}_y = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_y \qquad \text{illetve} \qquad \boldsymbol{\psi}_z = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z \,.$$

Ha a $\boldsymbol{\psi}_x$, $\boldsymbol{\psi}_y$ és $\boldsymbol{\psi}_z$ képvektorok komplanárisok, és a $\boldsymbol{\varphi}$-re merőleges síkban fekszenek, akkor

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\psi}_x (\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\psi}_y (\mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{\varphi}) + \boldsymbol{\psi}_z (\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{\varphi}) = \boldsymbol{\psi}_x \varphi_x + \boldsymbol{\psi}_y \varphi_y + \boldsymbol{\psi}_z \varphi_z = \\ = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_x \varphi_x + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_y \varphi_y + \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{e}_z \varphi_z = \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\varphi} = 0 \end{aligned}$$

azaz

$$\boldsymbol{\psi}_x\varphi_x+\boldsymbol{\psi}_y\varphi_y+\boldsymbol{\psi}_z\varphi_z=0\,,$$

ahonnan $\varphi_z\neq 0$ esetén a képvektorok komplanaritását kifejező

$$\boldsymbol{\psi}_z=-\boldsymbol{\psi}_x\frac{\varphi_x}{\varphi_z}-\boldsymbol{\psi}_y\frac{\varphi_y}{\varphi_z}$$

képlet következik. Ezt az eredményt felhasználva a $\boldsymbol{\Psi}$ tenzor, az elfajuló tenzorokra jellemző módon, két diád segítségével írható fel:

$$\boldsymbol{\Psi}=\boldsymbol{\psi}_x\circ\left(\mathbf{e}_x-\frac{\varphi_x}{\varphi_z}\mathbf{e}_z\right)+\boldsymbol{\psi}_y\circ\left(\mathbf{e}_y-\frac{\varphi_y}{\varphi_z}\mathbf{e}_z\right)\,.$$

1.3. Határozzuk meg a helyvektorokat az y tengely körül $\varphi=\varphi_y$ szöggel elforgató

$$\boldsymbol{Q}=\mathbf{a}\circ\mathbf{e}_x+\mathbf{b}\circ\mathbf{e}_y+\mathbf{c}\circ\mathbf{e}_z$$

tenzort.

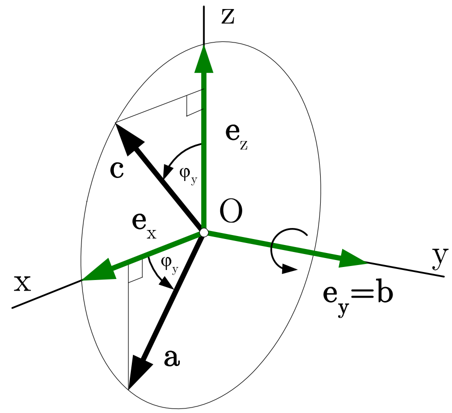
Az 1.9. ábráról leolvasható, hogy

$$\mathbf{a}=\mathbf{e}_x\cos\varphi-\mathbf{e}_z\sin\varphi\,,$$
$$\mathbf{b}=\mathbf{e}_y\,,\quad \mathbf{c}=\mathbf{e}_x\sin\varphi+\mathbf{e}_z\cos\varphi\,.$$

Ennek alapján

$$\boldsymbol{Q}=(\mathbf{e}_x\cos\varphi-\mathbf{e}_z\sin\varphi)\circ\mathbf{e}_x+$$
$$+\mathbf{e}_y\circ\mathbf{e}_y+(\mathbf{e}_x\sin\varphi+\mathbf{e}_z\cos\varphi)\circ\mathbf{e}_z$$

a tenzor diádikus alakja. A tenzor mátrixának felírásakor azt kell figyelembe venni, hogy annak oszlopait az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ képvektorok alkotják:



1.9. ábra.

$$\underline{\mathbf{Q}}=\left[\begin{array}{c|c|c}\underline{\mathbf{a}} & \underline{\mathbf{b}} & \underline{\mathbf{c}}\end{array}\right]=\begin{bmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{bmatrix}.$$

A tetszőleges $\mathbf{r}=x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y+z\mathbf{e}_z$ vektort a tenzor az

$$\underline{\mathbf{R}}=\underline{\mathbf{Q}}\,\underline{\mathbf{r}}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\varphi+z\sin\varphi\\ y\\ -x\sin\varphi+z\cos\varphi\end{bmatrix},$$

vagyis az

$$\mathbf{R}=(x\cos\varphi+z\sin\varphi)\,\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y+(-x\sin\varphi+z\cos\varphi)\,\mathbf{e}_z$$

vektorba forgatja. A tenzor szimmetrikus és ferdeszimmetrikus része:

$$\underline{\mathbf{Q}}_{sz}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \cos\varphi\end{bmatrix},\qquad \underline{\mathbf{Q}}_{asz}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \sin\varphi\\ 0 & 0 & 0\\ -\sin\varphi & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Kis szögekre $\cos\varphi\approx 1$ és $\sin\varphi\approx\varphi$. Ezeknek a képleteknek felhasználásával linearizálhatók kis szögekkel történő forgatásra a fenti tenzorok:

$$\underline{\mathbf{Q}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & \varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -\varphi & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \underline{\mathbf{Q}}_{sz}=\underline{\mathbf{E}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \underline{\mathbf{Q}}_{asz}=\underline{\boldsymbol{\Psi}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \varphi\\ 0 & 0 & 0\\ -\varphi & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Az utóbbi képletekkel kis szöggel történő forgatásra

$$\mathbf{R}=\boldsymbol{Q}\cdot\mathbf{r}=(\boldsymbol{Q}_{sz}+\boldsymbol{Q}_{asz})\cdot\mathbf{r}=\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{r}+\boldsymbol{\Psi}\cdot\mathbf{r}=\mathbf{r}+(\varphi\mathbf{e}_y)\times\mathbf{r}$$

a képvektor, ahol azt is kihasználtuk, hogy a tenzor ferdeszimmetrikus részéhez tartozó leképezés az (1.45) képlet szerint a vektorinvariánssal – ez most $\varphi \mathbf{e}_y = \varphi_y \mathbf{e}_y$ – való szorzással képezhető. Az eredményt általánosítva azt mondhatjuk, hogy a

$$\boldsymbol{\varphi} = \varphi_x \mathbf{e}_x + \varphi_y \mathbf{e}_y + \varphi_z \mathbf{e}_z; \qquad |\boldsymbol{\varphi}| \ll 1$$

vektor által leírt forgatás, amely az $\mathbf{r}$ rádiuszvektorokat az

$$\mathbf{e} = \frac{\boldsymbol{\varphi}}{|\boldsymbol{\varphi}|}; \qquad |\boldsymbol{\varphi}| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2}$$

tengely körül a $\varphi = |\boldsymbol{\varphi}|$ kis szöggel fordítja el a

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{Q} \cdot \mathbf{r} = (\boldsymbol{Q}_{sz} + \boldsymbol{Q}_{asz}) \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{E} \cdot \mathbf{r} + \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{r} + \varphi \times \mathbf{r} \tag{1.87}$$

képlettel számítható, ahol

$$\underline{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} 1 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 1 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{E}} + \underline{\mathbf{\Psi}}\,. \tag{1.88}$$

Kiolvasható az (1.87) képletből, hogy a rádiuszvektor végpontjának

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\Psi} \cdot \mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{r} \tag{1.89}$$

az elmozdulásvektora a forgatásból, hiszen az előtte álló tag maga a rádiuszvektor így a mozgást csak az utána álló, azaz a fenti tag adhatja meg. A képletben álló $\boldsymbol{\Psi}$ tenzor a forgató tenzor kis forgásra.

1.4. Határozza meg a

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 85 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 \\ 25 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

mátrixával adott $\boldsymbol{W}$ tenzor sajátértékeit és főirányait.

Vegyük észre, hogy az y irány főirány hiszen $w_{xy} = w_{yz} = 0$. A vonatkozó sajátértéket jelölje λ_a. Ez nyilvánvalóan a második oszlop diagonális eleme: $\lambda_a = -10$. A

$$P_3(\lambda) = -\det(\underline{\mathbf{W}} - \lambda \underline{\mathbf{E}}) = -\begin{vmatrix} w_{xx} - \lambda & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy} - \lambda & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz} - \lambda \end{vmatrix} =$$
$$= \lambda^3 - W_I \lambda^2 + W_{II} \lambda - W_{III} = (\lambda - \lambda_a)(\lambda - \lambda_b)(\lambda - \lambda_c) = 0$$

karakterisztikus egyenletből – mivel nem ismerjük a karakterisztikus értékek sorrendjét azokat egyszerűen λ_a, λ_b és λ_c jelöli – helyettesítések után a

$$P_3(\lambda) = \begin{vmatrix} 85 - \lambda & 0 & 25 \\ 0 & -10 - \lambda & 0 \\ 25 & 0 & -35 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 40\lambda^2 - 4100\lambda - 36\,000 = 0$$

eredmény következik, azaz

$$W_I = \lambda_a + \lambda_b + \lambda_c = 40\,, \qquad W_{II} = -4100\,, \qquad W_{III} = \lambda_a \lambda_b \lambda_c = 36\,000\,,$$

ahol a főtengelyek KR-ét véve alapul és a későbbiek kedvéért kiírtuk képletszerűen is a W_I és W_{III} skalárinvariánsokat. Ha $\lambda \neq \lambda_a$ akkor átoszthatjuk a $P_3(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenletet a $\lambda - \lambda_a$ gyöktényezővel:

$$\frac{P_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_a} = (\lambda - \lambda_b)(\lambda - \lambda_c) = \lambda^2 - (\lambda_b + \lambda_c)\lambda + \lambda_b \lambda_c = 0\,,$$

ahol

$$\lambda_b + \lambda_c = W_I - \lambda_a = 50 \qquad \text{és} \qquad \lambda_b \lambda_c = \frac{W_{III}}{\lambda_a} = -36\,00\,.$$

Következésképp a

$$\lambda^2 - (W_I - \lambda_a)\lambda + \frac{W_{III}}{\lambda_a} = \lambda^2 - 50\lambda - 36\,00 = 0$$

egyenlet megoldása megadja a két hiányzó sajátértéket: $\lambda_b = 90$, $\lambda_c = -40$. Nagyság szerint rendezve

$$\lambda_1 = \lambda_b = 90\,, \qquad \lambda_2 = \lambda_a = -10\,, \qquad \lambda_3 = \lambda_c = -40$$

és mostmár az is nyilvánvaló, hogy $\mathbf{e}_y = \mathbf{n}_2$. Az $\mathbf{n}_1$ meghatározásához az

$$\begin{bmatrix} w_{xx}-\lambda_1 & w_{xy} & w_{xz} \\ w_{yx} & w_{yy}-\lambda_1 & w_{yz} \\ w_{zx} & w_{zy} & w_{zz}-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 85-\lambda_1 & 0 & 25 \\ 0 & -10-\lambda_1 & 0 \\ 25 & 0 & -35-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

azaz a

$$\begin{aligned} -5n_{x1}+25n_{z1} &= 0\,, \\ -100n_{y1} &= 0\,, \\ 25n_{x1}-125n_{z1} &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Mivel $\Delta_{zz} = -5\times(-100) \neq 0$ választható az első két egyenlet ahonnan, amint az várható is – ortogonalitás – , $n_{y1} = 0$ és

$$n_{x1} = 5n_{z1}\,.$$

Ennek az egyenletnek egy megoldását a már normált

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}(5\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)$$

vektor adja. Az $\mathbf{n}_3$ a sajátvektorok ortogonalítását és azt figyelembevéve számítható hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ jobbsodratú bázis:

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}(5\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)\times\mathbf{e}_y = \frac{1}{\sqrt{26}}(-\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z)\,.$$

Nem nehéz ellenőrizni, hogy ezekkel a megoldásokkal valóban teljesül az (1.59) egyenlet.

Gyakorlatok

1.1. Határozza meg azon tenzorok mátrixait, melyek az xy, xz és yz síkokra tükrözik az $\mathbf{r}$ rádiuszvektort.
1.2. Határozza meg azon tenzorok mátrixait, melyek az xy sík minden $\mathbf{r}$ helyvektorához annak

(a) az origóra vonatkozó szimmetria pontját,
(b) az x tengelyre vonatkozó szimmetria pontját, illetve
(c) 30°-al az óramutató járásával egyező irányba való elforgatottját

rendeli.
1.3. Legyen $\mathbf{n}$; $|\mathbf{n}| = 1$ az origón átmenő S sík normálisa. Mutassa meg, hogy az $\mathbf{r}$ rádiuszvektor S síkba eső $\mathbf{r}_\perp$ összetevője az $\mathbf{r}_\perp = \boldsymbol{W}\cdot\mathbf{r}$ leképezéssel számítható, ahol

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 1-n_xn_x & -n_xn_y & -n_xn_z \\ -n_yn_x & 1-n_yn_y & -n_yn_z \\ -n_zn_x & -n_zn_y & 1-n_zn_z \end{bmatrix}.$$

1.4. Legyen $\mathbf{n}$; $|\mathbf{n}| = 1$ az origón átmenő S sík normálisa. Mutassa meg, hogy az $\mathbf{r}$ rádiuszvektor S síkra vonatkozó $\mathbf{R}$ tükörképe az $\mathbf{R} = \boldsymbol{W}\cdot\mathbf{r}$ leképezéssel számítható, ahol

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 1-2n_xn_x & -2n_xn_y & -2n_xn_z \\ -2n_yn_x & 1-2n_yn_y & -2n_yn_z \\ -2n_zn_x & -2n_zn_y & 1-2n_zn_z \end{bmatrix}.$$

1.5. Határozzuk meg a helyvektorok végpontjának elmozdulását leíró $\boldsymbol{Q}$ tenzort a z tengely körüli φ szöggel történő forgatáskor. Általánosítsa az eredményt az **1.3.** Mintafeladat φ vektora által leírt kis forgás esetére.
1.6. Mutassa meg a karakterisztikus polinom W_I, W_{II} és W_{III} együtthatóit adó (1.63a,b,c) képletek helyességét.
1.7. Mutassa meg, hogy

$$-\frac{d}{d\lambda}\det\left(\underline{\mathbf{W}}-\lambda\underline{\mathbf{E}}\right)\bigg|_{\lambda_k} = \Delta_{xx}(\lambda_k)+\Delta_{yy}(\lambda_k)+\Delta_{zz}(\lambda_k)\,.$$

1.8. Igazolja az előző eredmény felhasználásával, hogy

$$-\frac{d^2}{d\lambda^2}\det\left(\underline{\mathbf{W}}-\lambda\underline{\mathbf{E}}\right)\bigg|_{\lambda_k} = 2\left[(w_{xx}-\lambda_k)+(w_{yy}-\lambda_k)+(w_{zz}-\lambda_k)\right]\,.$$

1.9. Határozza meg a mátrixával adott P pontbeli $\boldsymbol{T}_P$ feszültségi tenzor sajátértékeit és főirányait. Írja fel a tenzor mátrixát a főtengelyek KR-ben.

$$\underline{\mathbf{T}}_P = \begin{bmatrix} 44 & 60 & 0 \\ 60 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \text{[MPa]}$$

(Vegye figyelembe, hogy a z irány ismert főirány.)

1.10. Határozza meg a mátrixával adott $\boldsymbol{W}$ tenzor sajátértékeit és főirányait. Írja fel a tenzor mátrixát a főtengelyek KR-ében.

$$\underline{\mathbf{W}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} .$$

(Vegye figyelembe, hogy $\lambda_1 = 4$ sajátérték.)

1.11. A $\xi\eta\zeta$ KR-t az xyz KR z tengely körül φ_z szöggel pozitív irányba történő elforgatásával kapjuk, azaz $z = \zeta$, és az elforgatás utáni x és y tengelyek alkotják a ξ és η tengelyeket. Írja fel az

$$\underset{(x,y,z)}{\mathbf{e}_\xi} \; , \quad \underset{(x,y,z)}{\mathbf{e}_\eta} \; , \quad \underset{(x,y,z)}{\mathbf{e}_\zeta}$$

egységvektorokat és a két KR közötti transzformáció $\underline{\mathbf{K}}$ illetve $\underline{\mathbf{K}}^T$ mátrixait ha $\varphi_z = 30°$. Legyen $\mathbf{v}$ egy az origón áthaladó anyagi pont sebessége, és legyen adott a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR origójában:

$$\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_x - 3\sqrt{3}\mathbf{e}_y \, [\text{m/s}] \, , \qquad \underset{(x,y,z)}{\underline{\mathbf{T}}_O} = \begin{bmatrix} 300 & 400 & 0 \\ 400 & -300 & 0 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} \text{[MPa]} \, .$$

Határozza meg a sebességvektort és a feszültségi tenzor mátrixát a $\xi\eta\zeta$ KR-ben.

2. FEJEZET

Szilárdságtani alapfogalmak

2.1. Mi a szilárdságtan

2.1.1. A műszaki mechanika tudományának egy részterületét nevezzük szilárdságtannak. Maga a mechanika az anyagi világban lejátszódó folyamatok közül a testek egymáshoz, illetve valamilyen KR-hez viszonyított helyváltoztatásait, a mechanikai mozgásokat (beleértve a később a 2.2.2. és 2.2.3. pontokban értelmezett alakváltozásokat is) és ezek törvényeit vizsgálja. Ebben a tekintetben a mechanika tehát a fizika része. A műszaki mechanika a mechanika törvényeinek a mérnöki feladatok felvetette igényekkel szembesülő megfogalmazása és alkalmazása a gépek és szerkezetek tervezése során az üzemeltetés illetve a rendeltetésszerű felhasználás biztosítása érdekében.

A mechanika a *valóságos testek* helyett, a tapasztalat és megfigyelések alapján *modelleket*, azaz olyan idealizált testeket vezet be és vizsgál (anyagi pont, merev test, tökéletesen hajlékony kötél etc.), amelyek a vizsgált mechanikai mozgás leglényegesebb sajátosságait tükrözik. Mivel a nyugalmi állapot a mechanikai mozgás speciális esete, a testek adott terhelés alatt kialakuló tartós egyensúlyi állapotával – nyugalmi állapot – kapcsolatos feladatok vizsgálata is a mechanika feladata.

Feltételezés szerint minden test vagy *anyagi pontnak* (tömegpontnak), vagy *elemi tömegek* rendszerének tekinthető. Az elemi tömeg olyan testrész, melynek konkrét méretei elhanyagolhatók a tekintett feladatban – ez alatt azt értjük, hogy mechanikai állapota (pl. tömegeloszlása, elmozdulásmezeje, sebességmezeje, a rajta működő külső és belső ER) igen jó közelítéssel leírható a helykoordináták legfeljebb lineáris függvényeivel. Más elnevezéssel beszélünk a test egy pontjának – ehhez kötjük a mechanikai állapot lokális lineáris leírásához szükséges végesszámú paramétert – *elemi környezetéről*, amelyre nézve tehát kielégítő pontosságú a lineáris leírás. Ami az elemi tömegek megválasztását illeti a test bármely pontjának kis környezete elemi tömegnek vehető és a test végtelen sokféle módon, (pl. egymásra merőleges párhuzamos síksorokkal) felosztható egymástól megkülönböztethető elemi tömegek összességére.

A mechanika alapvető feltételezése, hogy a mozgás oka a testek (testrészek, elemi tömegek) egymásra gyakorolt kölcsönhatása. Eltekintve a hőhatásoktól és más fizikai hatásoktól a mechanika ezt a kölcsönhatást az *erő*, illetve az *erőrendszer* (ER) fogalmával írja le. Amint az ismeretes a statikából az erők (ER-ek) megoszolhatnak a vizsgált test (testrész, elemi tömeg) térfogatán illetve felületén. Az első esetben *térfogati*, a második esetben *felületi ER*-ről beszélünk. Megkülönböztetünk még *belső és külső ER-eket (erőket)*, aszerint, hogy azok az éppen vizsgált testek (testrészek, elemi tömegek) között, vagy az éppen vizsgált test (testek) és más nem vizsgált testek között hatnak. A külső ER részben *terhelésekből (terhelő ER)*, részben pedig *támasztó erőkből (támasztó ER)* áll.

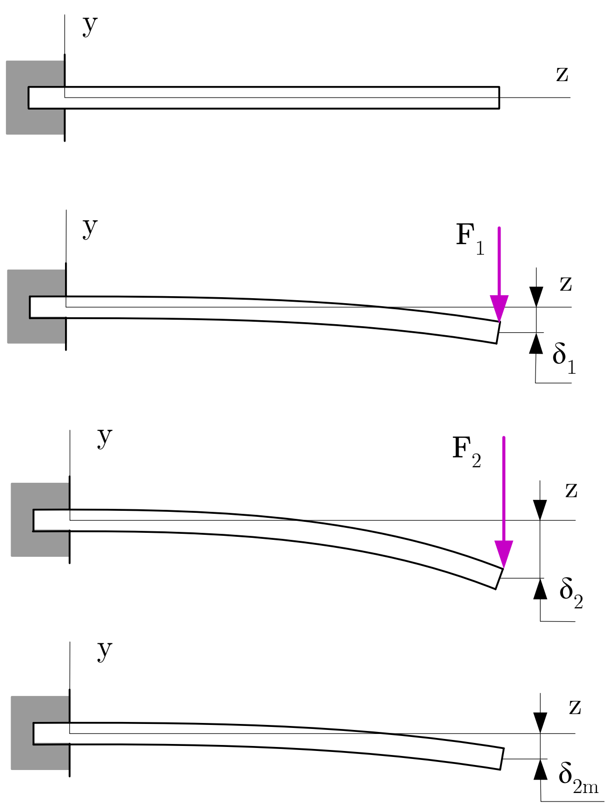
Statikailag határozott megtámasztású rúd, vagy statikailag határozott szerkezetek esetén – a rúd, illetve a szerkezeteket alkotó rudak mindegyikét merev testnek tekintve – meghatározható statikai módszerekkel a teljes külső ER és a szerkezet részei között ható belső ER is. Ha azonban a tekintett rudat, vagy a szerkezetet alkotó egyik rudat gondolatban kettévágjuk és az átmetszéssel kapott felületen keressük a belső ER tényleges megoszlását, akkor a statikai módszerek, és a merev test mint modell elégtelennek bizonyulnak, annak ellenére, hogy mind a belső ER eredőjét mind pedig a tekintett keresztmetszet súlypontjára vett nyomatékát meg tudjuk határozni statikai módszerekkel (igénybevételek, igénybevételi ábrák). Ennek az az oka, hogy a merev test mint modell nem veszi figyelembe a rúd geometriai alakjának külső és belső erők okozta megváltozását.

2.1.2. A *merev test* mint mechanikai modell tehát a valóságos testek olyan mozgásainak leírására alkalmas, amelynél feltételezhető, hogy csak jelentéktelen mértékben változik meg a test alakja a mozgás során és csak a testek egymáshoz vagy egy adott KR-hez viszonyított mozgását vizsgáljuk azaz valójában nincs szerepe annak, hogy megváltozik kis mértékben a test geometriai formája is a mozgást előidéző erők hatására.

Ha a test geometriai formájának megváltozását is figyelembe kell venni és a vizsgált test különböző részei között működő belső ER tényleges megoszlását is meg kívánjuk határozni, akkor a szilárd test az alkalmas mechanikai modell. A *szilárd test* bármely pontjára érvényes, hogy a tekintett pont és a környezetében lévő többi pontok egymáshoz viszonyított, relatív elrendezettsége változatlan marad a pontok, végső soron tehát a test mozgása során. A test, az említett relatív elrendezettség fenntartása mellett, képes megváltoztatni az alakját. (Folyadékok és gázok mozgása, alakjának megváltozása során nem marad meg az anyagi pontok kezdeti relatív elrendezettsége.)

A szilárdságtan mint a műszaki mechanika részterülete, annak egy ága, *a terhelés előtt és a terhelés után tartós nyugalomban lévő szilárd testek kinematikája (a két állapot közötti mozgások és a test alakja megváltozásának leírása) és dinamikája (a belső ER leírása), valamint az anyagszerkezeti tulajdonságok vizsgálata a terhelésre adott válasz tekintetében.*

Szokás a szilárdságtant a mechanikán belül a kontinuummechanika részének is tekinteni. A kontinuummechanikának a folyadékok, gázok és szilárd testek mozgásainak, időben változó állapotainak vizsgálata a feladata.



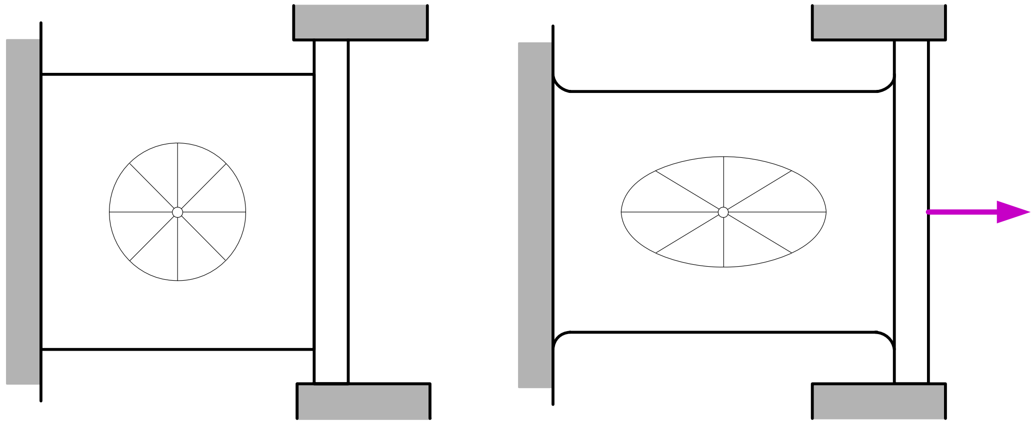
2.1. ábra.

Az anyagszerkezeti tulajdonságok, a test terhelésre adott válasza alapján különbséget teszünk *rugalmas test* és *képlékeny test* között. Ha a test rugalmas, akkor a terhelés megszűnése után maradéktalanul visszanyeri terhelés előtti, kezdeti alakját. A képlékeny viselkedés tartományában már nem igaz ez az állítás, a test nem nyeri vissza terhelés előtti eredeti alakját, hanem maradó elmozdulások és alakváltozások – ezekre a fogalmakra még visszatérünk – jönnek létre.

Az, hogy egy adott test rugalmasan testként vagy képlékeny testként viselkedik függ a terhelés mértékétől. A 2.1. ábra egyik végén befogott, a másik végén koncentrált erővel terhelt rudat szemléltet terhelés előtt, terhelés alatt és terhelés után is. A tényleges mozgásokat felnagyítva ábrázoltuk. Első esetben, ez az eset a rugalmas viselkedést illusztrálja, az $\mathbf{F}_1$ erő a terhelés, és δ_1 az $\mathbf{F}_1$ erő támadáspontjának lehajlása. Az $\mathbf{F}_1$ erő eltávolítása után, feltevés szerint, teljes egészében visszanyeri a rúd az eredeti alakját. Második esetben oly módon növeljük meg a rúd végén ható erőt – a megnövelt erőt $\mathbf{F}_2$ jelöli és $F_2 = |\mathbf{F}_2| > F_1 = |\mathbf{F}_1|$ –, hogy a rúd eljut a képlékeny viselkedés tartományába, és az erő eltávolítása után nem nyeri vissza eredeti egyenes alakját, hanem görbült marad. A görbült alakot az utolsó ábra mutatja. Az erő támadáspontjának δ_{2m} a maradó elmozdulása.

A rugalmas viselkedés lehet *lineárisan vagy nemlineárisan rugalmas.* A fenti példánál maradva lineárisan rugalmas testre

$$\delta_1 = cF_1$$



2.2. ábra.

ahol a c a rugóállandó. A képlet szerint a lehajlás egyenesen arányos az erővel.

Ha a rúd nemlineárisan viselkedik, akkor a

$$\delta_1 = \delta(F_1)$$

összefüggés áll fenn, ahol a $\delta(F_1)$ függvény homogén – $\delta(F_1)|_{F_1=0} = 0$ –, és szigorúan monoton, azaz a nagyobb erőhöz nagyobb lehajlás tartozik.

2.1.3. Amint arra fentebb már rámutattunk a terhelésnek alávetett valóságos testek nem viselkednek merev testként, hanem különböző mértékben, sokszor csak igen kis mértékben, de megváltoztatják geometriai alakjukat a terhelés hatására. A 2.2. ábra gumiból készült hasáb alakú test alakváltozását szemlélteti, ha a hasáb baloldali végét megfogjuk, a jobboldali végét pedig egy vízszintes dugattyúként mozgatható acéllaphoz erősítjük.

A baloldali ábrarészlet a terhelés előtti állapotot mutatja a felénk néző oldalra felkarcolt geometriai alakzatokkal (kör és szimmetrikusan elhelyezkedő átmérők). A jobboldali ábrarészlet a gumituskó képe, ha az acéllapot jobbra mozdítjuk el. Az ábrarészlet jól mutatja a testtel együtt alakváltozást szenvedő geometriai alakzatoknak (kör alakjának, az átmérők hosszának és alakjának, az átmérők és kör érintője közötti szögeknek) a megváltozását.

Vegyük észre, hogy a geometriai alakzat kifejezésen a test anyagi pontjai által alkotott alakzatot értünk – a jelen esetben egy kört és annak különböző átmérőit – de a test geometriai alakzata lehet bármilyen más, a test anyagi pontjai által alkotott geometriai alakzat, így például a test határfelülete, valamilyen belső felület, a test egy tetszőleges résztartománya, de elemi felület és elemi térfogat is. A terhelés során, természetszerűen ezek is megváltoztatják az alakjukat.

A gumituskó példája, a választott anyag sajátosságai miatt, szabad szemmel is érzékelhetővé teszi a geometriai alakzatok megváltozását. Más szerkezeti anyagok, így például acélok esetén ez a jelenség szabad szemmel kevésbé figyelhető meg, de az a terhelés során ugyanúgy bekövetkezik.

A fentiek alapján azt a jelenséget, hogy a terhelés hatására a vizsgálat tárgyát képező szilárd test pontjai egymáshoz képest elmozdulnak és a test anyagi, geometriai alakzatai (anyagi vonalak hosszai, anyagi vonalak által bezárt szögek, térfogatelemek, felületelemek etc.) megváltoznak *alakváltozásnak* nevezzük.

Megjegyezzük hogy ez a megfigyelés lényegében kvalitatív, és nem ad tájékoztatást arról, hogyan írható le alkalmas matematikai eszközökkel kvantitatíve az alakváltozás.

Visszaidézve a testek rugalmas és képlékeny viselkedésével kapcsolatosan mondottakat *rugalmas alakváltozásról* beszélünk, ha a terhelés megszüntetése után a terhelés hatására alakváltozást szenvedő test valamennyi geometriai alakzata, azaz maga a test is, maradéktalanul visszanyeri eredeti, terhelés előtti alakját és *képlékeny alakváltozásról* beszélünk, ha maradó elmozdulások, alakváltozások jönnek létre a terhelés megszűnése után.

Kis elmozdulások esetén a szilárd test pontjainak maximális elmozdulása is nagyságrendekkel kisebb mint a test legkisebb geometriai mérete.

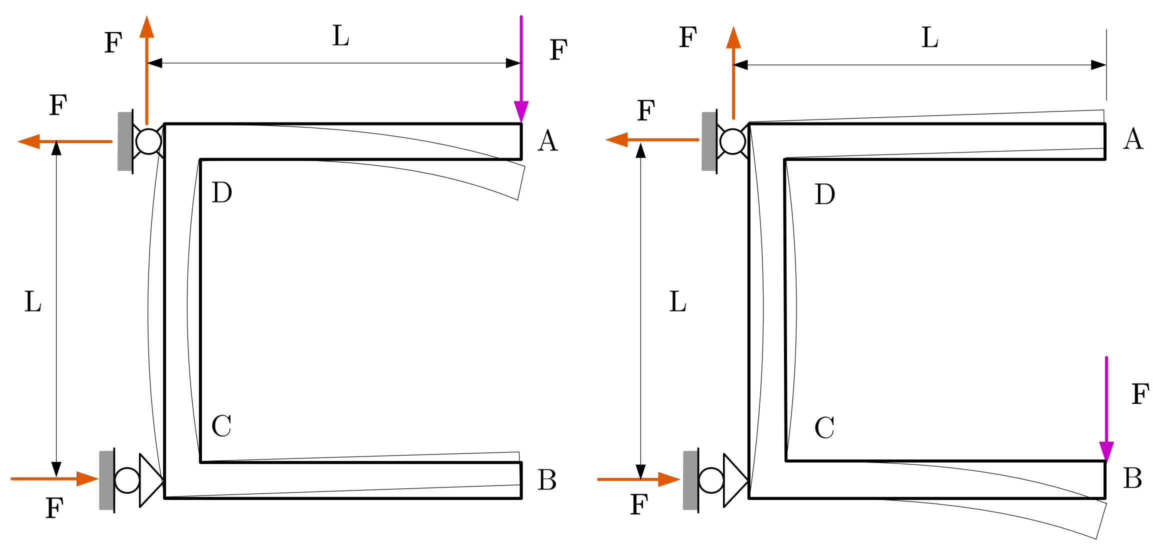
Kis alakváltozások esetén az alakváltozásra jellemző fajlagos mennyiségek – előrebocsátva példaként alakváltozásra jellemző mennyiségre az egységnyi hosszúságú vonalelem hosszváltozását, vagy az azonos anyagi ponton áthaladó vonalelemek közötti szög megváltozását – abszolut értékének maximuma nagyságrendekkel kisebb, mint az egység.

A szilárdságtanban feltételezzük, hogy mind az elmozdulások, mind pedig az alakváltozások kicsik. Hőhatásoktól általában ugyancsak eltekintünk.

2.1.4. A szilárd testek vizsgálatakor az erőrendszerek egyenértékűségét tekintve két eset között kell különbséget tennünk.

Az egyik az ER-ek egyenértékűségének kapcsán bevezetett és alapvető fogalom, amely szerint két ER egyenértékű ha ugyanazt a nyomatéki vektorteret állítják elő. Ha visszaidézzük, hogy az ER-ek kötött vektorrendszerek azt is mondhatjuk – elvonatkoztatva az erő szó fizikai jelentésétől és általánosítva a fogalmat –, hogy két kötött vektorrendszer egyenértékű, ha ugyanazt a nyomatéki vektorteret állítja elő. A nyomatéki vektortérre vonatkoztatott egyenértékűség az utóbbi általánosított formában, alapvető szerepet játszik, nemcsak a statikában, hanem a merev testek kinematikai és dinamikai feladataiban is.

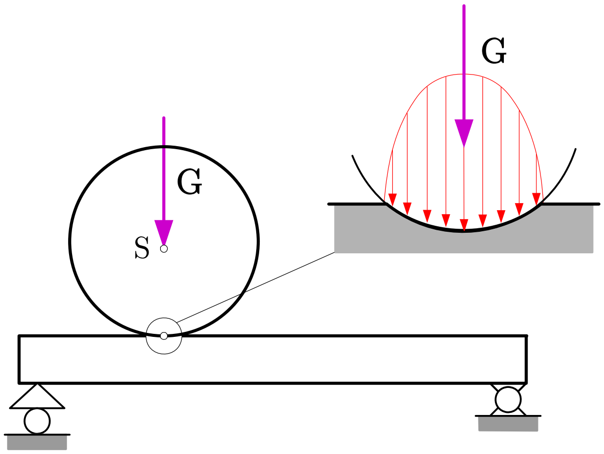
Amint azt a lentiekben példán keresztül is megmutatjuk, a nyomatéki térre vonatkozó egyenértékűség nem jelenti azt, hogy az egyenértékűség szilárdságtani értelemben is fennáll, hiszen két, ugyanazon testen működő, és a nyomatéki tér tekintetében egyenértékű ER lényegesen különböző alakváltozási állapotot hozhat létre. A 2.3. ábra egy villát szemléltet. Az első esetben a villa



2.3. ábra.

A pontjában, a második esetben a villa *B* pontjában működik terhelésként ugyanaz az **F** erő. Mivel ez a két erő közös hatásvonalú a két terhelés statikailag egyenértékű egymással. Az ábra mindkét esetben feltünteti a támasztóerőket – ezek természetesen azonosak – valamint a villa deformálódott alakjait is – ezek vékony vonallal vannak megrajzolva erős nagyítással szemléltetve az elmozdulásokat és alakváltozásokat – amelyek nyilvánvalóan különböznek. Példaként véve az *A* pont az első esetben lefelé, a második esetben felfelé, a *B* pont pedig az első esetben felfelé, a második esetben lefelé mozdul el. Mindez azt jelenti, hogy a két statikailag egyenértékű terhelés szilárdságtanilag nem egyenértékű egymással.

Két, ugyanazon testre ható és egymással statikailag egyenértékű erőrendszert *szilárdságtanilag is egyenértékűnek* nevezünk, ha azok mindegyike – eltekintve az erőrendszerek gyakorlatilag egybeeső terhelési tartományától – lényegében ugyanazokat az alakváltozásokat hozza létre.



2.4. ábra.

A 2.4. ábrán feltüntetett kéttámaszú tartót a ráhelyezett gömb súlya terheli. A tartó és a gömb együttes alakváltozása miatt a két test nem egyetlen pontban, hanem egy kis felületen érintkezik egymással.

Ezen a kis felületen adódik át a tartót terhelő megoszló ER. Az ábra nagyításban mutatja az érintkezési felületet, az azon megoszló ER-t, és az azzal egyenértékű súlyerőt. Az a tapasztalat, hogy az érintkezési felület kis környezetétől eltekintve, közömbös a tartó elmozdulásai és alakváltozásai szempontjából milyen az érintkezési felületen működő ER konkrét megoszlása, hiszen ez az ER egyébként a **G** súlyerővel egyenértékű. Ennek a megfigyelésnek az a fizikai magyarázata, hogy az érintkezési felület legnagyobb mérete is nagyságrendekkel kisebb a tartó egyéb méreteinél. A megfigyelés valójában maga a *Saint Venant elv*, amely általános megfogalmazásban azt mondja ki, hogy a szilárd test alakváltozásakor a test valamely kis felületén (tartományán) ható és a nyomatéki terük tekintetében egyenértékű ER-ek a felület (tartomány) közvetlen környezetétől eltekintve nagyon jó közelítéssel ugyanazokat az alakváltozásokat hozzák létre.

A szilárdságtani egyenértékűségnek a fentiek szerint a Saint Venant elv az alapja.

Valamely vizsgált test terhelő ER-e igen gyakran más szerkezeti elemekről kis felületeken adódik át. Egy-egy kis felületen átadódó megoszló ER éppen a Saint Venant elv alapján helyettesíthető egyetlen erővel, az eredőjével. Ebben az értelemben beszélhetünk tehát a szilárdságtanban a terhelő ER tekintetében, és hasonló indokolással a támasztó ER tekintetében is, koncentrált erőkről és erőpárokról.

2.1.5. A vizsgálat tárgyát képező szilárd test egy kiragadott pontjának kis környezetét *elemi környezetnek* nevezzük – ez a fogalom már szerepelt, itt csak a hozzá kötődő további fogalmak kedvéért ismételjük meg – ha mérete elhanyagolható a test méreteihez képest és ha *mechanikai állapota* (elmozdulásállapota, alakváltozási állapota, feszültségi állapota és energetikai állapota) kellő pontossággal leírható legfeljebb lineáris függvényekkel, azaz a kiragadott ponthoz kötött véges számú paraméter segítségével. A felsorolt állapotok közül az elmozdulásállapot és alakváltozási állapot fogalmai valamelyest tisztázottak, bár a kvantitatív leíráshoz még nagyon sok további ismeretre lesz szükség. A feszültségi állapotot illetően még az alapfogalmak is tisztázásra szorulnak. Az energetikai állapot kapcsán pedig csak annyit jegyzünk meg, hogy a testre ható erőrendszer munkát végez a terhelési folyamat során és ezt a munkamennyiséget a test részben vagy teljes egészében mint alakváltozási energiát tárolja.

Az elemi környezetek mechanikai állapotának szemléltetésére, attól függően, hogy milyen szilárdságtani állapotról van szó, többnyire – amint azt a későbbiekben látni fogjuk – az *elemi triédert, az elemi kockát és az elemi gömböt* használjuk.

A vonatkozó mennyiségek skalárfüggvények (alakváltozási energia), vektorértékű függvények (elmozdulásvektor, vagy merevtestszerű szögelfordulás) vagy tenzorértékű függvények (alakváltozási tenzor, feszültségtenzor) lehetnek. Ezekkel fokozatosan ismerkedünk majd meg.

A vizsgálat tárgyát képező test mechanikai állapotán elemi környezetei mechanikai állapotainak összességét értjük, és adott időpillanatban a helykoordináták folytonos függvényeivel írjuk le.

2.1.6. Felmerül a kérdés, hogy az elemi környezet mechanikai állapotának leírása során a vonatkozó mennyiségeket – skalárokat, vektorokat, tenzorokat – , matematikailag hova, a kiragadott pont kezdeti, terhelésmentes állapotban elfoglalt helyzetéhez, vagy a pont pillanatnyi helyzetéhez kössük. Elvben mindkét választás lehetséges. Ha a vonatkozó mennyiségeket a kiragadott pont kezdeti helyzetéhez kötjük akkor *Lagrange féle leírási módról* beszélünk. A Lagrange féle leírási módnak az az előnye, hogy kezdeti állapotban teljes egészében ismerjük a test geometriáját, hátránya, hogy a vonatkozó mennyiségek fizikailag a pillantnyi helyzethez tartoznak, ezért áthelyezésük a kezdeti állapotba transzformációt igényel. Ha a kiragadott pont pillanatnyi helyzetéhez kötjük ezeket a mennyiségeket, akkor nincs szükség transzformációra, de az eljárás hátránya, hogy nem ismerjük előre a test, következőleg pontjai pillanatnyi helyzetét sem.

A szilárdságtanban kis elmozdulások és alakváltozások esetén – ez feltevés volt – nem indokolt a két helyzet között különbséget tenni, ezért a Lagrange féle leírásmódot választjuk. A 2.3. ábra, összhangban ezzel a feltevéssel, a terheletlen állapotban tünteti fel a villán működő erőket.

A teljesség kedvéért megemlítjük, hogy létezik egy harmadik, úgynevezett Euler féle leírási mód, amikor a mennyiségeket nem a test pontjaihoz, hanem a vonatkoztatási KR pontjaihoz kötjük, így ezek a mennyiségek a KR egy-egy pontján az adott időpillanatban áthaladó részecske mechanikai állapotát írják le. Ez a leírásmód folyadékok és gázok mechanikájában előnyös.

A test pontjaihoz kötött mennyiségek leírásához, összhangban az 1.3.2. szakaszban mondottakkal, a pontokhoz kötött lokális KR-eket használjuk. Az ilyen KR vagy az xyz Descartes féle KR-ben vett lokális KR, ez ugyanaz minden pontban, vagypedig a hengerKR mint görbevonalú KR lokális KR-e.

2.1.7. A szilárdságtan az alábbi fő feladatokkal foglalkozik

– az elemi környezet mechanikai állapotainak, elmozdulásállapotának, alakváltozási állapotának és belső erőrendszerének (feszültségi állapotának) leírására szolgáló, a test anyagi sajátosságaitól független, általános fogalmakkal és módszerekkel;
– a mechanika általános, ugyancsak a testek anyagi sajátosságaitól független törvényeinek szilárd testekre való alkalmazásával;
– az alakváltozási állapot és a belső erőrendszer közötti, a testek anyagszerkezeti felépítésének legfontosabb sajátosságait tükröző egyenletekkel, az anyagtörvényekkel;
– az egyes idealizált anyagokra az előzőeket egységes keretbe foglaló elméletek közül a rugalmasságtan egyes elemeivel és egészen bevezető jelleggel a képlékenységtannal;
– a méretezés és ellenőrzés általános kérdéseivel, és
– konkrét szilárdságtani feladatokkal (szerkezetek és szerkezeti elemek terhelés hatására létrejövő elmozdulásállapotának, alakváltozási állapotának, feszültségi állapotának és energetikai állapotának meghatározásával, és a szerkezetek, szerkezeti elemek méreteinek megválasztásával, méretezésével és ellenőrzésével).

Kontinuumnak tekintjük *a szilárd test*et, ha az folyamatosan tölti ki az euklideszi teret, és a kontinuum mechanikai állapotát leíró állapotfüggvények is folytonosak, azaz figyelmen kívül hagyjuk az anyag finomszerkezetét, krisztallitos, molekuláris felépítettségét.

Homogén a szilárd test, ha a test mechanikai anyagjellemzői a test minden egyes pontjában azonosak.

Homogén a homogén szilárd test valamely állapota, ha az állapotleíró függvények a test minden egyes pontjában azonos értékűek.

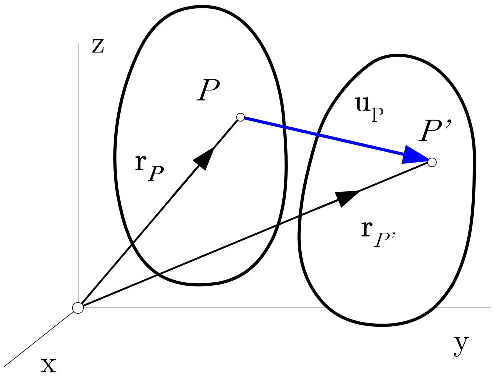
Izotróp a szilárd test, ha nincsenek a test mechanikai viselkedése tekintetében a test anyagszerkezeti felépítettségéből adódóan kitüntetett irányok.

A szilárdságtan fő feladatainak vizsgálata során, az eddigi feltevések mellett (kis elmozdulások, kis alakváltozások, elhanyagolhatók a hőhatások), azt is feltételezzük, hogy a test (kontinuum), homogén és anyagi viselkedését tekintve pedig izotróp.

Ezen túlmenően – konkrét esetekben – a szilárdságtan további, a vizsgált testek geometriai alakjával összefüggő egyszerűsítő feltevésekkel is él (pl. rudak).

2.2. Elmozdulási és alakváltozási állapot

2.2.1. Az elmozdulásmező. A terhelés hatására a szilárd test pontjai elmozdulnak és a test a kezdeti, terhelésmentes nyugalmi állapotból a terhelés teljes felvitele után egy attól kisebb nagyobb mértékben eltérő új nyugalmi állapotba kerül. A 2.5. ábra szemlélteti a B jelű test terhelés előtti és terhelés utáni állapotát is. A test egy kiragadott, mondjuk P pontjának



2.5. ábra.

helyzetét az

$$\mathbf{r}_P = x_P\mathbf{e}_x + y_P\mathbf{e}_y + z_P\mathbf{e}_z$$

helyvektor adja meg a terhelés előtti állapotban. A P pont terhelés utáni helyzetét P', .a vonatkozó helyvektort $\mathbf{r}_{P'}$ a P pont elmozdulásvektorát pedig $\mathbf{u}_P$ jelöli. Leolvasható az ábráról, hogy

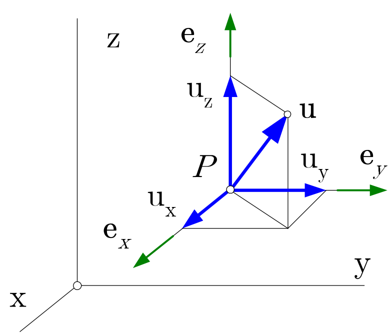
$$\mathbf{r}_{P'} = \mathbf{r}_P + \mathbf{u}_P\,.$$

A futópont helyvektorát, röviden helyvektort, a szokott módon írjuk

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z\,,$$

és akkor használjuk, ha nem akarjuk külön is megnevezni a szóbanforgó pontot a vonatkozó betűjel kiírásával, ami az előző esetben P volt.

Az elmozdulásvektor a test pontjai terhelés előtti helyzetének, azaz a helyvektornak függvénye: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$. A test pontjaihoz tartozó elmozdulásvektorok összességét a *test elmozdulásállapotának* nevezzük. Az elmozdulásokat adó $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvény pedig az *elmozdulási vektormező*, vagy röviden *elmozdulásmező*. Formálisan írva



2.6. ábra.

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{e}_x + u_y\mathbf{e}_y + u_z\mathbf{e}_z$$

az elmozdulásvektor az xyz KR-ben, ahol

$$u_x = u_x(x,y,z)\ , \qquad u_y = u_y(x,y,z) \tag{2.1a}$$

és

$$u_z = u_z(x,y,z) \tag{2.1b}$$

az elmozduláskoordináták. Az elmozduláskoordináták jelölésére, azért hogy adott esetben az indexeket elhagyhassuk, az u, v és w betűket is fogjuk alkalmazni:

$$u = u_x\ , \qquad v = u_y\ , \qquad w = u_z\ . \tag{2.2}$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a korábbiakkal összhangban az $\mathbf{u}$ elmozdulásvektort mindig azon pont lokális KR-ében tekintjük, amely pont elmozdulásvektoráról van szó. Ezt a P pont esetére a 2.6. ábra képszerűen is érzékelteti.

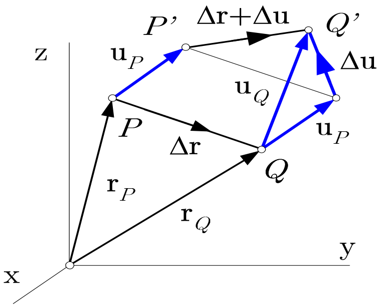
Az elmozdulásvektor szilárdságtanban szokásos mértékegységei a cm, a mm és a μm.

2.2.2. Derivált tenzor. Az $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ elmozdulásvektor illetve az u_x, u_y és u_z elmozduláskoordináták általában bonyolult függvényei a helykoordinátáknak. Célszerű ezért vizsgálat tárgyává tenni egyetlen, mondjuk a tetszőlegesen kiválasztott P pont elemi környezetének a helykoordináták lineáris függvényeivel közelített elmozdulásmezejét.

Ezzel összfüggésben érdemes ehelyütt az alábbiakra felhívni a figyelmet. Amikor az elemi környezet valamilyen szilárdságtani állapotát grafikusan szemléltetjük, akkor a tekintett állapottól függően, vagy az egységnyi oldalélű elemi triédert, vagy az egységnyi sugarú elemi gömböt, vagypedig az elemi kockát használjuk fel a szemléltetésre. A hosszegység mértékét általában nem nevezzük meg, de mindenesetre akkorának kell gondolnunk hogy a lineáris leírás jogos legyen. Ez általában azt jelenti, hogy a vizsgálat tárgyát képező szerkezeti elem méreteitől és az egyéb körülményektől is függően igen kicsinek, pl mm, vagy még kisebb mértékűnek kell elképzelnünk. Következőleg az elemi környezet szemléltetésével kapcsolatos ábrák a valóságos méretek erős nagyításával vannak megrajzolva.

Jelölésbeli megállapodásként, és összhangban az eddigiekkel is, lerögzítjük ehelyütt, hogy valamely fizikai mennyiség – skalár, vektor, tenzor illetve a vonatkozó mátrixok – adott pontbeli értékét vagy úgy írjuk, hogy a pont betűjelét jobboldali alsó indexként nagybetűvel szedjük, vagypedig, ha valamilyen oknál fogva – pl. a jobb áttekinthetőség miatt – előnyösebb, akkor a matematikából ismert módon a pont betűjelét, nagybetűvel szedve, a tekintett változót követő rövid függőleges egyenesszakasz jobboldali alsó indexként szerepeltetjük. Példaként véve $\mathbf{u}_P$ a P pont elmozdulásvektora, az $u_x|_P = u_{xP}$ pedig az x irányú elmozduláskoordináta a P pontban – az utóbbi esetben mindkét jelölést kiírtuk a szemléltetés kedvéért. Ezen túlmenően, ha világos a szövegösszefüggésből, hogy valamilyen mennyiséget (pl. egy tenzort, vagy a tenzort meghatározó képvektorokat) eleve a futópontnak vett P-ben tekintünk, akkor elhagyjuk a P indexet.

Legyen a Q pont a P pont elemi környezetében fekvő, egyébként tetszőleges pont, $P \neq = Q$. Legyen továbbá $\Delta\mathbf{r}$ a Q pont P pontra vonatkoztatott helyvektora. A részletek a 2.7. ábrán láthatók, amely a vonatkozó helyvektorokat, a két pont $\mathbf{u}_P$ és $\mathbf{u}_Q$ elmozdulásvektorát, valamint az elmozdulásvektorok $\Delta\mathbf{u}$ különbségét is szemlélteti. A $\Delta\mathbf{u}$ különbségvektor a *relatív elmozdulásvektor*. Leolvasható az ábráról, hogy



2.7. ábra.

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P = \\ = \underbrace{(x_Q - x_P)}_{\Delta x}\mathbf{e}_x + \underbrace{(y_Q - y_P)}_{\Delta y}\mathbf{e}_y + \underbrace{(z_Q - z_P)}_{\Delta z}\mathbf{e}_z\,. \tag{2.3}$$

A kívánt lineáris közelítés elérése érdekében Taylor sorba fejtjük az u_x, u_y és u_z elmozduláskoordinátákat és csak a sorfejtés lineáris részét tartjuk meg. Ebben az esetben jó közelítéssel fennáll, hogy

$$\begin{aligned} u_x|_Q &\simeq u_x|_P + \left.\frac{\partial u_x}{\partial x}\right|_P \Delta x + \left.\frac{\partial u_x}{\partial y}\right|_P \Delta y + \left.\frac{\partial u_x}{\partial z}\right|_P \Delta z\,,\\ u_y|_Q &\simeq u_y|_P + \left.\frac{\partial u_y}{\partial x}\right|_P \Delta x + \left.\frac{\partial u_y}{\partial y}\right|_P \Delta y + \left.\frac{\partial u_y}{\partial z}\right|_P \Delta z\,,\\ u_z|_Q &\simeq u_z|_P + \left.\frac{\partial u_z}{\partial x}\right|_P \Delta x + \left.\frac{\partial u_z}{\partial y}\right|_P \Delta y + \left.\frac{\partial u_z}{\partial z}\right|_P \Delta z\,, \end{aligned} \tag{2.4}$$

ha az alapfeltevésünk szerint a Q valóban a P pont elemi környezetében fekszik. Az elmozdulásvektor és a Q pont P pontra vonatkoztatott helyvektora

$$\underline{\mathbf{u}}^T = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \Delta\underline{\mathbf{r}}^T = \begin{bmatrix} \Delta x & \Delta y & \Delta z \end{bmatrix}$$

mátrixainak felhasználásával

$$\underline{\mathbf{u}}_Q \simeq \underline{\mathbf{u}}_P + \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial x}\right|_P & \left.\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial y}\right|_P & \left.\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z}\right|_P \end{bmatrix} \Delta\underline{\mathbf{r}} \tag{2.5}$$

a (2.4) egyenlet alakja. Innen

$$\Delta\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{u}}_Q - \underline{\mathbf{u}}_P \simeq \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial x}\right|_P & \left.\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial y}\right|_P & \left.\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z}\right|_P \end{bmatrix} \Delta\underline{\mathbf{r}} \tag{2.6}$$

a relatív elmozdulásvektor közelítése. Jól látszik az utóbbi egyenletből, hogy a relatív elmozdulásvektor homogén lineáris függvénye a $\Delta\underline{\mathbf{r}}$-nek.

Érdemes a továbbiak kedvéért bevezetni a

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial x} = \underline{\mathbf{u}}_x = \begin{bmatrix} u_{xx} \\ u_{yx} \\ u_{zx} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial y} = \underline{\mathbf{u}}_y = \begin{bmatrix} u_{xy} \\ u_{yy} \\ u_{zy} \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial z} = \underline{\mathbf{u}}_z = \begin{bmatrix} u_{xz} \\ u_{yz} \\ u_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

jelöléseket, mivel $\underline{\mathbf{u}}_x|_P$, $\underline{\mathbf{u}}_y\big|_P$ és $\underline{\mathbf{u}}_z|_P$ rendre a $\Delta\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{e}}_x$, $\Delta\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{e}}_y$ és $\Delta\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{e}}_z$ egységvektorok relatív elmozdulása. Kiolvasható a fenti egyenletekből az is, hogy

$$\boxed{u_{mn} = \frac{\partial u_m}{\partial n}\,. \qquad\qquad m, n = x, y, z} \tag{2.8}$$

A bevezetett (2.7) jelölésekkel a Q pont elmozdulását adó (2.6) képlet az

$$\underline{\mathbf{u}}_Q \simeq \underline{\mathbf{u}}_P + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_x & \underline{\mathbf{u}}_y & \underline{\mathbf{u}}_z \end{bmatrix}\Big|_P \Delta\underline{\mathbf{r}}}_{\text{relatív elmozdulás}} \tag{2.9}$$

alakban írható fel. Az utóbbi képlet alapján az

$$\underset{(3\times 3)}{\underline{\mathbf{U}}} = \left[\ \underline{\mathbf{u}}_x \quad \underline{\mathbf{u}}_y \quad \underline{\mathbf{u}}_z\ \right] = \begin{bmatrix} u_{xx} & u_{xy} & u_{xz} \\ u_{yx} & u_{yy} & u_{yz} \\ u_{zx} & u_{zy} & u_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

mátrixot az $\boldsymbol{U}$ *derivált tenzor mátrixának* nevezzük. Vegyük észre, hogy a fenti egyenlet, együtt az $\underline{\mathbf{u}}_x$, $\underline{\mathbf{u}}_y$ és $\underline{\mathbf{u}}_z$ vagy ami ugyanaz az u_{mn} számításával kapcsolatos (2.7) illetve (2.8) képletekkel, a szilárd test bármely pontjában megadja az $\underline{\mathbf{U}}$ mátrixot, ha az elmozdulásvektor a helykoordináták differenciálható függvénye, ezt pedig feltételezzük. A tenzor szó használatát az indokolja, hogy a relatív elmozdulásvektor a test bármely P pontja kis környezetében homogén lineáris függvénye $\underline{\mathbf{U}}_P$ révén a $\Delta\underline{\mathbf{r}}$-nek, a derivált jelző pedig az $\underline{\mathbf{u}}_x$, $\underline{\mathbf{u}}_y$ és $\underline{\mathbf{u}}_z$ képzése során végzett deriválásokra utal. Az $\underline{\mathbf{U}}_P$ helyettesítésével átírható az $\underline{\mathbf{u}}_Q$-t adó (2.10) egyenlet:

$$\boxed{\underline{\mathbf{u}}_Q \simeq \underline{\mathbf{u}}_P + \underline{\mathbf{U}}_P\,\Delta\underline{\mathbf{r}}\,.} \tag{2.11}$$

Vektoriális jelölésre térve át és kihasználva, hogy az $\mathbf{u}_x|_P$, $\mathbf{u}_y|_P$ és $\mathbf{u}_z|_P$ relatív elmozdulások az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorok képei a relatív elmozdulásvektort adó leképezésében (lásd a (2.9) összefüggést), majd figyelembe véve e képvektorok (2.7) előállítását és a ∇ differenciáloperátor

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{2.12}$$

értelmezését írható, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_Q &\simeq \mathbf{u}_P + \boldsymbol{U}_P\cdot\Delta\underline{\mathbf{r}} = \\ &= \mathbf{u}_P + \left(\mathbf{u}_x\circ\mathbf{e}_x + \mathbf{u}_y\circ\mathbf{e}_y + \mathbf{u}_z\circ\mathbf{e}_z\right)\Big|_P\cdot\Delta\mathbf{r} = \\ &= \mathbf{u}_P + \left(\mathbf{u}\circ\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \mathbf{u}\circ\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \mathbf{u}\circ\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)\Bigg|_P\cdot\Delta\mathbf{r} = \\ &= \mathbf{u}_P + \left[\mathbf{u}\circ\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)\right]\Bigg|_P\cdot\Delta\mathbf{r} \end{aligned}$$

azaz, hogy

$$\boxed{\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + (\mathbf{u}\circ\nabla)|_P\cdot\Delta\mathbf{r} = \mathbf{u}_P + \underbrace{\boldsymbol{U}_P\cdot\Delta\mathbf{r}}_{\text{relatív elmozdulás}}\,,} \tag{2.13}$$

ahol

$$\boxed{\boldsymbol{U} = \mathbf{u}\circ\nabla} \tag{2.14}$$

a derivált tenzor diádikus előállítása.

A P pont *elemi környezetének elmozdulásállapotán* az elemi környezet alkotó pontok elmozdulásvektorainak összességét értjük.

Az eddigiekből, különös tekintettel az (2.11) és (2.14) képletekre összefoglalóan az alábbiakat mondhatjuk:

A test P pontjában a lokális KR $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorainak végpontjaihoz tartozó $\mathbf{u}_x|_P$, $\mathbf{u}_y|_P$ és $\mathbf{u}_z|_P$ relatív elmozdulásvektorok – ezek egymástól független kilenc skaláris koordinátája, illetve egyetlen mennyiség, azaz a P pontban vett $\boldsymbol{U}_P$ derivált tenzor – egyértelműen meghatározza a P pont kis környezetében fekvő, egyébként tetszőleges Q pont elmozdulásvektorát, következőleg a P pont elemi környezetének elmozdulásállapotát.

Tovább alakítható a (2.13) összefüggés, ha az $\boldsymbol{U}$ tenzorra alkalmazzuk a felbontási tételt. Az (1.42), (1.43) és (1.44) képletekkel adott felbontási tétel alapján – $\boldsymbol{U}$-t gondolva $\boldsymbol{W}$ helyére és visszaidézve, lásd az (1.34)-et, hogy a tenzor transzponáltját a diádikus szorzatok tényezőinek felcserélésével kapjuk – írható, hogy

$$\boxed{\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_{sz} + \boldsymbol{U}_{asz}\,,} \tag{2.15}$$

ahol az

$$\boxed{\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_{sz}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}+\boldsymbol{U}^T\right)=\frac{1}{2}(\mathbf{u}\circ\nabla+\nabla\circ\mathbf{u})} \tag{2.16}$$

és a

$$\boxed{\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}=\boldsymbol{U}_{asz}=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{U}-\boldsymbol{U}^T\right)=\frac{1}{2}(\mathbf{u}\circ\nabla-\nabla\circ\mathbf{u})} \tag{2.17}$$

képletek egyben az $\boldsymbol{U}$ tenzor $\boldsymbol{A}$-val jelölt szimmetrikus, és $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}$-vel jelölt ferdeszimmetrikus részeit értelmezik. A bevezetett jelölésekkel

$$\boxed{\boldsymbol{U}=\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}+\boldsymbol{A}} \tag{2.18}$$

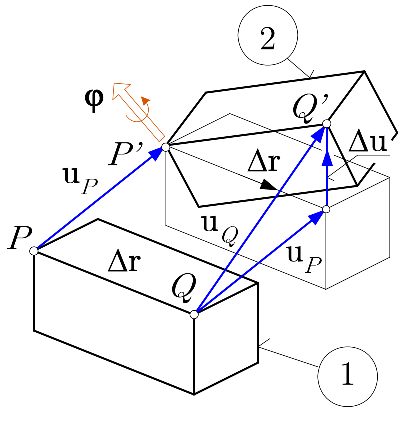
a (2.16) felbontás alakja.

Visszatérve a (2.13) összefüggéshez a fenti képletek helyettesítésével

$$\mathbf{u}_Q\simeq\mathbf{u}_P+\boldsymbol{U}_P\cdot\Delta\mathbf{r}=\mathbf{u}_P+(\boldsymbol{U}_{sz}|_P+\boldsymbol{U}_{asz}|_P)\cdot\Delta\mathbf{r}=\mathbf{u}_P+\boldsymbol{A}_P\cdot\Delta\mathbf{r}+\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_P\cdot\Delta\mathbf{r} \tag{2.19}$$

a P pont kis környezetében fekvő Q pont elmozdulása.

2.2.3. Forgató tenzor, alakváltozási tenzor. A kapott eredmények geometriai értelmezése előtt vizsgáljuk meg azt a kérdést, hogy miként juthat el a 2.8. ábrán vázolt és merevnek tekintett téglatest – az ábra jelölései szándékoltan azonosak a 2.7. ábra jelöléseivel – a kezdeti és 1-el jelölt helyzetéből az új és 2-vel jelölt helyzetbe. A téglatest tényleges mozgása gondolatban két részre bontható. A téglatest először *eltolódik*, oly módon, hogy a P pont a P' helyzetbe kerül. Az eltolódás során a téglatest oldalélei önmagukkal párhuzamosan mozognak, azaz a téglatest oldallapjai megtartják orientációjukat. Ezt a közbülső állapotot vékony vonallal rajzolt ábrarészlet szemlélteti. Az eltolódást követően a téglatest *elfordul* a P' pont körül, oly módon, hogy minden oldalél a 2 jelű helyzetbe kerül. Mivel a téglatest merev van olyan forgás, amely ezt biztosítja. Nyilvánvaló, hogy a leírt mozgás során a téglatest nem változtatja meg az alakját, azaz minden oldaléle, az oldalélek közötti szögek etc. változatlanok maradnak. Az ilyen mozgást *merevtestszerű mozgásnak* nevezzük az előzőekben felsorolt sajátosságok miatt. A merevtestszerű mozgás tehát egy eltolódás és egy forgás kombinációja. Jelölje a forgást $\boldsymbol{\varphi}$, és tegyük fel, hogy kis forgásról van szó azaz $|\boldsymbol{\varphi}|\ll 1$. (Az ábra, a jobb szemléltetés kedvéért, véges forgásra szemlélteti a viszonyokat.) Az 1.4. Mintafeladat megadja az $\mathbf{r}$ rádiuszvektor végpontjának elmozdulását a kis $\boldsymbol{\varphi}$ forgás hatására. A téglalapalakú hasáb esetén az 1.4. Mintafeladattal való egybevetés alapján, az origónak a P' pont, a rádiuszvektornak $\Delta\mathbf{r}$, a rádiuszvektor végpontja $\mathbf{u}$ elmozdulásának pedig $\Delta\mathbf{u}$ felel meg. Ezekkel az adatokkal az (1.89) képletből



2.8. ábra.

$$\Delta\mathbf{u}=\boldsymbol{\varphi}\times\Delta\mathbf{r}=\boldsymbol{\Psi}\times\Delta\mathbf{r}\,,$$

ahol $\boldsymbol{\Psi}$ a forgatás tenzora (vagy forgató tenzor), amely ferdeszimmetrikus, hiszen az idézett mintafeladat szerint

$$\underline{\boldsymbol{\Psi}}=\begin{bmatrix}0&-\varphi_z&\varphi_y\\\varphi_z&0&-\varphi_x\\-\varphi_y&\varphi_x&0\end{bmatrix} \tag{2.20}$$

a mátrixa. A téglatest Q pontjának elmozdulásvektorát mostmár úgy kapjuk meg, hogy a fenti értékhez hozzávesszük a merevtestszerű eltolódást is:

$$\mathbf{u}_Q=\mathbf{u}_P+\boldsymbol{\varphi}\times\Delta\mathbf{r}=\mathbf{u}_P+\boldsymbol{\Psi}\cdot\Delta\mathbf{r}\,. \tag{2.21}$$

Összehasonlítva ezek után a *szilárd test* P pontja elemi környezetében lévő Q pont

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_P \cdot \Delta\mathbf{r} + \boldsymbol{A}_P \cdot \Delta\mathbf{r}$$

elmozdulásvektorát – v.ö.: (2.19), valamint a *merev téglatest* Q pontjának

$$\mathbf{u}_Q = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Psi} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

elmozdulásvektorát azonnal, látszik, hogy

- a ferdeszimmetrikus $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_P$ tenzornak az ugyancsak ferdeszimmetrikus $\boldsymbol{\Psi}$ tenzor felel meg, és azt is érdemes észrevenni, hogy
- az $\boldsymbol{A}_P$ tenzornak pedig nincs megfelelője a merev hasáb esetén.

A geometria nyelvére lefordítva ez azt jelenti, hogy a P pont elemi környezetében lévő Q pont elmozdulása két részből áll. Az első tag az elemi környezet minden Q pontjára azonos $\mathbf{u}_P$, azaz merevtestszerű eltolódás. A második tag azon része, amely az $\boldsymbol{U}_P$ ferdeszimmetrikus $\widetilde{\boldsymbol{\Psi}}_P$ részéből adódik, nem más, figyelemmel a ferdeszimmetrikus $\boldsymbol{\Psi}$ szerepére a téglatest mozgásában, mint az elemi környezet forgása, a két mozgás együttese pedig az elemi környezet merevtestszerű mozgása, amely tehát változatlanul hagyja az elemi környezet alakját.

Ez egyben azt is jelenti, hogy az $\boldsymbol{U}_P$ tenzor $\boldsymbol{A}_P$-vel jelölt szimmetrikus része *írja le a P pont elemi környezetének alakváltozásait.*

A kapott geometriai kép alapján – megismételve az $\boldsymbol{U}$ felbontásából kapott (2.16) és (2.17) képletek elmozdulásvektort tartalmazó részeit és elhagyva az azonos geometriai jelentés miatt a megkülönböztetést eddig segítő hullámvonalat az $\boldsymbol{U}$ ferdeszimmetrikus része esetén – a (2.19) egyenletben megjelenő

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\circ\nabla + \nabla\circ\mathbf{u})} \tag{2.22}$$

és

$$\boxed{\boldsymbol{\Psi} = \widetilde{\boldsymbol{\Psi}} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}\circ\nabla - \nabla\circ\mathbf{u})} \tag{2.23}$$

tenzorokat rendre *alakváltozási tenzornak,* illetve *forgató tenzornak* nevezzük.

Visszatérve a forgató tenzor geometriai szerepéhez, a teljesség kedvéért az alábbiakban formálisan is megmutatjuk, hogy a forgató tenzorhoz tartozó leképezés valóban a P pont elemi környezetének merevtestszerű forgása. A (2.23) helyettesítése után tovább alakítható a (2.19) egyenlet kérdéses utolsó tagja:

$$\boldsymbol{\Psi}_P \cdot \Delta\mathbf{r} = \frac{1}{2}\,(\mathbf{u}\circ\nabla - \nabla\circ\mathbf{u})|_P \cdot \Delta\mathbf{r} = -\frac{1}{2}\left[\nabla\left(\overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\cdot\Delta\mathbf{r}\right) - \overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\,(\nabla\cdot\Delta\mathbf{r})\right]\Bigg|_P =$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\,(\mathbf{u}\times\nabla)|}_{\boldsymbol{\varphi}_P}{}_P \times \Delta\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}_P \times \Delta\mathbf{r}\,, \tag{2.24}$$

ahol kihasználtuk, hogy a kifejtési tétel szerint $(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{a} = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$, amelyben most rendre $\mathbf{a} = \mathbf{u}$, $\mathbf{b} = \nabla$ és $\mathbf{c} = \Delta\mathbf{r}$. A lefelé mutató nyíl azt a mennyiséget jelöli a képletben, amelyre a ∇ operátor működik. Visszaidézve ismét az 1.4. Mintapéldát azonnal kapjuk, hogy $\boldsymbol{\varphi}_P$ a merevtestszerű forgás a P pontban. Kiolvasható a képletből, felhasználva a vektorinvariáns értelmezését, hogy a

$$\boxed{\boldsymbol{\varphi} = -\frac{1}{2}\,(\mathbf{u}\times\nabla)} \tag{2.25}$$

merevtestszerű forgásvektor az $\mathbf{u}\circ\nabla$ derivált tenzor vektorinvariánsa, a (2.24) összefüggés alapján írható

$$\boldsymbol{\Psi}_P \cdot \Delta\mathbf{r} = \boldsymbol{\varphi}_P \times \Delta\mathbf{r}$$

egyenlőség pedig nem más, mint az (1.46) képlet analogonja (annak alapján közvetlenül is felírható).

Összegezve az eddig mondottakat a szilárd test P pontjának elemi környezetében lévő, egyébként tetszőleges Q pont elmozdulása a geometriai tartalomra vonatkozó rövid utalásokkal a (2.19) képlet alapján

$$\boxed{\mathbf{u}_Q \simeq \underbrace{\mathbf{u}_P}_{\text{eltolódás}} + \underbrace{\boldsymbol{U}_P\cdot\Delta\mathbf{r}}_{\text{relatív elmozdulás}} = \underbrace{\underbrace{\mathbf{u}_P}_{\text{eltolódás}} + \underbrace{\boldsymbol{\Psi}_P\cdot\Delta\mathbf{r}}_{\text{forgás}}}_{\text{merevtestszerű mozgás}} + \underbrace{\boldsymbol{A}_P\cdot\Delta\mathbf{r}}_{\text{alakváltozás}}} \tag{2.26}$$

alakú.

2.2.4. Jelölések és számítási képletek. Következik a (2.19) egyenletből, hogy

$$\Delta\mathbf{u} = \mathbf{u}_Q - \mathbf{u}_P \simeq \boldsymbol{\Psi}_P\cdot\Delta\mathbf{r} + \boldsymbol{A}_P\cdot\Delta\mathbf{r} \tag{2.27}$$

a relatív elmozdulásvektor felbontása. A jobboldal első összeadandója a forgásból, a második összeadandó pedig a tiszta alakváltozásból származó része a relatív elmozdulásvektornak. Jelölje rendre

$$\boldsymbol{\psi}_x = \psi_{yx}\mathbf{e}_y + \psi_{zx}\mathbf{e}_z, \qquad \boldsymbol{\psi}_y = \psi_{xy}\mathbf{e}_x + \psi_{zy}\mathbf{e}_z \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\psi}_z = \psi_{xz}\mathbf{e}_x + \psi_{yz}\mathbf{e}_y \tag{2.28}$$

a szilárd test tetszőleges pontjában – ezt a körülményt az fejezi ki, hogy nem szerepel indexként sehol sem a P betű – a lokális bázis $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_x$, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_y$ és $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_z$ egységvektoraihoz tartozó relatív elmozdulásvektor tiszta forgást tartalmazó részét (vagy ami ugyanaz az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokhoz rendelt képvektorokat a $\boldsymbol{\Psi}$-vel kapcsolatos leképezésben). A bevezetett jelölésekkel

$$\underline{\boldsymbol{\Psi}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\boldsymbol{\psi}}_x & \underline{\boldsymbol{\psi}}_y & \underline{\boldsymbol{\psi}}_z \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \psi_{xy} & \psi_{xz} \\ \psi_{yx} & 0 & \psi_{yz} \\ \psi_{zx} & \psi_{zy} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.29}$$

a forgató tenzor mátrixa, ahol a ferde szimmetria miatt

$$\psi_{xx} = \psi_{yy} = \psi_{zz} = 0 \tag{2.30a}$$

– ezért nem tüntettük fel ezeket a koordinátákat a (2.29) képletekben –, és ugyanezen okból fennállnak a

$$\psi_{xy} = -\psi_{yx}, \quad \psi_{yz} = -\psi_{zy} \quad \text{valamint a} \quad \psi_{zx} = -\psi_{xz} \tag{2.30b}$$

összefüggések is.

Az előzőekhez hasonlóan jelölje rendre

$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{\alpha}_x = \varepsilon_x\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yx}\mathbf{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zx}\mathbf{e}_z, \qquad \boldsymbol{\alpha}_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy}\mathbf{e}_x + \varepsilon_y\mathbf{e}_y + \frac{1}{2}\gamma_{zy}\mathbf{e}_z, \\ \boldsymbol{\alpha}_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\gamma_{yz}\mathbf{e}_y + \varepsilon_z\mathbf{e}_z \end{gathered}} \tag{2.31}$$

a szilárd test tetszőleges pontjában a lokális bázis $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_x$, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_y$ és $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_z$ egységvektoraihoz tartozó relatív elmozdulásvektor tiszta alakváltozást tartalmazó részét (vagy ami ugyanaz az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokhoz rendelt képvektorokat az $\boldsymbol{A}$-val kapcsolatos leképezésben). A bevezetett jelölésekkel

$$\boxed{\underline{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_x & \underline{\boldsymbol{\alpha}}_y & \underline{\boldsymbol{\alpha}}_z \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}} \tag{2.32}$$

az alakváltozási tenzor mátrixa. Az $\boldsymbol{A}$ tenzor szimmetriája miatt fennállnak a

$$\boxed{\gamma_{xy} = \gamma_{yx}\,, \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \qquad \text{és} \qquad \gamma_{zx} = \gamma_{xz}} \tag{2.33}$$

összefüggések.

A továbbiak azt a kérdést vizsgálják hogyan számíthatók a $\boldsymbol{\Psi}$ forgató tenzor valamint az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor mátrixának elemei, ha ismeretes a szilárd test elmozdulásmezeje, azaz ha ismeretesek az $u_x(x,y,z)$, $u_y(x,y,z)$ és $u_z(x,y,z)$ elmozduláskoordináták.

A $\boldsymbol{\Psi} = \widetilde{\boldsymbol{\Psi}}$ forgató tenzort értelmező (2.17) egyenlet alapján, tekintettel a (2.28) egyenlettel bevezetett jelölésekre és a (2.29), (2.10), (2.15), valamint a (2.8) képletekre

$$\underline{\mathbf{\Psi}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & u_{xy}-u_{yx} & u_{xz}-u_{zx} \\ u_{yx}-u_{xy} & 0 & u_{yz}-u_{zy} \\ u_{zx}-u_{xz} & u_{zy}-u_{yz} & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & \psi_{xy} & \psi_{xz} \\ \psi_{yx} & 0 & \psi_{yz} \\ \psi_{zx} & \psi_{zy} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

a $\boldsymbol{\Psi}$ forgató tenzor mátrixa, ahol

$$\boxed{\varphi_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right), \quad \varphi_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \quad \text{és} \quad \varphi_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)} \tag{2.35}$$

a $\boldsymbol{\varphi}$ merevtestszerű forgás koordinátái.

Hasonló gondolatmenettel az $\boldsymbol{A}$ tenzort értelmező (2.16) egyenlet alapján, tekintettel a (2.31) egyenlettel bevezetett jelölésekre, a (2.32), (2.10), valamint a (2.8) képletekre kapjuk, hogy

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{U}}^T\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2u_{xx} & u_{xy}+u_{yx} & u_{xz}+u_{zx} \\ u_{yx}+u_{xy} & 2u_{yy} & u_{yz}+u_{zy} \\ u_{zx}+u_{xz} & u_{zy}+u_{yz} & 2u_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \tag{2.36}$$

ahol

$$\boxed{\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}\,,} \tag{2.37a}$$

valamint

$$\boxed{\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad \text{és} \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\,.} \tag{2.37b}$$

Összefoglalóan azt mondhatjuk, hogy a (2.35), valamint a (2.37a,b) képletek segítségével a szilárd test tetszőleges pontjában kiszámíthatók a $\boldsymbol{\Psi}$ forgató tenzor és az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor mátrixainak elemei az xyz KR-ben, feltéve persze, hogy ismeretes a szilárd test elmozdulásmezeje.

Érdemes ehelyütt még egy további körülményre is felhívni a figyelmet. A derivált tenzort a test tetszőleges pontjában a (2.14) összefüggés értelmezi. A forgató tenzort és az alakváltozási tenzort adó (2.17) és (2.16) képleteket pedig úgy kaptuk, hogy a derivált tenzorra alkalmaztuk a felbontási tételt. Bár a derivált tenzorra vezető gondolatmenet során az xyz KR-ben folytak az átalakítások, a végeredmény, azaz a (2.14) összefüggés a derivált tenzor KR független, és ebben az értelemben annak invariáns módú előállítása. Következésképp a forgató tenzor és alakváltozási tenzor (2.17) és (2.16) alatti értelmezései is KR függetlenek. A felsorolt tenzorok mátrixait adó (2.10), (2.8), (2.34), (2.35), valamint (2.36), (2.37a,b) képletek azonban már KR függőek, csak az xyz KR-ben érvényesek. Erre a körülményre mindenütt utaltunk.

Visszatérve a Q pont relatív elmozdulását adó (2.27) képlethez, a relatív elmozdulásvektor tiszta alakváltozást tartalmazó

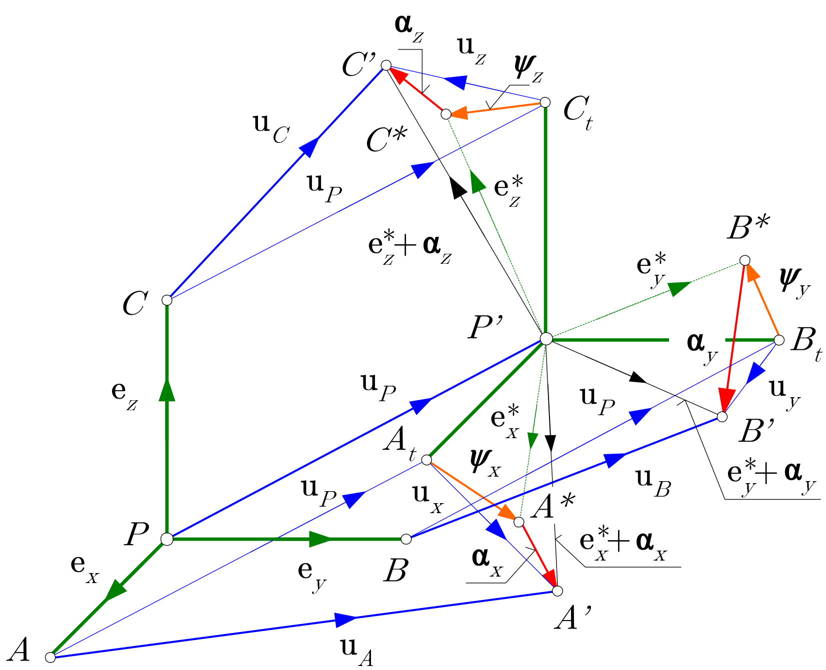
$$\boldsymbol{\alpha}_Q = \boldsymbol{A}_P \cdot \Delta\mathbf{r}$$

részét *alakváltozási vektornak* nevezzük és ha a Q pont elmozdulásvektorát számítjuk, akkor a Q ponthoz kötöttnek gondoljuk. A P pont *elemi környezetének alakváltozási állapotán* az elemi környezet alkotó Q pontok alakváltozási vektorainak összességét értjük.

Az eddigiek alapján, különös tekintettel a (2.32) képletre illetve az alakváltozási vektor előző értelmezésére, az a következtetés adódik, hogy a test P pontjában a lokális KR $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_x$, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_y$ és $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{e}_z$ egységvektorainak végpontjaihoz tartozó $\boldsymbol{\alpha}_{xP}$, $\boldsymbol{\alpha}_{yP}$ és $\boldsymbol{\alpha}_{zP}$ alakváltozási vektorok – ezek egymástól független hat skaláris koordinátája, illetve egyetlen mennyiség, azaz a P pontban vett $\boldsymbol{A}_P$ alakváltozási tenzor– egyértelműen meghatározza a P pont kis környezetében fekvő, azaz a P pont lokális KR-ben a $\Delta\mathbf{r}$ helyvektorú egyébként tetszőleges Q pont alakváltozási vektorát, következőleg a P pont elemi környezetének alakváltozási állapotát.

Mivel az alakváltozási állapotot lokálisan az $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_P$ tenzor határozza meg, tisztáznunk kell a tenzort meghatározó alakváltozási vektorok elemeinek geometriai jelentését. Annál is inkább indokolt ez a kérdés, mivel korábban, a 25-ik oldalon az anyagi vonalak hosszainak, az anyagi vonalak által bezárt szögeknek, a térfogatelemeknek és a felületelemeknek megváltozásait neveztük alakváltozásnak.

2.2.5. Geometriai szemléltetés. A felvetett kérdésre adandó válasz, amint azt majd látni fogjuk, szorosan kapcsolódik az elemi környezet mozgásának geometriai szemléltetéséhez. A P pont lokális bázisának egységvektorai által kifeszített $PABC$ triédert elemi triédernek nevez-



2.9. ábra.

zük, ha az egység alkalmasan kicsi. Ez az elemi triéder egyike a 27-ik és 29-ik oldalakon már említett elemi környezeteknek. Jelölje rendre A, B és C az egységvektorok végpontjait. Ezek elmozdulásait az (2.26) képletből kapjuk, ha a $\Delta\mathbf{r}$ vektor helyére rendre az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokat írjuk és figyelembe vesszük, hogy a (2.29), (2.24) és (2.32) összefüggések alapján

$$\boldsymbol{\psi}_m = \boldsymbol{\Psi}\cdot\mathbf{e}_m = \boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{e}_m \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\alpha}_m = \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_m\,. \qquad m = x, y, z \tag{2.38}$$

Vegyük észre, hogy a fenti képletekben nem jelöltük, és lentebb sem jelöljük külön a P pontra történő lokalizálást az $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{\Psi}$ és $\boldsymbol{A}$ tenzorok, valamint a merevtestszerű forgást adó $\boldsymbol{\varphi}$ vektor esetén.

Ezzel azt kívánjuk hangsúlyozni, összhangban a korábbiakkal is, hogy a vonatkozó geometriai kép a szilárd test bármely pontjában érvényes.

Visszatérve a geometriai szemléltetés kérdésére az a mondottak figyelembevételével felírható

$$\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{U}\cdot\mathbf{e}_x = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Psi}\cdot\mathbf{e}_x + \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_x = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\psi}_x + \boldsymbol{\alpha}_x = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{e}_x + \boldsymbol{\alpha}_x \tag{2.39a}$$

$$\mathbf{u}_B = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{U}\cdot\mathbf{e}_y = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Psi}\cdot\mathbf{e}_y + \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_y = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\psi}_y + \boldsymbol{\alpha}_y = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{e}_y + \boldsymbol{\alpha}_y \tag{2.39b}$$

$$\mathbf{u}_C = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{U}\cdot\mathbf{e}_z = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\Psi}\cdot\mathbf{e}_z + \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_z = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\psi}_z + \boldsymbol{\alpha}_z = \mathbf{u}_P + \boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{e}_z + \boldsymbol{\alpha}_z \tag{2.39c}$$

képleteket tükrözi. Leolvasható a 2.9 ábráról, összhangban a (2.39a,b,c) képletekkel, hogy a $PABC$ elemi triéder először önmagával párhuzamosan eltolódik. Az eltolódást a P pont $\mathbf{u}_P$ elmozdulásvektora adja, hiszen ez a (2.39a,b,c) képletek jobboldalának első tagja. Az eltolódás (transzláció) után $P'A_tB_tC_t$ jelöli a triéder csúcspontjának új helyzetét. Ezt követően elfordulnak a P' pont körül a $P'A_tB_tC_t$ triéder $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ oldalélei. Az elfordulással kapott

$$\mathbf{e}^*_x = \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\psi}_x\,, \qquad \mathbf{e}^*_y = \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\psi}_y \qquad \text{és} \qquad \mathbf{e}^*_z = \mathbf{e}_z + \boldsymbol{\psi}_z \tag{2.40}$$

új oldalélek képleteiben

$$\boldsymbol{\psi}_x = \boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{e}_x\,, \qquad \boldsymbol{\psi}_y = \boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{e}_y \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\psi}_z = \boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{e}_z \tag{2.41}$$

az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ oldalélek A_t, B_t és C_t végpontjainak elmozdulása a $\boldsymbol{\varphi}$ forgás következtében. Az elfordulás után A^*, B^* és C^* jelöli az új $\mathbf{e}^*_x$, $\mathbf{e}^*_y$ és $\mathbf{e}^*_z$ oldalélek végpontjait.

Az eddigi merevtestszerű mozgás (eltolódás és forgás) során a $PABC$ elemi triéder a $P'A^*B^*C^*$ helyzetbe jutott, anélkül hogy megváltoztatta volna az alakját.

Az alakváltozás során a P' helyben marad, az A^*, B^* és C^* pontok tovább mozognak, a vonatkozó elmozdulásokat pedig rendre az $\boldsymbol{\alpha}_x$, $\boldsymbol{\alpha}_y$ és $\boldsymbol{\alpha}_z$ alakváltozási vektorok adják. Másként fogalmazva az

$$\mathbf{e}^*_x\,, \qquad \mathbf{e}^*_y \qquad \text{és} \qquad \mathbf{e}^*_z$$

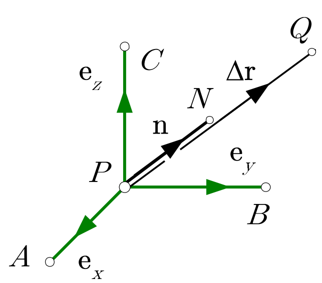
oldalélekből (anyagi vonalakból) az alakváltozás során az

$$\mathbf{e}^*_x + \boldsymbol{\alpha}_x\,, \qquad \mathbf{e}^*_y + \boldsymbol{\alpha}_y \qquad \text{és} \qquad \mathbf{e}^*_z + \boldsymbol{\alpha}_z$$

anyagi vonalak lesznek. Ezek alkalmas összehasonlításával pedig tisztázható a tiszta alakváltozás matematikai mennyiségeinek geometriai tartalma. Mielőtt ezt a kérdést részletesebben is megvizsgálnák érdemes három megjegyzést tenni.

1. Ha a P pont elemi környezetében fekvő Q pontot tekintjük, akkor fennáll a

$$\Delta\mathbf{r} = \lambda\mathbf{n}, \qquad |\mathbf{n}| = 1$$



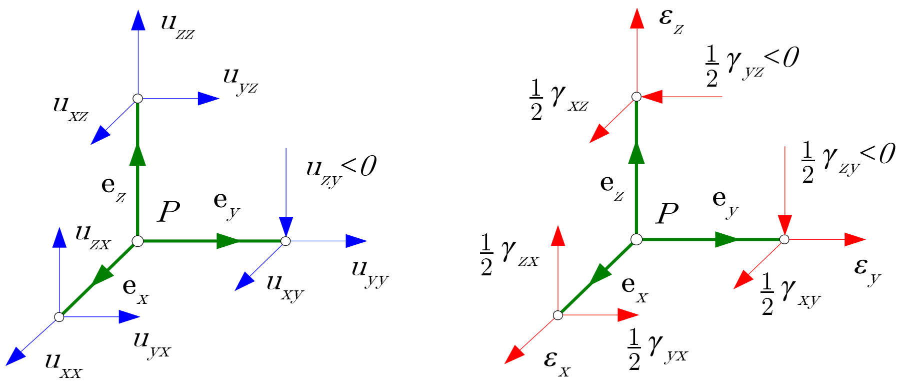
2.10. ábra.

reláció, ahol a λ alkalmasan választott szorzótényező. Ennek a képletnek alapján a (2.26) egyenletből, tekintettel a (2.29), (2.24) és (2.32) összefüggésekre, megismételve tehát a (2.39a,b,c) képletekre vezető gondolatmenetet, a

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_Q &= \mathbf{u}_P + \boldsymbol{U}\cdot\Delta\mathbf{r} = \mathbf{u}_P + \lambda\,(\boldsymbol{\Psi}\cdot\mathbf{n} + \boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}) = \\ &= \mathbf{u}_P + \lambda\,(\boldsymbol{\psi}_n + \boldsymbol{\alpha}_n) = \mathbf{u}_P + \lambda\,(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{n} + \boldsymbol{\alpha}_n)\end{aligned} \tag{2.42}$$

eredményt kapjuk. Ha $\lambda = 1$ és az $\mathbf{n}$ helyére rendre az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokat gondoljuk, akkor a fenti egyenlet visszaadja a (2.39a,b,c) képleteket.

2. Amint arra már korábban rámutattunk a P pont elemi környezetének elmozdulásállapotát az $\boldsymbol{U}_P = \boldsymbol{U}$ derivált tenzor, alakváltozási állapotát az $\boldsymbol{A}_P = \boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor határozza meg. Az is ismeretes, hogy az $\boldsymbol{U}$ tenzort az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokhoz tartozó $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ és $\mathbf{u}_z$ képvektorok – a korábbiak alapján nyilvánvaló, és a 2.9. ábráról is leolvasható, hogy ezek a képvektorok rendre az A, B és C pontok relatív elmozdulásai – azaz kilenc mennyiség egyértelműen meghatározza. Ugyanilyen módon a tiszta alakváltozást adó $\boldsymbol{A}_P = \boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzort az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokhoz tartozó $\boldsymbol{\alpha}_x$, $\boldsymbol{\alpha}_y$ és $\boldsymbol{\alpha}_z$ alakváltozási vektorok – a tenzor szimmetriája miatt ez a három alakváltozási vektor hat független skalárt tartalmaz – határozzák meg. A P ponthoz kötött és az $\mathbf{e}_x$,

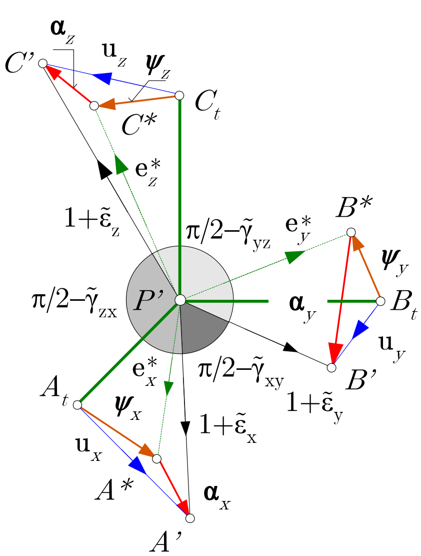


2.11. ábra.

$\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorok által kifeszített triéder segítségével tehát úgy szemléltethetjük mindkét tenzort, ha az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ vektorok végpontjaihoz kötötten koordinátáik berajzolásával ábrázoljuk az $\boldsymbol{U}$-t meghatározó $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ és $\mathbf{u}_z$, valamint az $\boldsymbol{A}_P$-t meghatározó $\boldsymbol{\alpha}_x$, $\boldsymbol{\alpha}_y$ és $\boldsymbol{\alpha}_z$ vektorokat – lásd a 2.11. ábrát, amelyen az u_{zy}, valamint a $\gamma_{zy}/2$ koordinátákat azzal a feltevéssel rajzoltuk meg, hogy negatív az értékük.

3. Az elemi környezet mozgásának, és ebből következően az elemi triéder mozgásának felbontása eltolódásra, forgásra és tiszta alakváltozásra a tényleges mozgás geometriai tartalmának megértését szolgálja. A valóságban ezek a mozgások nem különülnek el. A megfigyelő csak egy elmozdulásmezőt, nem pedig annak a fenti felbontással kapott részeit észleli. Az alakváltozási vektorok geometriai tartalmának vizsgálata után ki fog derülni, hogy a hosszváltozások, szögváltozások etc. azonban közvetlenül is mérhetők, hiszen itt a test alakváltozásával kapcsolatos mérőszámokról van szó.

2.2.6. Az alakváltozás geometriai tartalma I A geometriai tartalom tisztázása az elemi triéder mozgásának vizsgálatán alapul. Természetszerűen csak az alakváltozásokkal kapcsolatos geometriai kérdésekre fordítunk figyelmet. Következőleg az elemi triéder merevtestszerű mozgása utáni helyzet szolgál kiinduló pontként. A részleteket a 2.12. ábra szemlélteti.



2.12. ábra.

Első lépésben a *hosszváltozások* kérdését tekintjük át. Az elemi triéder merevtestszerű mozgása után kapott

$$\mathbf{e}^*_x\,,\qquad \mathbf{e}^*_y\qquad \text{és}\qquad \mathbf{e}^*_z$$

egységnyi hosszúságú oldalélekből (anyagi vonalakból) a tiszta alakváltozás során az

$$\mathbf{e}^*_x+\boldsymbol{\alpha}_x\,,\qquad \mathbf{e}^*_y+\boldsymbol{\alpha}_y\qquad \text{és}\qquad \mathbf{e}^*_z+\boldsymbol{\alpha}_z$$

oldalélek (anyagi vonalak) lesznek. Ezeknek az anyagi vonalaknak hosszát az

$$1+\tilde{\varepsilon}_x\,,\qquad 1+\tilde{\varepsilon}_y\qquad \text{és}\qquad 1+\tilde{\varepsilon}_z$$

módon írjuk fel, ahol $\tilde{\varepsilon}_x$, $\tilde{\varepsilon}_y$ és $\tilde{\varepsilon}_z$-t *egységnyi hosszra jutó hosszváltozásoknak*, más elnevezés szerint pedig *fajlagos nyúlásoknak* nevezzük. Ami az alakváltozást szenvedett oldalélek hosszának fentiek szerinti felírásmódját és elnevezések hátterét illeti azt hangsúlyozzuk, hogy egységnyi hosszúságú anyagi vonalak kis alakváltozás során bekövetkező hosszváltozásáról van szó.

A fentiek alapján kapott, és példaként tekintett

$$|1+\tilde{\varepsilon}_x| = |\mathbf{e}_x^* + \boldsymbol{\alpha}_x|$$

reláció négyzetre emelésével írható, hogy

$$1+2\tilde{\varepsilon}_x+\tilde{\varepsilon}_x^2 = 1+2\mathbf{e}_x^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_x+\boldsymbol{\alpha}_x^2\,,$$

ahol a (2.40) összefüggés alapján $\mathbf{e}_x^* = \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\psi}_x$, következőleg

$$2\tilde{\varepsilon}_x+\tilde{\varepsilon}_x^2 = 2\left(\mathbf{e}_x+\boldsymbol{\psi}_x\right)\cdot\boldsymbol{\alpha}_x+\boldsymbol{\alpha}_x^2\,.$$

Kis elmozdulások és alakváltozások esetén mind $\tilde{\varepsilon}_x^2$ mind pedig $\boldsymbol{\psi}_x\cdot\boldsymbol{\alpha}_x$ másodrendűen kicsiny, ezért elhanyagolható. Ez egyben azt is jelenti, kihasználva ehelyütt a $(2.38)_2$ illetve a (2.31) összefüggéseket, hogy

$$\tilde{\varepsilon}_x = \mathbf{e}_x\cdot\boldsymbol{\alpha}_x = \mathbf{e}_x\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_x = \varepsilon_x\,.$$

Nyilvánvaló, hogy ebben képletben az x helyére y és z is írható. Az is nyilvánvaló, hogy a kapott eredmény a szilárd test bármely P pontjában igaz, azaz általános érvényű. Összegezve a fentieket azt mondhatjuk, hogy az alakváltozási tenzor főátlójában álló

$$\boxed{\varepsilon_n = \mathbf{e}_n\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_n\,, \qquad\qquad n=x,y,z} \tag{2.43}$$

elemek az n irányban mért fajlagos nyúlások.

A továbbiakban a *szögváltozások* kérdését tekintjük át.

Jelölje $\tilde{\gamma}_{mn}$ azt a szöget, amellyel az m, n $(m,n=x,y,z;\ m\neq n)$ anyagi vonalak, azaz az $\mathbf{e}_m$ és $\mathbf{e}_n$ irányok által bezárt $\pi/2$ nagyságú szög megváltozik, azaz kisebb lesz, ha $\tilde{\gamma}_{mn}>0$ illetve nagyobb lesz ha $\tilde{\gamma}_{mn}<0$. Vegyük észre, hogy valójában a $\mathbf{e}_m^*$ és $\mathbf{e}_n^*$ irányok által bezárt $\pi/2$ nagyságú szög megváltozásáról van itt szó, hiszen az a merevtestszerű mozgás amely az $\mathbf{e}_m$ és $\mathbf{e}_n$ vektorokat a $\mathbf{e}_m^*$ és $\mathbf{e}_n^*$ vektorokba viszi át változatlanul hagyja a szögeket. A 2.12. ábra a szürke különböző árnyalataival szemlélteti az utóbbi vektorok által az alakváltozás után bezárt

$$\pi/2-\tilde{\gamma}_{xy}, \qquad \pi/2-\tilde{\gamma}_{yz} \qquad \text{és} \qquad \pi/2-\tilde{\gamma}_{zx}$$

szögeket. Megállapodás szerint a $\tilde{\gamma}_{xy}$, $\tilde{\gamma}_{yz}$ és $\tilde{\gamma}_{zx}$ szögváltozásokat *fajlagos szögváltozásoknak* (fajlagos szögtorzulásoknak) nevezzük. A szögváltozások és az alakváltozási tenzor közötti kapcsolat tisztázására, példaként tekintve az x,y irányokat, a skalárszorzat értelmezésének felhasználásával felírható

$$\left(\mathbf{e}_x^*+\boldsymbol{\alpha}_x\right)\cdot\left(\mathbf{e}_y^*+\boldsymbol{\alpha}_y\right) = \underbrace{|\mathbf{e}_x^*+\boldsymbol{\alpha}_x|}_{1+\tilde{\varepsilon}_x}\underbrace{\left|\mathbf{e}_y^*+\boldsymbol{\alpha}_y\right|}_{1+\tilde{\varepsilon}_y}\underbrace{\cos\left(\pi/2-\tilde{\gamma}_{xy}\right)}_{\sin\tilde{\gamma}_{xy}\approx\tilde{\gamma}_{xy}}$$

egyenletből érdemes kiindulni. A fenti képlet elemi lépésekkel átalakítható. Elvégezve a kijelölt szorzásokat a

$$\underbrace{\mathbf{e}_x^*\cdot\mathbf{e}_y^*}_{0}+\mathbf{e}_y^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_x+\mathbf{e}_x^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_y+\boldsymbol{\alpha}_x\cdot\boldsymbol{\alpha}_y = \underbrace{\left(1+\tilde{\varepsilon}_x\right)\left(1+\tilde{\varepsilon}_y\right)}_{1+\tilde{\varepsilon}_x+\tilde{\varepsilon}_y+\tilde{\varepsilon}_x\tilde{\varepsilon}_y}\sin\tilde{\gamma}_{xy}$$

közbülső eredményt kapjuk. Kis alakváltozások esetén

– elhanyagolhatók a másodrendben kicsiny tagok (pl.: $\mathbf{e}_y^*\cdot\boldsymbol{\alpha}_x = (\mathbf{e}_y+\boldsymbol{\psi}_x)\cdot\boldsymbol{\alpha}_x \approx \mathbf{e}_y\cdot\boldsymbol{\alpha}_x$),
– érvényes az $1+\tilde{\varepsilon}_x+\tilde{\varepsilon}_y+\tilde{\varepsilon}_x\tilde{\varepsilon}_y\approx 1$ közelítés és
– $|\tilde{\gamma}_{xy}|\ll 1$ azaz $\sin\tilde{\gamma}_{xy}\approx\tilde{\gamma}_{xy}$

következőleg, felcserélve a két oldalt írhatjuk, hogy

$$\tilde{\gamma}_{xy}\approx\mathbf{e}_x\cdot\boldsymbol{\alpha}_y+\mathbf{e}_y\cdot\boldsymbol{\alpha}_x\,.$$

A $(2.38)_2$, (2.31) és (2.33) összefüggések felhasználásával innen a

$$\tilde{\gamma}_{xy}\approx\mathbf{e}_x\cdot\boldsymbol{\alpha}_y+\mathbf{e}_y\cdot\boldsymbol{\alpha}_x = \underbrace{\mathbf{e}_x\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_y\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_x}_{2\mathbf{e}_x\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_y=2\mathbf{e}_y\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_x} = \frac{1}{2}\gamma_{xy}+\frac{1}{2}\gamma_{yx} = \gamma_{yx}$$

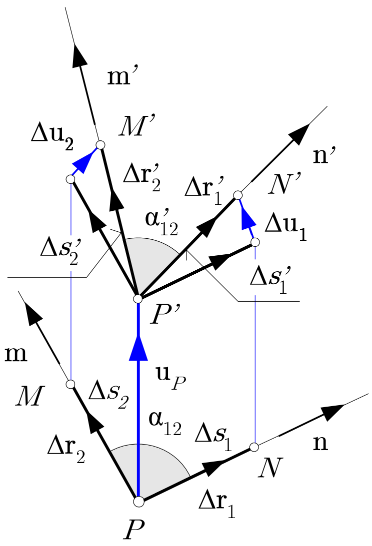
eredményt kapjuk. Megjegyezzük, hogy a középső képletrész alá szedett egyenlőség, összhangban az $(1.38)_2$ összefüggéssel az alakváltozási tenzor szimmetriáját fejezi ki.

Nyilvánvaló, hogy az utóbbi képletben az xy helyére yz és zx is írható. Az is nyilvánvaló, hogy a kapott eredmény a szilárd test bármely P pontjában igaz. Összegezve a fentieket azt mondhatjuk, hogy az alakváltozási tenzor főátlón kívüli elemeit megduplázva az egymásra merőleges m és n anyagi vonalak között mérhető

$$\boxed{\gamma_{mn} = 2\mathbf{e}_m \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{e}_n = 2\mathbf{e}_n \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{e}_m = \gamma_{nm}, \qquad m, n = x, y, z;\; m \neq n} \tag{2.44}$$

fajlagos szögváltozásokat kapjuk.

2.2.7. Az alakváltozás geometriai tartalma II A fajlagos nyúlásokkal és szögváltozásokkal kapcsolatos és az előző szakaszban részletezett eredményeket úgy is megkaphatjuk, hogy az alakváltozási viszonyokat általánosabb megközelítésben tekintjük át. Legyen $\Delta\mathbf{r}_1$ és $\Delta\mathbf{r}_2$ a P pont elemi környezetében fekvő N és M pontok P pontra vonatkoztatott helyvektora. A vonatkozó n és m irányokat (anyagi vonalakat) az $\mathbf{n}$ és $\mathbf{m}$ egységvektorok jelölik ki, az n és m irányok által bezárt szöget pedig α_{12} jelöli. Az α_{12} szög speciális esetben zérus illetve $\pi/2$ is lehet.



2.13. ábra.

A P pont elemi környezetének merevtestszerű mozgása és tiszta alakváltozása után, összhangban az eddigi jelölésbeli megállapodásainkkal, P' és N', illetve M' jelöli a P és N, illetve M pontok helyét, a $\Delta\mathbf{r}_1$ és $\Delta\mathbf{r}_2$ helyvektorokból a $\Delta\mathbf{r}'_1$ és $\Delta\mathbf{r}'_2$ helyvektorok jönnek létre, a vonatkozó n' és m' irányokat (anyagi vonalakat) az $\mathbf{n}'$ és $\mathbf{m}'$ egységvektorok jelölik ki, az n és m irányok közötti szög pedig α'_{12}-re változik. (Az n és m térbeli egyenesekből az n' és m' térgörbék jönnek létre, de ezek jól helyettesíthetők egyenesekkel a P pont elemi környezetében.) Leolvasható a viszonyok szemléltetésére rajzolt 2.13. ábráról, hogy

$$\Delta\mathbf{r}'_1 = \Delta\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{u}_1 \qquad \text{és} \qquad \Delta\mathbf{r}'_2 = \Delta\mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{u}_2 \tag{2.45a}$$

ahol, összhangban az (2.22) összefüggéssel

$$\Delta\mathbf{u}_1 = \boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_1 \qquad \text{és} \qquad \Delta\mathbf{u}_2 = \boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_2 \tag{2.45b}$$

a relatív elmozdulások.

Mielőtt tovább részleteznénk az átalakításokat érdemes a szorzási műveletek kapcsán megjegyezni, hogy valamely mondjuk a $\boldsymbol{W}$ tenzor és az $\mathbf{u}$ vektor $\boldsymbol{W} \cdot \mathbf{u}$ szorzata, mint egy vektor, a skaláris szorzás kommutatív volta miatt akár balról, akár pedig jobbról is szorozható a $\mathbf{v}$ vektorral. Az utóbbi esetben, a félreértések elkerülése érdekében, zárójelpárba helyezzük az első szorzótényezőt adó $\boldsymbol{W} \cdot \mathbf{u}$ vektort:

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{W} \cdot \mathbf{u} = (\boldsymbol{W} \cdot \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}\,.$$

Mivel a fenti egyenlőség jobboldalán álló szorzat kényelmetlen, csak akkor használjuk, ha a műveletek végzése során ez a természetes szorzási sorrend adódik. A szorzatot azonban egy következő lépésben már a fenti képlet baloldalának megfelelően szedjük.

Ha a $\boldsymbol{W} \cdot \mathbf{u}$ szorzat, mint vektor vektoriális szorzásban szerepel, akkor azt következetesen zárójelpárba helyezzük pl.:

$$(\boldsymbol{W} \cdot \mathbf{u}) \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times (\boldsymbol{W} \cdot \mathbf{u})\;.$$

Visszatérve mostmár a vizsgálni kívánt geometriai kérdéskörhöz a (2.45a,b) felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{r}'_1 \cdot \Delta\mathbf{r}'_2 &= (\Delta\mathbf{r}_1 + \Delta\mathbf{u}_1) \cdot (\Delta\mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{u}_2) = (\Delta\mathbf{r}_1 + \boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_1) \cdot (\Delta\mathbf{r}_2 + \boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_2) = \\ &= \Delta\mathbf{r}_1 \cdot \Delta\mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_2 + (\boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_1) \cdot \Delta\mathbf{r}_2 + (\boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_1) \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_2)\;.\end{aligned} \tag{2.46}$$

A kapott eredmény további átalakítása során vegyük figyelembe, hogy

- $\Delta\mathbf{r}'_1 = \Delta s'_1 \mathbf{n}'$ és $\Delta\mathbf{r}'_2 = \Delta s'_2 \mathbf{m}'$ következőleg $\Delta\mathbf{r}'_1 \cdot \Delta\mathbf{r}'_2 = \Delta s'_1 \Delta s'_2 \cos\alpha'_{12}$
- $\Delta\mathbf{r}_1 = \Delta s_1 \mathbf{n}$ és $\Delta\mathbf{r}_2 = \Delta s_2 \mathbf{m}$ következőleg $\Delta\mathbf{r}_1 \cdot \Delta\mathbf{r}_2 = \Delta s_1 \Delta s_2 \cos\alpha_{12}$
- $(\boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_1) \cdot \Delta\mathbf{r}_2 = \Delta\mathbf{r}_2 \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_1) = \Delta\mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_1$, valamint hogy
- a másodrendben kicsiny $(\boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_1) \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_2)$ szorzat elhanyagolható a többi tag mellett.

Az előzőek felhasználásával átírható a (2.46) összefüggés

$$\Delta s_1' \Delta s_2' \cos\alpha_{12}' = \Delta s_1 \Delta s_2 \cos\alpha_{12} + \Delta\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_2 + \Delta\mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_1 \,.$$

A végső alakot annak figyelembevételével kapjuk, hogy felhasználjuk az (1.36) alapján írható

$$\Delta\mathbf{r}_2 \cdot \boldsymbol{U} \cdot \Delta\mathbf{r}_1 = \Delta\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{U}^T \cdot \Delta\mathbf{r}_2$$

összefüggést, kiemeléseket hajtunk végre és helyettesítjük az alakváltozási tenzort adó (2.16) képletet:

$$\Delta s_1' \Delta s_2' \cos\alpha_{12}' = \Delta s_1 \Delta s_2 \cos\alpha_{12} + \Delta\mathbf{r}_1 \cdot \left(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}^T\right) \cdot \Delta\mathbf{r}_2 =$$
$$= \Delta s_1 \Delta s_2 \cos\alpha_{12} + 2\Delta\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{A} \cdot \Delta\mathbf{r}_2 \,.$$

Mivel az utóbbi egyenlet a test bármely P pontjában fennáll a P ponton átmenő n és m anyagi vonalakra nézve azért a

$$\boxed{\Delta s_1' \Delta s_2' \cos\alpha_{12}' = \Delta s_1 \Delta s_2 \cos\alpha_{12} + 2\Delta\mathbf{r}_1 \cdot \boldsymbol{A} \cdot \Delta\mathbf{r}_2} \tag{2.47}$$

alakban írva bárhol alkalmas a szögváltozások számítására, ha a többi mennyiség ismert.

Az alábbiakban két speciális esetet tekintünk át.

1. Az első esetben tegyük fel, hogy $\alpha_{12} = 0$ azaz $n = m$. Ekkor igazak a

   $$\Delta s_1' = \Delta s_2' = \Delta s', \quad \alpha_{12}' = \alpha_{12} = 0, \quad \Delta s_1 = \Delta s_2 = \Delta s \quad \text{és} \quad \Delta\mathbf{r}_1 = \Delta\mathbf{r}_2 = \mathbf{n}\Delta s$$

   összefüggések, következőleg

   $$(\Delta s')^2 = (\Delta s)^2 + 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n}\,(\Delta s)^2 = (\Delta s)^2\,(1 + 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n})$$

   ahonnan

   $$\frac{(\Delta s')^2}{(\Delta s)^2} = 1 + 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n}$$

   és

   $$\frac{\Delta s'}{\Delta s} = \sqrt{1 + 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n}} \approx 1 + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n}$$

   vagy ami ugyanaz

   $$\frac{\Delta s'}{\Delta s} - 1 = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n} \,. \tag{2.48}$$

   Figyelembe véve, hogy a $\Delta s' - \Delta s$ különbség nem más mint a Δs ívelem hosszának megváltozása az

   $$\varepsilon_n = \frac{\Delta s' - \Delta s}{\Delta s} \tag{2.49}$$

   tört az n irányban mért ε_n fajlagos nyúlás (hosszváltozás), amivel (2.48)-ból az általános érvényű

   $$\boxed{\varepsilon_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n}} \tag{2.50}$$

   összefüggést kapjuk. Vegyük észre, hogy ez a képlet, amely a szilárd test tetszőleges P pontjában az n irányban mért fajlagos nyúlást adja, speciális esetben, azaz $n{=}x, y, z$ és $\mathbf{n}{=}\mathbf{e}_n$-re megegyezik a (2.43) képlettel.

2. A második esetben tegyük fel, hogy $\alpha_{12} = \pi/2$. Mivel az alakváltozások kicsik azt is feltehetjük, hogy $\alpha_{12}'{=}\pi/2{-}\gamma_{nm}$ ahol γ_{mn} az egymásra merőleges m és n irányok közötti fajlagos szögváltozás, azaz $\gamma_{nm} > 0$ $\{\gamma_{nm} < 0\}$ ha az n, m irányok által bezárt $\alpha_{12} = \pi/2$ szög csökken {növekszik}.

   A továbbiakban a (2.47) összefüggés átalakítása a célunk, annak figyelembevételével, hogy

   $$\cos\alpha_{12} = 0\,, \quad \cos\alpha_{12}' = \cos(\pi/2 - \gamma_{nm}) = \sin\gamma_{nm} \approx \gamma_{nm}\,,$$
   $$\Delta\mathbf{r}_1 = \mathbf{n}\Delta s_1\,, \quad \Delta\mathbf{r}_2 = \mathbf{m}\Delta s_2 \quad \text{és} \quad \frac{\Delta s_1 \Delta s_2}{\Delta s_1' \Delta s_2'} \approx 1\,.$$

   Az utóbbi képletek részleges helyettesítésével (2.47)-ből a

   $$\Delta s_1' \Delta s_2' \gamma_{nm} = 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{m} \Delta s_1 \Delta s_2$$

   alak következik. A $\Delta s_1' \Delta s_2'$ szorzattal való átosztás a kivánt végeredményt adja

   $$\boxed{\gamma_{nm} = 2\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{m}\,.} \tag{2.51}$$

Vegyük észre, hogy ez a képlet, amely a szilárd test tetszőleges P pontjában az egymásra merőleges n és m irányok közötti γ_{nm} fajlagos szögváltozást adja, speciális esetben, azaz $n,m = x,y,z$; $n \neq m$ és $\mathbf{n},\mathbf{m} = \mathbf{e}_n$-re megegyezik a (2.44) képlettel.

2.2.8. Az alakváltozás geometriai tartalma III Az alakváltozás során a ΔV térfogatelemből a $\Delta V'$ térfogatelem lesz. Az egységnyi térfogatra eső térfogatváltozást *fajlagos térfogatváltozásnak* nevezzük és az

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V' - \Delta V}{\Delta V} \tag{2.52}$$

hányadossal értelmezzük. A továbbiakban az a célunk, hogy meghatározzuk az ε_V fajlagos térfogatváltozás és az alakváltozásjellemzők közötti kapcsolatot. Nyilvánvaló, hogy

$$\Delta V = (\underbrace{\Delta x \mathbf{e}_x}_{\Delta \mathbf{r}_1} \times \underbrace{\Delta y \mathbf{e}_y}_{\Delta \mathbf{r}_2}) \cdot \underbrace{\Delta z \mathbf{e}_z}_{\Delta \mathbf{r}_3} = (\Delta \mathbf{r}_1 \times \Delta \mathbf{r}_2) \cdot \Delta \mathbf{r}_3 \,.$$

Kitűnik a (2.45a,b) képletekből, hogy a $\Delta \mathbf{r}_i$ $(i = 1,2,3)$ vonalelem vektorokból a

$$\Delta \mathbf{r}_i' = \Delta \mathbf{r}_i + \boldsymbol{U}_P \cdot \Delta \mathbf{r}_i \tag{2.53}$$

vonalelem vektorok lesznek a szilárd test mozgása után. Következőleg

$$\Delta V' = \left(\Delta \mathbf{r}_1' \times \Delta \mathbf{r}_2'\right) \cdot \Delta \mathbf{r}_3' \,.$$

Az utóbbi képlet átalakítható a $\Delta \mathbf{r}_i'$-t adó (2.53) összefüggések helyettesítésével. Az átalakítás során csak a derivált tenzorban lineáris tagokat tartjuk meg – vagyis elhagyjuk az $\boldsymbol{U}_P$-ben másod- illetve magasabbrendű tagokat – és a kívánt eredmény elérése érdekében alkalmasan átrendezzük a vegyes szorzatok szorzótényezőinek sorrendjét. Emellett, amint azt korábban is tettük, elhagyjuk a P indexet. A lépéseket az alábbiak részletezik:

$$\begin{aligned}
\Delta V' &= [(\Delta \mathbf{r}_1 + \boldsymbol{U} \cdot \Delta \mathbf{r}_1) \times (\Delta \mathbf{r}_2 + \boldsymbol{U} \cdot \Delta \mathbf{r}_2)] \cdot (\Delta \mathbf{r}_3 + \boldsymbol{U} \cdot \Delta \mathbf{r}_3) = \\
&= (\Delta \mathbf{r}_1 \times \Delta \mathbf{r}_2) \cdot \Delta \mathbf{r}_3 + [(\boldsymbol{U} \cdot \Delta \mathbf{r}_1) \times \Delta \mathbf{r}_2] \cdot \Delta \mathbf{r}_3 + [\Delta \mathbf{r}_1 \times (\boldsymbol{U} \cdot \Delta \mathbf{r}_2)] \cdot \Delta \mathbf{r}_3 \\
&\quad + (\Delta \mathbf{r}_1 \times \Delta \mathbf{r}_2) \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \Delta \mathbf{r}_3) + \text{magasabbrendű tagok} \,.
\end{aligned}$$

ahonnan, tekintettel az (1.31) – a w helyére u-t gondolva –, valamint a (2.10) és a (2.8) képletekre

$$\begin{aligned}
\Delta V' &= \Delta V \big[1 + \underbrace{(\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z)}_{\mathbf{e}_x} \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \mathbf{e}_x) + \underbrace{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x)}_{\mathbf{e}_y} \cdot \boldsymbol{U} \cdot \mathbf{e}_y + \underbrace{(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y)}_{\mathbf{e}_z} \cdot (\boldsymbol{U} \cdot \mathbf{e}_z)\big] = \\
&= \Delta V [1 + \underbrace{\mathbf{e}_x \cdot \boldsymbol{U} \cdot \mathbf{e}_x}_{u_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x}} + \underbrace{\mathbf{e}_y \cdot \boldsymbol{U} \cdot \mathbf{e}_y}_{u_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}} + \underbrace{\mathbf{e}_z \cdot \boldsymbol{U} \cdot \mathbf{e}_z}_{u_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}}] \,,
\end{aligned}$$

vagyis a

$$\frac{\Delta V'}{\Delta V} - 1 = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \mathbf{u} \cdot \nabla$$

képlet következik. Kihasználva most a (2.37a) és (2.52) összefüggéseket

$$\boxed{\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \mathbf{u} \cdot \nabla} \tag{2.54}$$

az eredmény.

Nyilvánvaló, hogy a fajlagos térfogatváltozás mint fizikai mennyiség KR független kell, hogy legyen. Visszaidézve a szimmetrikus $\boldsymbol{W}$ tenzor W_I első skalárinvariánsát adó (1.63a) képletet, azonnal látszik, hogy a fajlagos térfogatváltozás, vagyis a fenti összefüggés jobboldala, nem más mint a szimmetrikus $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor A_I első skalárinvariánsa, és így valóban KR független mennyiség. A mondottak kihasználásával írható

$$\varepsilon_V = A_I \tag{2.55}$$

egyenlet a fajlagos térfogatváltozás invariáns voltát hangsúlyozza.

2.2.9. Az alakváltozási tenzor főtengelyproblémája. A 2.14. ábra a P pont helyi KR-ben az n irányt kijelölő $\mathbf{n}$ egységvektor N végpontjához kötötten szemlélteti az $\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n}$ alakváltozási vektort, amely felbontható egy n irányú és egy az n irányra merőleges összetevőre

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha}_{n||} + \boldsymbol{\alpha}_{n\perp} = \boldsymbol{\alpha}_{n||} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_n \tag{2.56}$$

ahol, tekintettel az ε_n fajlagos nyúlást adó (2.50) összefüggésre és a kétszeres vektorszorzatok kifejtési tételére, a keresett két összetevő az

$$\boldsymbol{\alpha}_{n||} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_n)\,\mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n})\,\mathbf{n} = \varepsilon_n \mathbf{n} \tag{2.57a}$$

és

$$\boldsymbol{\alpha}_{n\perp} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_n = \boldsymbol{\alpha}_n - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\alpha}_n)\,\mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\alpha}_n) \times \mathbf{n} \tag{2.57b}$$

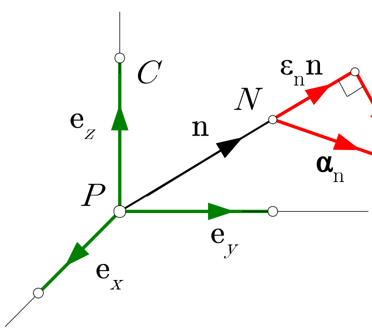
összefüggésekből számítható. Ezen a ponton felmerül a kérdés, hogy létezik-e olyan n irány, amelyre nézve $\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{\alpha}_{n||}$ azaz $\boldsymbol{\alpha}_{n\perp} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\gamma}_n = 0$. Ha létezik ilyen irány, akkor

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{n} = \varepsilon_n \mathbf{n} = \boldsymbol{\alpha}_{n||} \tag{2.58}$$

azaz

$$(\boldsymbol{A} - \varepsilon_n \boldsymbol{E}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}\,. \tag{2.59}$$

Az utóbbi egyenlet azonnal következik a szimmetrikus $\boldsymbol{W}$ tenzor sajátértékfeladatával kapcsolatos (1.60) egyenletből, ha a $\boldsymbol{W}$ helyére a szimmetrikus $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzort, λ helyére pedig ε_n-t írunk. Ez egyben azt is jelenti, hogy a szimmetrikus tenzorok sajátértékfeladatával kapcsolatos és az 1.6 szakaszban részletezett valamennyi eredmény itt is érvényes. A szóhasználatban jelentkező eltérések miatt az alábbiakat érdemes ehelyütt megismételni.



2.14. ábra.

Az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzorral kapcsolatos (2.59) sajátértékfeladatot *az alakváltozási tenzor főtengelyproblémájának*, az ε_n sajátértékeket *főnyúlásoknak*, a kapott n irányokat *alakváltozási főirányoknak* nevezzük

Az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor főtengelyproblémájának legalább három megoldása van a főirányokra nézve. Ha csak három a megoldások száma, akkor ezek az irányok kölcsönösen merőlegesek egymásra. Ha több mint három a megoldások száma, akkor végtelen sok megoldás van, de mindig kiválasztható ezek közül három egymásra kölcsönösen merőleges megoldás. Az ε_n ($n = 1{,}2{,}3$) főnyúlásokat nagyság szerint rendezettnek tekintjük, vagyis úgy választjuk meg az indexüket, hogy fennálljon az

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \tag{2.60}$$

reláció. A vonatkozó $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ irányvektorokat pedig úgy érdemes megválasztani, hogy azok jobbsodratú kartéziuszi KR-t alkossanak. Ez a választás mindig lehetséges.

Az alakváltozási főirányokat megadó $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ irányvektorok által kifeszített kartéziuszi KR-ben, tekintettel (2.58)-re az $\boldsymbol{\alpha}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{n}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{n}_2$ és $\boldsymbol{\alpha}_3 = \varepsilon_3 \mathbf{n}_3$ képletek adják az alakváltozási vektorokat, következésképp

$$\underset{(3\times 3)}{\underline{\mathbf{A}}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_1 & \underline{\boldsymbol{\alpha}}_2 & \underline{\boldsymbol{\alpha}}_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \varepsilon_1 \underline{\mathbf{n}}_1 & \varepsilon_2 \underline{\mathbf{n}}_2 & \varepsilon_3 \underline{\mathbf{n}}_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

azaz az alakváltozási tenzor mátrixa diagonális.

2.3. Feszültségi állapot, belső erőrendszer

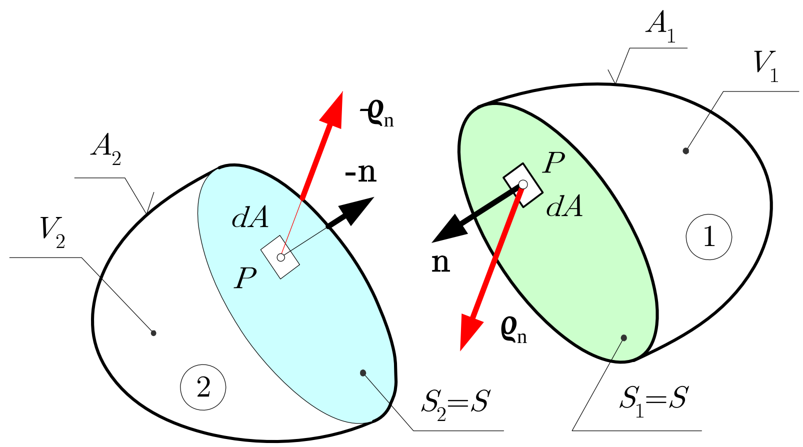
2.3.1. Feszültségvektor. Tegyük fel, hogy a vizsgálat tárgyát képező B-vel jelölt szilárd test egyensúlyban van a test V térfogatán működő térfogati ER, valamint a test A határfelületén kifejtett felületi ER (együtt külső ER) hatására. A két erőrendszert együtt önegyensúlyinak nevezzük. Vágjuk ketté gondolatban, egy hipotetikus belső S felülettel a B jelű testet, és távolítsuk el – ugyancsak gondolatban – az így keletkező testrészeket egymástól.

Az egymástól gondolatban eltávolított testrészeket a 2.15. ábra szemlélteti.

Jelölje az átmetszéssel kapott 1 és 2 jelű testrészek térfogatát V_1 és V_2, az A határfelület vonatkozó részeit pedig A_1 és A_2. Az S felület 1 és 2 jelű testrészekre eső részeit pedig, összhangban az eddigiekkel, S_1 és S_2 jelöli. Az 1 jelű testrészt az A_1 és S_1, a 2 jelű testrészt pedig az A_2 és S_2 felületek határolják. Nyilvánvaló, hogy

$$V = V_1 \cup V_2, \qquad A = A_1 \cup A_2 \qquad \text{és} \qquad S = S_1 = S_2 \,.$$

Mivel a B jelű test egyensúlyban van, kézenfekvő az a feltevés, hogy az átmetszéssel kapott 1 és 2 jelű testrészek is egyensúlyban vannak. Az 1 jelű testrész A_1 felületén és V_1 térfogatán működő, és az ábrán nem feltüntetett felületi és térfogati ER azonban nem önegyensúlyi, hiszen csak részei a teljes testen működő és önegyensúlyi külső ER-nek. Szükségszerű tehát az a feltevés, hogy az egyensúly biztosítása érdekében az S_1 belső felületen valamilyen megoszló ER-nek, elnevezése szerint *belső ER-nek*, kell hatnia. Ezt az ER-t valójában a 2 jelű testrész fejti ki az 1 jelű testrész S_1 belső felületén.



2.15. ábra.

Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy a 2 jelű testrész A_2 felületén és V_2 térfogatán működő felületi és térfogati ER nem önegyensúlyi, azaz az egyensúly biztosítása érdekében az S_2 belső felületen is valamilyen megoszló belső ER-nek kell hatnia. Ezt az ER-t az 1 jelű testrész fejti ki az 2 jelű testrész S_2 belső felületén.

A B jelű testet végtelen sokféleséggel választhatjuk belső felületekkel két részre és így végtelen sok belső felületpáron kell megoszló belső ER-t feltételezni. Mindezeken a felületeken megoszló belső ER-ek összessége *a test teljes belső ER-e*.

Jelölje $\boldsymbol{\rho}$, vagypedig $\mathbf{t}$ az 1 jelű testrész S_1 belső felületén ébredő *belső ER sűrűségvektorát*. Az akció reakció törvény értelmében az S_2 belső felületén $-\boldsymbol{\rho}$ a belső ER sűrűségvektora. Az ábra ennek megfelelően tünteti fel az S_1 és S_2 belső felületek valójában egymással egybeeső P pontjában a viszonyokat.

A belső ER $\boldsymbol{\rho}$, illetve $\mathbf{t}$ sűrűségvektorát *feszültségvektornak* (vagy röviden feszültségnek) nevezzük. Mivel a feszültségvektor felületen megoszló ER sűrűségvektora mértékegysége

$$1\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{N/m^2} \quad \text{(elnevezése Pascal), vagypedig} \quad 1\,\mathrm{N/mm^2} = 1\,\mathrm{MN/m^2} = 1\,\mathrm{MPa}\,.$$

Megjegyezzük, hogy az első mértékegység nagyon kicsi, ezért a szilárdságtanban szinte kizárólag a második mértékegységet, azaz az $1\,\mathrm{N/mm^2}$ egységet használjuk.

Az S_1 felület P pontjában a dA elemi felületen megoszló belső ER eredője (elemi eredő) a

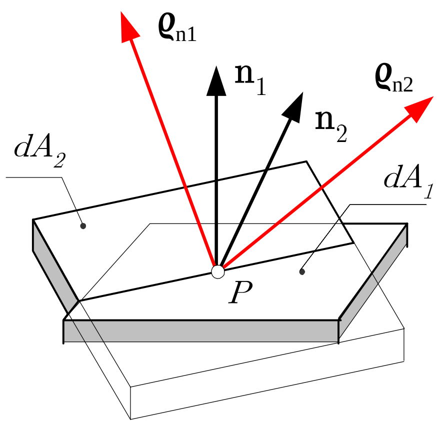
$$d\mathbf{F} = \boldsymbol{\rho}\,\mathrm{d}A = \mathbf{t}\,\mathrm{d}A \tag{2.62}$$

összefüggéssel számítható.

Nyilvánvaló, hogy a feszültségvektor függ attól, hogy az összetartozó S_1 és S_2 belső felületek melyik, valójában egymással egybeeső, P pontjában vagyunk.

Jelölje $\mathbf{n}$ az 1 jelű testrész külső normálisát a P pontban. A 2 jelű testrésznek ugyanebben a pontban $-\mathbf{n}$ a külső normálisa.

Ugyanazon P pontra végtelen sok belső felület illeszthető. Ezeken a belső felületeken általában más a belső erőrendszer megoszlása, és így feszültségvektor P pontbeli értéke is. Mivel a belső felületet lokálisan az érintősík állását megszabó normális jellemzi, azt mondhatjuk, hogy a P pontbeli feszültségvektor a P ponton áthaladó belső felület normálisának függvénye. A 2.16. ábra a P pontra illeszkedő két különböző belső felület dA_1 és dA_2 felületelemén – a vonatkozó külső normálisokat rendre $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ jelöli – szemlélteti a belső ER $\boldsymbol{\rho}_{n1}$ és $\boldsymbol{\rho}_{n2}$ sűrűségvektorát, a feszültségvektort.



2.16. ábra.

Az indexként kiírt n_1 és n_2 azt fejezi ki, hogy a rögzített P pontban a normálistól függ a feszültségvektor.

A fentieket úgy foglalhatjuk össze, hogy a P pontbeli feszültségvektor a P pontra illeszthető elemi felülethez kötött, és annak normálisától függ. A P pontra illeszthető összes elemi felületen működő feszültségvektorok összessége a P pontbeli feszültségi állapot. Más megfogalmazásban a P pont elemi környezetének feszültségi állapota.

Az egész testet tekintve a $\boldsymbol{\rho}$ feszültségvektor a helynek, vagyis az $\mathbf{r}$ helyvektornak, illetve rögzített $\mathbf{r}$-re az elemi felület $\mathbf{n}$ normálisainak a függvénye:

$$\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{n})\,. \tag{2.63}$$

Az akció reakció törvény következménye, amint arra már fentebb rámutattunk, hogy a normális előjelének megváltozása a feszültségvektor előjelének megváltozását eredményezi. Fennáll tehát a

$$\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}, -\mathbf{n}) = -\boldsymbol{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{n}) \tag{2.64}$$

egyenlet.

2.3.2. A feszültségvektor felbontása, normálfeszültség, nyírófeszültség. A test egy rögzített P pontjában az $\mathbf{n}$ normálisú felüleletelemen ébredő feszültségvektort $\boldsymbol{\rho}_n$-el vagy $\mathbf{t}_n$-el szokás jelölni. Ez a jelölésmód, amint arra már fentebb utaltunk, külön is hangsúlyozza, hogy a P pontbeli feszültségvektor az $\mathbf{n}$ normális függvénye. A bevezetett jelöléssel a (2.64) összefüggés a

$$\boldsymbol{\rho}_{-n} = -\boldsymbol{\rho}_n \tag{2.65}$$

alakba írható át.

A P pontban az $\mathbf{n}$ normálisú felüleletelemen ébredő feszültségvektor felbontható egy normális irányú $\boldsymbol{\rho}_{n||}$ és egy arra merőleges $\boldsymbol{\rho}_{n\perp} = \boldsymbol{\tau}_n$ összetevőre:

$$\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{\rho}_{n||} + \boldsymbol{\rho}_{n\perp} = \boldsymbol{\rho}_{n||} + \boldsymbol{\tau}_n \tag{2.66}$$

ahol, tekintettel a kétszeres vektorszorzatok kifejtési tételére is

$$\boldsymbol{\rho}_{n||} = (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\rho}_n)\,\mathbf{n} = \sigma_n \mathbf{n} \tag{2.67a}$$

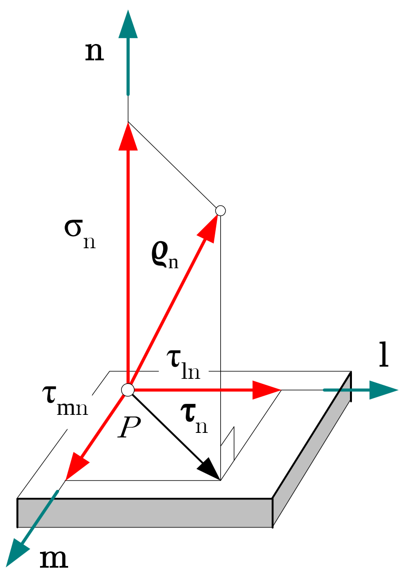
és

$$\boldsymbol{\rho}_{n\perp} = \boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\rho}_n - (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\rho}_n)\,\mathbf{n} = (\mathbf{n}\times\boldsymbol{\rho}_n)\times\mathbf{n}\,. \tag{2.67b}$$

Ami a jelöléseket és elnevezéseket illeti a

$$\sigma_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\rho}_n \tag{2.68}$$

feszültségkoordináta az un. *normálfeszültség*. Ez pozitív, zérus és negatív is lehet. Az érintősíkban fekvő és



2.17. ábra.

$$\tau_n = |\boldsymbol{\tau}_n| = \sqrt{\boldsymbol{\rho}_n^2 - \sigma_n^2} \geq 0 \tag{2.69}$$

abszolutértékű τ_n összetevőt *nyírófeszültségnek* (más elnevezéssel *csúsztatófeszültségnek*) nevezzük. A 2.17. ábra a P ponthoz kötött és az $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{l}$ vektorok által kifeszített jobbsodratú kartéziuszi KR-ben ($\mathbf{m}$ és $\mathbf{l}$ a felületelem síkjában fekszik és a mondottaknak megfelelően

$$|\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = |\mathbf{l}| = 1\,, \qquad \mathbf{n}\cdot\mathbf{m} = \mathbf{m}\cdot\mathbf{l} = \mathbf{l}\cdot\mathbf{n} = 0\,,$$
$$\mathbf{m}\times\mathbf{l} = \mathbf{n}\,)$$

szemlélteti a $\boldsymbol{\rho}_n$ vektor felbontását. Leolvasható az ábráról, hogy

$$\boldsymbol{\rho}_n = \sigma_n\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n = \sigma_n\mathbf{n} + \tau_{mn}\mathbf{m} + \tau_{ln}\mathbf{l}\,. \tag{2.70}$$

Vegyük észre, hogy a σ_n normálfeszültség egyetlen indexe a feszültség irányát (a felületelem normálisát) azonosítja. A τ_{mn} és τ_{ln} nyírófeszültségek első indexe a nyírófeszültség irányát adja meg, a második index pedig ismét azon felületelem normálisát azonosítja, amelyben a nyírófeszültség fekszik.

Ha az $\mathbf{n}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{l}$ vektorok helyére rendre $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ -t (a pozitív x tengely felel meg a normálisnak), $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ és $\mathbf{e}_x$ -et (a pozitív y tengely felel meg a normálisnak), végezetül $\mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_x$ és $\mathbf{e}_y$ -t (a pozitív z tengely felel meg a normálisnak) gondolunk, akkor

$$\boldsymbol{\rho}_x = \sigma_x\mathbf{e}_x + \tau_{yx}\mathbf{e}_y + \tau_{zx}\mathbf{e}_z\,, \tag{2.71a}$$
$$\boldsymbol{\rho}_y = \tau_{xy}\mathbf{e}_x + \sigma_y\mathbf{e}_y + \tau_{zy}\mathbf{e}_z \tag{2.71b}$$

és

$$\boldsymbol{\rho}_z = \tau_{xz}\mathbf{e}_x + \tau_{yz}\mathbf{e}_y + \sigma_z\mathbf{e}_z \tag{2.71c}$$

a feszültségvektor felbontása az x, y és z normálisú elemi felületeken.

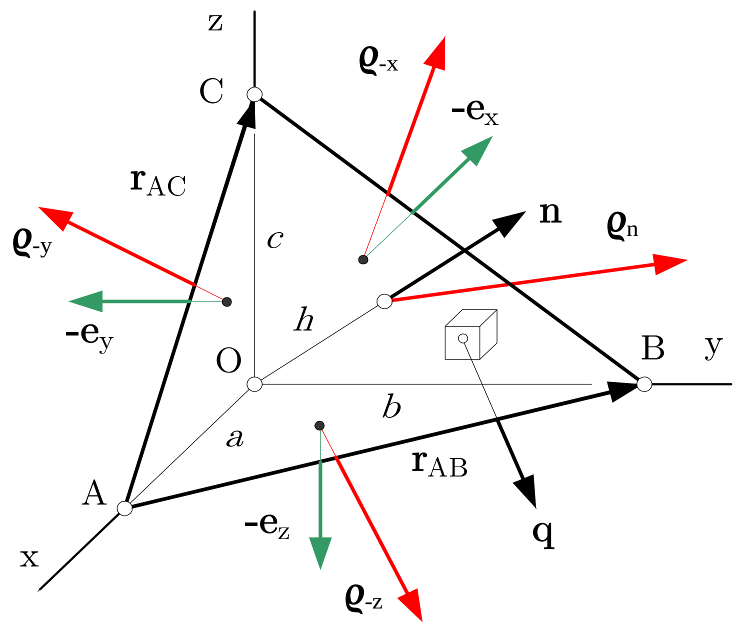
2.3.3. Cauchy tétele, feszültségtenzor. A jelen szakaszban arra a kérdésre keressük a választ, hogy milyen alakú a szilárd test egy tetszőleges de rögzített P pontjában a

$$\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{\rho}(\mathbf{n})$$

függvény alakja.

A gondolatmenet első lépésében néhány geometriai kérdést tisztázunk. Tekintsük a P pont elemi környezetéből kiragadott és a 2.18. ábrán vázolt elemi tetraédert. A tetraéder x, y és z tengelyekre eső oldaléleinek hossza rendre a, b és c, az elülső lapjához tartozó magassága pedig h. Az yz, zx és xy koordinátasíkokban fekvő oldallapok külső normálisa rendre $-\mathbf{e}_x$, $-\mathbf{e}_y$ és $-\mathbf{e}_z$, területe pedig

$$A_x = \frac{1}{2}bc\,, \qquad A_y = \frac{1}{2}ac \qquad \text{és} \qquad A_z = \frac{1}{2}ab\,. \tag{2.72}$$



2.18. ábra.

Jelölje A_n a homloklap területét és V a tetraéder térfogatát. Legyen továbbá

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y + n_z \mathbf{e}_z; \qquad |\mathbf{n}| = 1$$

az elemi tetraéder homloklapon vett külső normálisa. Leolvasható az ábráról, hogy a homloklap $A_n\mathbf{n}$ területvekora az

$$A_n\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{r}_{AC} = \frac{1}{2}\left(-a\mathbf{e}_x + b\mathbf{e}_y\right) \times \left(-a\mathbf{e}_x + c\mathbf{e}_z\right) =$$
$$= \frac{1}{2}bc\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}ac\mathbf{e}_y + \frac{1}{2}ab\mathbf{e}_z = A_x\mathbf{e}_x + A_y\mathbf{e}_y + A_z\mathbf{e}_z$$

módon számítható. Az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokkal való átszorzással innen az

$$A_x = A_n\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x = n_x A_n\,, \qquad A_y = A_n\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_y = n_y A_n \qquad \text{és} \qquad A_z = A_n\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z = n_z A_n \tag{2.73}$$

képletek következnek. Mivel n_x, n_y és n_z az $\mathbf{n}$ normális x, y és z tengelyekkel bezárt szögeinek koszinusza a utóbbi egyenletekhez világos geometriai tartalom tartozik. Eszerint A_x, A_y és A_z rendre az A_n homloklap vetülete az yz, zx és xy koordinátasíkokra.

A gondolatmenet második részében megvizsgáljuk az elemi tetraéder egyensúlyi állapotát.

Mivel a szilárd test egyensúlyi állapotban van, logikus az a feltevés, hogy bármely része, azaz a kiragadott elemi tetraéder is egyensúlyi állapotban van. Az elemi tetraéder felületét alkotó $-\mathbf{e}_x$, $-\mathbf{e}_y$, -$\mathbf{e}_z$ és $\mathbf{n}$ külső normálisú lapokon a

$$\boldsymbol{\rho}_{-x} = -\boldsymbol{\rho}_x\,, \qquad \boldsymbol{\rho}_{-y} = -\boldsymbol{\rho}_y\,, \qquad \boldsymbol{\rho}_{-z} = -\boldsymbol{\rho}_z \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\rho}_n$$

feszültségek, mint felületi ER – a képletek írása során figyelembe vettük a (2.65) összefüggést is –, a tetraéder térfogatán pedig a $\mathbf{q}$ sűrűségű térfogati ER működik. Az egyensúly (tartós nyugalom) egyik feltétele, hogy az elemi tetraéderre ható teljes ER eredő vektora zérus legyen. Fenn kell tehát állnia az

$$-\int_{A_x} \boldsymbol{\rho}_x \mathrm{d}A - \int_{A_y} \boldsymbol{\rho}_y \mathrm{d}A - \int_{A_z} \boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A + \int_{A_n} \boldsymbol{\rho}_n \mathrm{d}A + \int_V \mathbf{q}\,\mathrm{d}V = 0 \tag{2.74}$$

egyenletnek. Jelölje rendre $\langle\boldsymbol{\rho}_x\rangle$, $\langle\boldsymbol{\rho}_y\rangle$, $\langle\boldsymbol{\rho}_z\rangle$ és $\langle\boldsymbol{\rho}_n\rangle$ a feszültségvektorok A_x, A_y, A_z és A_n oldallapokon vett átlagát. Legyen továbbá $\langle\mathbf{q}\rangle$ a térfogati ER V-n vett átlaga. Az átlagértékek birtokában

$$\int_{A_x} \boldsymbol{\rho}_x \mathrm{d}A = \langle \boldsymbol{\rho}_x \rangle A_x\,, \qquad \int_{A_y} \boldsymbol{\rho}_y \mathrm{d}A = \langle \boldsymbol{\rho}_y \rangle A_y\,, \qquad \int_{A_z} \boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A = \langle \boldsymbol{\rho}_z \rangle A_z$$

és

$$\int_{A_n} \boldsymbol{\rho}_n \mathrm{d}A = \langle \boldsymbol{\rho}_n \rangle A_n\,, \qquad \int_V \mathbf{q}\,\mathrm{d}V = \langle \mathbf{q} \rangle V\,.$$

Az utóbbi képletek (2.74)-be történő helyettesítése és átrendezés után

$$\langle \boldsymbol{\rho}_n \rangle A_n = \langle \boldsymbol{\rho}_x \rangle A_x + \left\langle \boldsymbol{\rho}_y \right\rangle A_y + \langle \boldsymbol{\rho}_z \rangle A_z - \langle \mathbf{q} \rangle V \tag{2.75}$$

az egyensúlyi feltétel alakja. A tetraéder térfogatát adó $V = A_n h/6$, valamint a (2.73) képletek helyettesítésével

$$\langle \boldsymbol{\rho}_n \rangle A_n = \langle \boldsymbol{\rho}_x \rangle n_x A_n + \left\langle \boldsymbol{\rho}_y \right\rangle n_y A_n + \langle \boldsymbol{\rho}_z \rangle n_z A_n - \langle \mathbf{q} \rangle \frac{A_n h}{6}$$

majd az A_n-el való osztással a

$$\langle \boldsymbol{\rho}_n \rangle = \langle \boldsymbol{\rho}_x \rangle n_x + \left\langle \boldsymbol{\rho}_y \right\rangle n_y + \langle \boldsymbol{\rho}_z \rangle n_z - \langle \mathbf{q} \rangle \frac{h}{6} \tag{2.76}$$

képletet kapjuk. Vegyük most az utóbbi egyenlet határértékét, ha a $h \to 0$, és a határátmenet során nem változik az $\mathbf{n}$ normális iránya (az A_n homloklap önmagával párhuzamosan mozog a P pontra). Ekkor a $\langle \boldsymbol{\rho}_n \rangle$, $\langle \boldsymbol{\rho}_x \rangle$, $\left\langle \boldsymbol{\rho}_y \right\rangle$ és $\langle \boldsymbol{\rho}_z \rangle$ átlagértékek a feszültségvektorok P pontbeli $\boldsymbol{\rho}_n$, $\boldsymbol{\rho}_x$, $\boldsymbol{\rho}_y$ és $\boldsymbol{\rho}_z$ értékeihez tartanak, az utolsó tagnak pedig, $\mathbf{q}$ feltételezett korlátossága miatt, zérus a határértéke. Fennáll tehát a P pontban a

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{\rho}_x n_x + \boldsymbol{\rho}_y n_y + \boldsymbol{\rho}_z n_z} \tag{2.77}$$

egyenlet. Tovább alakítható a fenti eredmény, ha figyelembe vesszük az $n_x = \mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}$, $n_y = \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}$ és $n_z = \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}$ képleteket, valamint a diádikus szorzatokkal kapcsolatos szabályokat – lásd az (1.28)-ra vezető gondolatmenet utolsó előtti lépését:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\rho}_n &= \boldsymbol{\rho}_x (\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{n}) + \boldsymbol{\rho}_y (\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n}) + \boldsymbol{\rho}_z (\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{n}) = (\boldsymbol{\rho}_x \circ \mathbf{e}_x) \cdot \mathbf{n} + \left(\boldsymbol{\rho}_y \circ \mathbf{e}_y\right) \cdot \mathbf{n} + (\boldsymbol{\rho}_z \circ \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{n} = \\ &= \underbrace{\left[\boldsymbol{\rho}_x \circ \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\rho}_y \circ \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\rho}_z \circ \mathbf{e}_z\right]}_{\boldsymbol{T}} \cdot \mathbf{n}\,. \end{aligned}$$

Az utóbbi képletben álló

$$\boxed{\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\rho}_x \circ \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\rho}_y \circ \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\rho}_z \circ \mathbf{e}_z} \tag{2.78}$$

tenzort, Cauchy nyomán, *feszültségtenzornak* nevezzük. A feszültségtenzor segítségével

$$\boxed{\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{T} \cdot \mathbf{n}} \tag{2.79}$$

a P pontbeli $\mathbf{n}$ normálisú lapon a feszültségvektor. Szavakban: a $\boldsymbol{\rho}_n$ vektor homogén lineáris vektor-vektor függvénye a P pontbeli $\mathbf{n}$ normálvektornak. Ez az eredmény Cauchy tétele.

A (2.71a,b,c) és (2.76) összefüggések alapján

$$\boxed{\underline{\mathbf{T}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\boldsymbol{\rho}}_x & \underline{\boldsymbol{\rho}}_y & \underline{\boldsymbol{\rho}}_z \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}} \tag{2.80}$$

a feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR-ben.

A tetraéder egyensúlyának második feltétele, hogy a tetraéder oldallapjain és térfogatán működő ER nyomatéka egy adott pontra, mondjuk az O origóra zérus legyen. Ebből a feltételből – a formális igazolást a **2.4.** Mintafeladatra hagyjuk, egy elemi igazolást pedig a jelen szakasz végén közlünk – az következik, hogy zérus a feszültségi tenzor vektorinvariánsa, azaz

$$\boxed{\mathbf{t}_a = -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\rho}_x \times \mathbf{e}_x + \boldsymbol{\rho}_y \times \mathbf{e}_y + \boldsymbol{\rho}_z \times \mathbf{e}_z\right) = 0\,.} \tag{2.81}$$

Az 1.4.2. szakaszban megmutattuk, hogy a vektorinvariáns eltűnéséből a tenzor szimmetriája következik és szimmetrikus tenzor esetén, amint az (1.49)-ből azonnal látszik, a tenzor mátrixa is szimmetrikus, azaz

$$\boxed{\tau_{xy} = \tau_{yx}\,, \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \text{és} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}\,.} \tag{2.82a}$$

vagy ami ugyanaz, de KR független alak:

$$\boxed{\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^T\,.} \tag{2.82b}$$

A feszültségi tenzor ismeretében a (2.68) és (2.79) képletek egybevetéséből

$$\boxed{\sigma_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\rho}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}} \tag{2.83a}$$

a normálfeszültség, a (2.70) és (2.79) képletek alapján pedig

$$\boxed{\tau_{mn} = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\rho}_n = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}} \tag{2.83b}$$

a nyírófeszültség az n normálisú elemi felületen felvett m irányban. A feszültségi tenzor szimmetriája miatt – valójában a szimmetrikus tenzorokkal kapcsolatos $(1.38)_2$ összefüggés alapján –, ha $|\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 1$ és $\mathbf{m}\cdot\mathbf{n} = 0$ (azaz egymásra merőlegesek az $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ egységvektorok), akkor

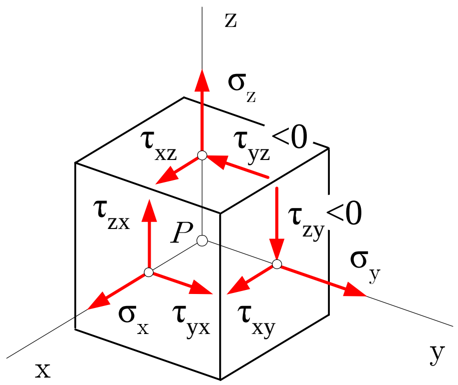
$$\tau_{mn} = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{m} = \tau_{nm}\,. \tag{2.84}$$

A feszültségi állapottal és a feszültségi tenzorral kapcsolatosan, összefoglalásszerűen, az alábbiakra érdemes felhívni a figyelmet.

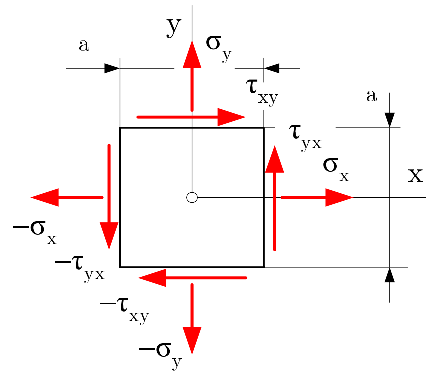
1. Bár a feszültségi tenzor levezetése során az xyz KR-ben tekintettük az elemi tetraéder egyensúlyát a gondolatmenet eredményeként kapott (2.79) összefüggés KR független, azaz maga a feszültségtenzor is KR független vagyis objektív mennyiség, amely a másodrendű tenzorokra vonatkozó transzformációs szabályokkal bármely más KR-be áthelyezhető.
2. A (2.83a,b) és (2.84) képletek természetesen akkor is érvényben maradnak, ha $\mathbf{n} = \mathbf{e}_n$, $\mathbf{m} = \mathbf{e}_n$; $n, m{=}x, y, z$; $n{\neq}m$. Vegyük azt is észre, hogy az említett összefüggések valójában az (1.84) képletekkel adott transzformációs szabályok.
3. Visszautalva a (2.78) és (2.79) képletekre azt mondhatjuk, hogy a test P pontjában felvett három egymásra kölcsönösen merőleges elemi felületen – jelölje az említett elemi felületek jobbsodratú kartéziuszi KR-t kifeszítő normális egységvektorait, mondjuk, $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, és $\mathbf{e}_z$ – ébredő $\boldsymbol{\rho}_x$, $\boldsymbol{\rho}_y$ és $\boldsymbol{\rho}_z$ feszültségvektorok, ezek egymástól független hat skaláris koordinátája (szimmetria), illetve a P pontban vett $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_P$ feszültségi tenzor egyértelműen meghatározza a P pontra illeszkedő $\mathbf{n}$ normálisú felületelemen ébredő $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektort, következőleg a P pont és elemi környezete feszültségi állapotát.

Megjegyezzük hogy a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor az $\mathbf{r}$ helyvektor függvénye a szilárd test által kitöltött V térfogati tartományon belül. Nem lehet tetszőleges, hiszen mind a szilárd test egésze, mind pedig annak részei tartós nyugalomban kell hogy legyenek a terhelési folyamat végén. Arra a kérdésre, hogy milyen feltételek következnek az ehhez kapcsolódó egyensúlyi követelményekből a 6. Fejezetben adunk választ.

A feszültségi állapot, illetve az azt meghatározó feszültségi tenzor szemléltetésére a pont elemi környezetét megjelenítő elemi kocka nyújt lehetőséget. Az érzékletesebb ábrázolás kedvéért nem a P ponton átmenő elemi felületekre, hanem – amint azt a 2.19. ábra mutatja – a P pont környezetéből kiragadott elemi kocka felénk néző $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ normálisú lapjainak súlypontjaira rajzoltuk rá a $\boldsymbol{\rho}_x$, $\boldsymbol{\rho}_y$ és $\boldsymbol{\rho}_z$ feszültségvektorok koordinátáit. Az így feltüntetett feszültségek valójában az elemi kocka lapjain működnek, de mivel a kocka méretei infinitezimálisak, gyakorlatilag megegyeznek a P pontban működő feszültségekkel. Vegyük azt is észre, hogy a $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ feszültségkoordinátákat negatív előjelűnek tételeztük fel az ábrán.



2.19. ábra.



2.20. ábra.

A 2.19. ábra felülnézetben mutatja a P pont környezetéből kiragadott a $(a \ll 1)$ oldalélű elemi kockát valamint az xy síkban működő összes feszültségkoordinátát (vagyis nemcsak az $\mathbf{e}_x$ és $\mathbf{e}_y$ normálisú hanem a $-\mathbf{e}_x$ és $-\mathbf{e}_y$ normálisú lapokon ébredő feszültségkoordinátákat is). Mivel az elemi kocka egyensúlyban van az oldallapokon működő feszültségek egyensúlyi ER-t alkotnak, következőleg a z tengelyre vett nyomatékösszeg zérus kell legyen:

$$m_a = a\left(a^2\tau_{yx}\right) - a\left(a^2\tau_{xy}\right) = 0\,,$$

ahonnan

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}\,.$$

Ugyanilyen módon, az x és y tengelyekre felírt nyomatéki egyenletekből kapjuk, hogy

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \qquad \text{és} \qquad \tau_{zx} = \tau_{xz}\,,$$

vagyis valóban szimmetrikus a feszültségi tenzor. Az utóbbi három összefüggés *a τ feszültségek dualitása* néven ismert.

2.3.4. A feszültségi tenzor főtengelyproblémája. A 2.17. ábra a P pont $\mathbf{n}$ normálisú felületelemén működő $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor normálirányú és a felületelem síkjában fekvő részekre való felbontását szemlélteti:

$$\boldsymbol{\rho}_n = \sigma_n \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n\,.$$

Ezen a ponton logikus kérdésként merül fel, hogy létezik-e olyan n irány, amelyre nézve $\boldsymbol{\rho}_n = \sigma_n \mathbf{n}$ azaz zérus a τ_n nyírófeszültség. Ha létezik ilyen irány, akkor

$$\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{T} \cdot \mathbf{n} = \sigma_n \mathbf{n} = \boldsymbol{\rho}_{n||} \tag{2.85}$$

azaz

$$(\boldsymbol{T} - \sigma_n \boldsymbol{E}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}\,. \tag{2.86}$$

Az utóbbi egyenlet, amint azt az $\boldsymbol{A}$ tenzor főtengelyproblémája esetén már láttuk, azonnal következik a szimmetrikus $\boldsymbol{W}$ tenzor sajátértékfeladatával kapcsolatos (1.60) egyenletből, ha a $\boldsymbol{W}$ helyére a szimmetrikus $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzort, a λ helyére pedig a σ_n-t írjuk. Ez egyben azt is jelenti, hogy a szimmetrikus tenzorok sajátértékfeladatával kapcsolatos és az 1.6. szakaszban részletezett valamennyi eredmény itt is érvényes. A szóhasználatban jelentkező eltérések miatt az alábbiakat érdemes ehelyütt megismételni.

A $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzorral kapcsolatos (2.86) sajátértékfeladatot *a feszültségi tenzor főtengelyproblémájának*, a σ_n sajátértékeket *főfeszültségeknek*, a kapott n irányokat *feszültségi főirányoknak* szokás nevezni.

A $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor főtengelyproblémájának legalább három megoldása van a főirányokra nézve. Ha csak három a megoldások száma, akkor ezek az irányok kölcsönösen merőlegesek egymásra. Ha több mint három a megoldások száma, akkor végtelen sok megoldás van de mindig kiválasztható ezek közül három egymásra kölcsönösen merőleges megoldás. A σ_n $(n = 1,2,3)$ főfeszültségeket nagyság szerint rendezettnek tekintjük, vagyis úgy választjuk meg az indexüket, hogy fennálljon az

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \tag{2.87}$$

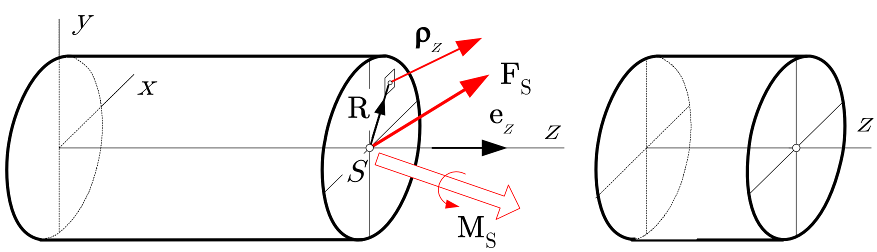
reláció. A vonatkozó $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ irányvektorokat pedig úgy érdemes megválasztani, hogy azok jobbsodratú kartéziuszi KR-t alkossanak. Ez a választás mindig lehetséges.

A feszültségi főirányokat megadó $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ irányvektorok által kifeszített kartéziuszi KR-ben, tekintettel a (2.85) összefüggésre, $\boldsymbol{\rho}_1 = \sigma_1\mathbf{n}_1$, $\boldsymbol{\rho}_2 = \sigma_2\mathbf{n}_2$ és $\boldsymbol{\rho}_3 = \sigma_3\mathbf{n}_3$ a feszültségvektorok értéke, következésképp

$$\underset{(3\times 3)}{\underline{\mathbf{T}}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\boldsymbol{\rho}}_1 & \underline{\boldsymbol{\rho}}_2 & \underline{\boldsymbol{\rho}}_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \sigma_1\underline{\mathbf{n}}_1 & \sigma_2\underline{\mathbf{n}}_2 & \sigma_3\underline{\mathbf{n}}_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \tag{2.88}$$

vagyis a feszültségi tenzor mátrixa diagonális.

2.3.5. Feszültségi eredők. A belső ER jellemzésére, speciális alakú testeknél, így például rudak, lemezek és héjak esetén, a feszültségi tenzor mellett további mennyiségeket szokás bevezetni általában azzal a céllal, hogy a feladat független változóinak számát csökkenteni lehessen. Ezek a mennyiségek mindig valamely felületen, vagy felületszakaszon ébredő feszültségek, mint felületen megoszló ER-ek eredői – eredő erő és erőpár – és ez okból a szakaszcímnek megfelelően feszültségi eredők – feszültségi eredő erő, feszültségi eredő erőpár – a szokásos nevük.



2.21. ábra.

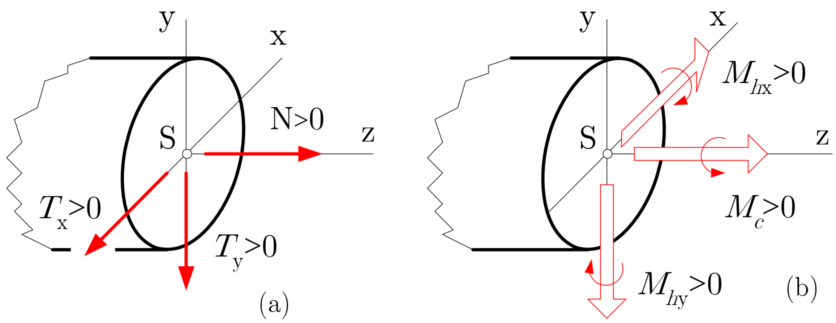
A 2.21. ábrán vázolt prizmatikus rúd esetén az xyz KR z tengelye a rúd hossztengelye. A gondolatban kettévágott rúd baloldali részén, az $\mathbf{e}_z$ normálisú keresztmetszeten megoszló $\boldsymbol{\rho}_z$ sűrűségvektorú belső ER eredője és a keresztmetszet súlypontjára vett nyomatéka (feszültségi eredő erő és feszültségi eredő erőpár) az

$$\mathbf{F}_S = N\mathbf{e}_z - T_x\mathbf{e}_x - T_y\mathbf{e}_y = \int_A \boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A = \int_A (\sigma_z\mathbf{e}_z + \tau_{xz}\mathbf{e}_x + \tau_{yz}\mathbf{e}_y)\, \mathrm{d}A\,, \tag{2.89}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_S = M_c\mathbf{e}_z + M_{hx}\mathbf{e}_x - M_{hy}\mathbf{e}_y = \int_A \mathbf{R}\times\boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A = \int_A \mathbf{R}\times(\sigma_z\mathbf{e}_z + \boldsymbol{\tau}_z)\,\mathrm{d}A = \\ = \int_A (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)\times\sigma_z\mathbf{e}_z\mathrm{d}A + \int_A (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)\times(\tau_{xz}\mathbf{e}_x + \tau_{yz}\mathbf{e}_y)\,\mathrm{d}A \end{aligned} \tag{2.90}$$

összefüggésekből számíthatók. Az első képlet baloldalán az $\mathbf{F}_S$ eredő erő összetevőkre történő felbontásában N, T_x és T_y rendre a pozitív $\mathbf{e}_z$ (vagy z) normálisú keresztmetszeten (röviden a pozitív keresztmetszeten) ébredő pozitív *rudererő*, valamint a pozitív x és y irányú *nyíróerő*. Ezeket az összetevőket a 2.22.a ábra külön is szemlélteti. A második képlet baloldalán az $\mathbf{M}_S$ eredő erőpár összetevőkre történő felbontásában M_c, M_{hx} és M_{hy} rendre a pozitív keresztmetszeten ébredő pozitív *csavarónyomaték*, illetve a pozitív x és y irányú *hajlítónyomaték*. Ezeket az összetevőket a 2.22.b ábra szemlélteti. Az $\mathbf{R}$ vektor a felületelem középpontjának a keresztmetszet S súlypontjára vonatkoztatott helyvektora.

Az N, T_x és T_y belső erők, valamint az M_c, M_{hx} és M_{hy} nyomatékok a Statika című tantárgy keretei között megismert *igénybevételek*.



2.22. ábra.

Az $\mathbf{F}_S$-t adó (2.89) jobb és baloldalának egybevetéséből következik, hogy

$$N = \int_A \sigma_z \mathrm{d}A\,, \qquad T_x = -\int_A \tau_{xz} \mathrm{d}A \qquad \text{és} \qquad T_y = -\int_A \tau_{yz} \mathrm{d}A\,. \tag{2.91}$$

Ugyanilyen módon kapjuk, az $\mathbf{M}_S$-t adó (2.90)-ből, hogy

$$M_c \mathbf{e}_z = \int_A \mathbf{R} \times \boldsymbol{\tau}_z \mathrm{d}A = \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})\,\mathrm{d}A\,\mathbf{e}_z \quad \text{azaz} \quad M_c = \int_A (x\tau_{yz} - y\tau_{xz})\,\mathrm{d}A \tag{2.92a}$$

és

$$M_{hx} = \int_A y\sigma_z \mathrm{d}A\,, \qquad \text{valamint} \qquad M_{hy} = \int_A x\sigma_z \mathrm{d}A\,. \tag{2.92b}$$

Amint arra fentebb utaltunk, az $\mathbf{F}_S$ feszültségi eredő és az $\mathbf{M}_S$ feszültségi eredő erőpár, a feszültségekkel ellentétben, amelyek az x, y és z koordináták függvényei, csak a rúd középvonala mentén mért z koordinátától függenek, azaz

$$\mathbf{F}_S = \mathbf{F}_S(z) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{M}_S = \mathbf{M}_S(z)\,.$$

Megjegyezzük, hogy a jobboldali rúdrész -$\mathbf{e}_z$ normálisú keresztmetszetén $-\boldsymbol{\rho}_z$ a feszültségvektor, Következőleg

$$-\mathbf{F}_S = -\int_A \boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A \qquad \text{és} \qquad -\mathbf{M}_S = -\int_A \mathbf{R} \times \boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A \tag{2.93}$$

a feszültségi eredő és feszültségi eredő erőpár.

Tegyük fel, hogy ismeretes a rúdra ható teljes külső ER (a terhelő ER és a támasztó ER). Ez esetben a belső erők azaz a feszültségi eredő és feszültségi eredő erőpár, illetve ezek koordinátái az igénybevételek anélkül meghatározhatók a kiragadott rúdrészre ható külső és belső ER-ek mechanikai egyensúlyának feltételeiből, hogy előtte a $\boldsymbol{\rho}_z$ feszültségek megoszlása a keresztmetszeteken ismert lenne.

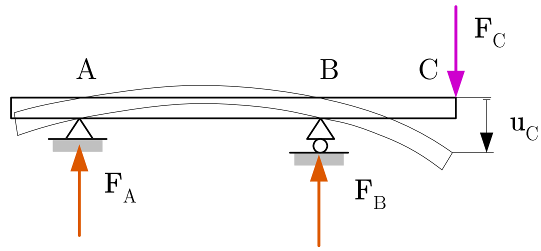
Ezen az előnyös lehetőségen alapult az igénybevételek számításának a Statika című tárgyban megismert módszere, és ezen a lehetőségen nyugszik az a szilárdságtanban végigvonuló megoldási módszer, hogy első lépésben a keresztmetszetek belső erőit, az igénybevételeket határozzuk meg és ezek ismeretében számítjuk a keresztmetszeteken megoszló feszültségeket.

Az olyan szilárdságtani feladatokat melyek esetén a támasztóerőrendszer és a feszültségi eredők, így rudaknál az igénybevételek, a test (szerkezet) egészére illetve részeire felírt egyensúlyi egyenletekből számíthatók anélkül, hogy a test (szerkezet) alakváltozási állapotát vizsgálni kellene, *statikailag határozott feladatoknak* nevezzük. Ellenkező esetben *statikailag határozatlan* a feladat.

2.4. Energetikai állapot

2.4.1. A belső ER munkája. A szilárd test pontjai elmozdulnak a terhelés hatására. Ezen mozgás során munkát végez a test felületén és térfogatán működő külső ER. A 2.23. ábrán szemléltetett egyenes középvonalú kéttámaszú tartó meggörbül a rajta működő $\mathbf{F}_C$ koncentrált erő hatására (a meggörbült alakot vékony vonallal rajzoltuk meg) miközben az erő C támadáspontja $\mathbf{u}_C$ értékkel elmozdul és az $\mathbf{F}_C$ erő munkát végez a mozgás során.

Maga a teljes külső ER az $\mathbf{F}_C$ terhelőerőt, valamint az $\mathbf{F}_A$ és $\mathbf{F}_B$ támasztóerőket foglalja magába. Az utóbbiak azonban nem végeznek munkát mivel támadáspontjuk a megtámasztások miatt nem mozdul el függőleges irányban. Az a körülmény, hogy a támasztó ER nem végez munkát nemcsak a fenti esetben igaz hanem számos szilárdságtani feladat jellemzője.



2.23. ábra.

Tegyük fel, hogy a terhelési folyamat az időben igen lassan játszódik le, azaz kvázistatikus a terhelés. A tartó a terhelés előtt (a t_0 időpillanatban) és a terhelés után (a t_1 időpillanatban) egyaránt nyugalmi állapotban van, tehát mindkét esetben zérus a kinetikai energiája:

$$T_0 = T_1 = 0.$$

Jelölje W_K és W_B a testre ható külső és belső ER munkáját. A dinamika energiatétele szerint a kinetikai energia megváltozása megegyezik a testre ható külső és belső ER munkájának összegével

$$0 = T_1 - T_0 = W_K + W_B\,, \qquad \text{ahonnan} \qquad W_B = -W_K \tag{2.94}$$

vagyis a belső ER által a test alakváltozása során végzett munka a külső ER munkájának ellentettje.

2.4.2. Alakváltozási energia. Általános esetben a külső ER munkája részben visszanyerhető alakváltozási energiává részben pedig hővé alakul át. Kitüntetett szerepük van ebben a tekintetben a rugalmas testeknek mivel ezek esetén a külső ER munkája a teljes egészében visszanyerhető alakváltozási energiává alakul át. Mivel a szilárd testek a terhelés egy kezdeti tartományában rugalmas testként viselkednek az a lehetőség hogy a teljes alakváltozási energia visszanyerhető nagy jelentőségű a szilárdságtanban.

Jelölje u a térfogategységben felhalmozódó *fajlagos alakváltozási energiát* (fajlagos belső energiát). A test teljes alakváltozási energiájára nézve – ezt U jelöli – , az előzőek alapján teljesül az

$$U = \int_V u\,\mathrm{d}V = W_K = -W_B \tag{2.95}$$

összefüggés. Az *elemi környezet energetikai állapotát* a u fajlagos energiasűrűség határozza meg, amely pontról pontra változik. Számításának kérdésére a későbbiekben még visszatérünk.

2.5. Az elemi környezet szilárdságtani állapota

Szilárd test kis alakváltozásai esetén a test egy kiragadott anyagi P pontja, illetve a P pont elemi környezete szilárdságtani állapotán

– elmozdulásállapotának,
– alakváltozási állapotának,
– feszültségi állapotának, valamint
– energetikai állapotának

összességét értjük. A felsorolt négy állapot mindegyike megadható a P ponthoz kötött mennyiségekkel:

– az elmozdulásállapot a P pont $\mathbf{u}$ elmozdulásvektorával és az elmozdulásmező P pontban vett $\boldsymbol{U}$ derivált tenzorával,

– az alakváltozási állapot a P pontban vett $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzorral,
– az feszültségi állapot a P pontban vett $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzorral,
– az energetikai állapot pedig az u fajlagos alakváltozási energiával.

Az $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{T}$ tenzorok illetve az u fajlagos alakváltozási energia nem függetlenek egymástól. A közöttük fennálló összefüggések közül egyet már ismerünk – az $\boldsymbol{A}$ tenzor az $\boldsymbol{U}$ tenzor szimmetrikus része – a további összefüggések tisztázására pedig a későbbiekben kerül sor.

2.6. Test szilárdságtani állapota

Szilárd test szilárdságtani állapotán a szilárd testet alkotó anyagi pontok illetve ezek elemi környezetei szilárdságtani állapotának összességét értjük. A test szilárdságtani állapotát kis alakváltozáskor

– az $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ elmozdulásmező, vagy az $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\mathbf{r})$ derivált tenzormező és egy tetszőleges pont elmozdulásvektora,
– az $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\mathbf{r})$ alakváltozási tenzormező,
– a $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{r})$ feszültségi tenzormező és
– a fajlagos alakváltozási energiát adó $u = u(\mathbf{r})$ skalármező

határozza meg.

Mező alatt valamely tartományban (jelen esetben a vizsgált szilárd test által kitöltött tartományban) értelmezett skalár-helyvektor, vektor-helyvektor illetve tenzor-helyvektor függvény a tartomány pontjaiban felvett érékeinek összességét értjük. (Pl. hőmérsékletmező, elmozdulásmező, alakváltozási illetve feszültségi tenzormező).

Az $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ elmozdulásmező, az $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(\mathbf{r})$ derivált tenzormező, az $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\mathbf{r})$ alakváltozási tenzormező, a a $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\mathbf{r})$ feszültségi tenzormező és az $u = u(\mathbf{r})$ alakváltozási energiasűrűség nem független egymástól.

A szilárdságtan alapvető feltételezése, hogy a szilárd test terhelés előtti (alakváltozás előtti) állapotában

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) \equiv 0, \qquad \boldsymbol{U}(\mathbf{r}) \equiv 0, \qquad \boldsymbol{A}(\mathbf{r}) \equiv 0, \qquad \boldsymbol{T}(\mathbf{r}) \equiv 0 \qquad \text{és} \qquad u(\mathbf{r}) \equiv 0\,. \tag{2.96}$$

A szilárd test (2.96) egyenletekkel leírt állapotát természetes állapotnak vagy kezdeti, feszültségmentes állapotnak szokás nevezni.

A konkrét szilárdságtani feladatok megoldása azt jelenti, hogy a vizsgált szerkezetben, szerkezeti elemben, mint szilárd testben az adott terhelések és az előírt elmozdulások (mozgáskorlátozások, megtámasztások) mellett meghatározzuk az elmozdulásmezőt, az alakváltozási és feszültségi tenzormezőt, valamint ha szükséges a fajlagos alakváltozási energiát.

A következőkben az a célunk, hogy előállítsuk azokat az egyenleteket amelyek lehetővé teszik a szilárdságtani feladatok megoldását.

2.7. Mintafeladatok

2.1. Adott az xyz KR-ben egy szilárd test $\mathbf{u}(x,y,z)$ elmozdulásmezeje, valamint P pontjának $\mathbf{r}_P$ helyvektora. Számítsa ki a derivált tenzor, a forgató tenzor és az alakváltozási tenzor mátrixait illetve a merevtestszerű forgás vektorát képletszerűen, majd határozza meg ezek értékét a P pontban. Mekkora az elmozdulásvektor pontos és közelítő értéke közötti eltérés az $\mathbf{r}_Q = \mathbf{r}_P + \mathbf{e}_x$ pontban?

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \underbrace{Cxy^2}_{u_x}\mathbf{e}_x + \underbrace{Cyz^2}_{u_y}\mathbf{e}_y + \underbrace{Czx^2}_{u_z}\mathbf{e}_z; \qquad \mathbf{r}_P = -20\mathbf{e}_x + 30\mathbf{e}_y + 40\mathbf{e}_z\,[\text{mm}], \qquad C = 10^{-5}\,\text{mm}^{-2}$$

Az

$$\mathbf{u}_x = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = Cy^2\mathbf{e}_x + 2Czx\mathbf{e}_z; \quad \mathbf{u}_y = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 2Cxy\mathbf{e}_x + Cz^2\mathbf{e}_y \qquad \text{és} \qquad \mathbf{u}_z = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 2Cyz\mathbf{e}_y + Cx^2\mathbf{e}_z$$

parciális deriváltak felhasználásával a (2.10) képlet alapján

$$\underset{(3\times3)}{\underline{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}_x & \underline{\mathbf{u}}_y & \underline{\mathbf{u}}_z \end{bmatrix} = C\begin{bmatrix} y^2 & 2xy & 0 \\ 0 & z^2 & 2yz \\ 2zx & 0 & x^2 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \underline{\mathbf{U}}_P = \begin{bmatrix} 9 & -12 & 0 \\ 0 & 16 & 24 \\ -16 & 0 & 4 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

a derivált tenzor számításának képlete és P pontbeli értéke. A felbontási tétel alapján kapott (2.34) és (2.36) egyenletekből pedig

$$\underline{\mathbf{\Psi}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}^T\right) = C\begin{bmatrix} 0 & xy & -zx \\ -xy & 0 & yz \\ zx & -yz & 0 \end{bmatrix}; \qquad \underline{\mathbf{\Psi}}_P = \begin{bmatrix} 0 & -6 & 8 \\ 6 & 0 & 12 \\ -8 & -12 & 0 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

a forgató tenzor és

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{U}}^T\right) = C\begin{bmatrix} y^2 & xy & zx \\ xy & z^2 & yz \\ zx & yz & x^2 \end{bmatrix}; \qquad \underline{\mathbf{A}}_P = \begin{bmatrix} 9 & -6 & -8 \\ -6 & 16 & 12 \\ -8 & 12 & 4 \end{bmatrix} 10^{-3}$$

az alakváltozási tenzor mátrixai képletszerűen, valamint a P pontban véve. A (2.34) szerint a merevtestszerű forgás vektorával

$$\underline{\mathbf{\Psi}} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_z & \varphi_y \\ \varphi_z & 0 & -\varphi_x \\ -\varphi_y & \varphi_x & 0 \end{bmatrix}$$

a forgató tenzor mátrixa, írhatjuk tehát, hogy

$$\boldsymbol{\varphi} = -Cyz\mathbf{e}_x - Czx\mathbf{e}_y - Cxy\mathbf{e}_\mathbf{z} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{\varphi}_P = (-12\mathbf{e}_x + 8\mathbf{e}_y + 6\mathbf{e}_\mathbf{z})\,10^{-3}$$

a merevtestszerű forgás vektorának képlete és P pontbeli értéke. A P és Q pontbeli elmozdulásvektorok egyszerű helyettesítéssel adódnak

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_P &= -10^{-5}\times 20\times 30^2\mathbf{e}_x + 10^{-5}\times 30\times 40^2\mathbf{e}_y + 10^{-5}\times 40\times 20^2\mathbf{e}_z = \\ &= -0.18\mathbf{e}_x + 0.48\mathbf{e}_y + 0.16\mathbf{e}_z\,[\text{mm}], \\ \mathbf{u}_Q &= -10^{-5}\times 19\times 30^2\mathbf{e}_x + 10^{-5}\times 30\times 40^2\mathbf{e}_y + 10^{-5}\times 40\times 19^2\mathbf{e}_z = \\ &= -0.171\mathbf{e}_x + 0.48\mathbf{e}_y + 0.1444\mathbf{e}_z\,[\text{mm}].\end{aligned}$$

Az elmozdulásvektor közelítése pedig a (2.19) képlettel számítható

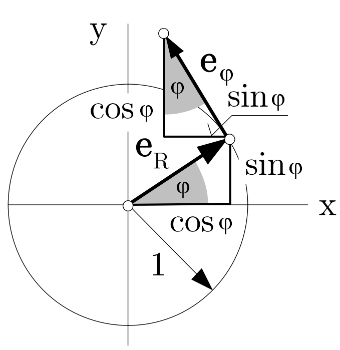
$$\underline{\mathbf{u}}_Q \simeq \underline{\mathbf{u}}_P + \underline{\mathbf{U}}_P\,\Delta\underline{\mathbf{r}} = \begin{bmatrix} -0.18 \\ 0.48 \\ 0.16 \end{bmatrix} + 10^{-3}\begin{bmatrix} 9 & -12 & 0 \\ 0 & 16 & 24 \\ -16 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -0.18 \\ 0.48 \\ 0.16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.009 \\ 0 \\ 0.016 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.171 \\ 0.48 \\ 0.144 \end{bmatrix}\,[\text{mm}]$$

és így

$$\Delta\underline{\mathbf{u}}_Q^T = \underline{\mathbf{u}}_{Q\,\text{pontos}}^T - \underline{\mathbf{u}}_{Q\,\text{közelítő}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.0004 \end{bmatrix}\,[\text{mm}]\,.$$

2.2. A tengelyszimmetrikus feladatok esetén használatos hengerkoordináta-rendszerben (HKR-ben) $\mathbf{u} = u(\mathbf{r}) = u_R(R,z)\mathbf{e}_R(\varphi) + u_z(R,z)\mathbf{e}_z$ alakú az elmozdulásmező. Hogyan számítható ebben az esetben a derivált tenzor, a forgató tenzor és az alakváltozási tenzor?



2.24. ábra.

A HKR lokális bázisait az 1.5. ábra szemlélteti. Az xyz KR és az $R\varphi z$ HKR bázisvektorainak kapcsolata a 2.24. ábráról adódik:

$$\mathbf{e}_R = \cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\varphi\,\mathbf{e}_y\,, \qquad \mathbf{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y \tag{2.97}$$

míg $\mathbf{e}_z$ mindkét KR-ben ugyanaz. Kiolvasható a fenti képletekből, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_R}{\mathrm{d}\varphi} = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_\varphi \tag{2.98a}$$

és

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = -\cos\varphi\,\mathbf{e}_x - \sin\varphi\,\mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_R\,. \tag{2.98b}$$

Mivel HKR-ben

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z \tag{2.99}$$

a nabla operátor alakja, a derivált tenzor (2.14) alatti értelmezése alapján

$$\boldsymbol{U} = \mathbf{u}\circ\nabla = [u_R(R,z)\mathbf{e}_R(\varphi) + u_z(R,z)\mathbf{e}_z]\circ\left[\frac{\partial}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z\right]\,.$$

Innen, annak figyelembevételével, hogy $\mathbf{e}_R$ a φ polárszög függvénye, azaz kihasználva a (2.98a) összefüggést, az

$$\boldsymbol{U} = \underbrace{\left(\frac{\partial u_R}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{\partial u_z}{\partial R}\mathbf{e}_z\right)}_{\mathbf{u}_R} \circ \mathbf{e}_R + \underbrace{\frac{u_R}{R}\mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{u}_\varphi} \circ \mathbf{e}_\varphi + \underbrace{\left(\frac{\partial u_R}{\partial z}\mathbf{e}_R + \frac{\partial u_z}{\partial z}\mathbf{e}_z\right)}_{\mathbf{u}_z} \circ \mathbf{e}_z$$

eredmény következik, amelyben – visszaidézve a másodrendű tenzorokkal kapcsolatos geometriai képet – $\mathbf{u}_R$, $\mathbf{u}_\varphi$ és $\mathbf{u}_z$ rendre az $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_z$ lokális bázisvektorokhoz rendelt képvektor. Következőleg

$$\underset{(3\times 3)}{\underline{\mathbf{U}}} = \left[\begin{array}{ccc} \underline{\mathbf{u}}_R & \underline{\mathbf{u}}_\varphi & \underline{\mathbf{u}}_z \end{array}\right] = \begin{bmatrix} u_{RR} & u_{R\varphi} & u_{Rz} \\ u_{\varphi R} & u_{\varphi\varphi} & u_{\varphi z} \\ u_{zR} & u_{z\varphi} & u_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_R}{\partial R} & 0 & \dfrac{\partial u_R}{\partial z} \\ 0 & \dfrac{u_R}{R} & 0 \\ \dfrac{\partial u_z}{\partial R} & 0 & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.100}$$

a derivált tenzor mátrixa. A felbontási tétel alapján, azaz a (2.34) és (2.36) egyenletekből pedig

$$\underline{\boldsymbol{\Psi}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{U}} - \underline{\mathbf{U}}^T\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_R}{\partial z} - \dfrac{\partial u_z}{\partial R}\right) \\ 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial R} - \dfrac{\partial u_R}{\partial z}\right) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a forgató tenzor és

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{U}} + \underline{\mathbf{U}}^T\right) = \left[\begin{array}{ccc} \underline{\boldsymbol{\alpha}}_R & \underline{\boldsymbol{\alpha}}_\varphi & \underline{\boldsymbol{\alpha}}_z \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \dfrac{1}{2}\gamma_{R\varphi} & \dfrac{1}{2}\gamma_{Rz} \\ \dfrac{1}{2}\gamma_{\varphi R} & \varepsilon_\varphi & \dfrac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ \dfrac{1}{2}\gamma_{zR} & \dfrac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & \varepsilon_z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_R}{\partial R} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_R}{\partial z} + \dfrac{\partial u_z}{\partial R}\right) \\ 0 & \dfrac{u_R}{R} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_z}{\partial R} + \dfrac{\partial u_R}{\partial z}\right) & 0 & \dfrac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.101}$$

az alakváltozási tenzor mátrixa, ahol $\boldsymbol{\alpha}_R$, $\boldsymbol{\alpha}_\varphi$ és $\boldsymbol{\alpha}_z$ a lokális bázist kifeszítő $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokhoz tartozó alakváltozási vektorokat jelöli, ε_R, ε_φ és ε_z az R, φ és z irányú fajlagos nyúlás, γ_{mn} $(m,n{=}R,\varphi,z;\ m\neq n)$ pedig az m,n irányok közötti fajlagos szögváltozás.

2.3. Mutassa meg, hogy a tiszta alakváltozás ellipszoiddá torzítja az elemi gömböt!

Legyen K az elemi gömb sugara, és tegyük fel, hogy a P ponthoz kötött $\xi\eta\zeta$ KR az $\boldsymbol{A}$ tenzor 1, 2 és 3 jelű főtengelyei által kifeszített kartéziuszi KR, amelyben

$$\Delta\mathbf{r} = \xi\mathbf{e}_1 + \eta\mathbf{e}_2 + \zeta\mathbf{e}_3$$

a P pont elemi környezetében fekvő Q pont helyvektora, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ a vonatkozó egységvektorok. Ha a Q pont az elemi gömbön van, akkor

$$\Delta\mathbf{r}^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = K^2\,. \tag{2.102}$$

Ismeretes, hogy az alakváltozás során a $\Delta\mathbf{r}$ vektor végpontjának $\boldsymbol{A}\cdot\Delta\mathbf{r}$ a $\Delta\mathbf{r}$ vektor kezdőpontjához viszonyított elmozdulása a merevtestszerű forgás nélkül. (Az utóbbit nyilván nem kell számba venni, hiszen a merevtestszerű forgás nem eredményez alakváltozást.). A kettő összege adja meg azt a

$$\Delta\mathbf{r}' = \xi'\mathbf{e}_1 + \eta'\mathbf{e}_2 + \zeta'\mathbf{e}_3$$

vektort amivé lesz a $\Delta\mathbf{r}$ vektor az alakváltozás során:

$$\Delta\mathbf{r}' = \Delta\mathbf{r} + \boldsymbol{A}\cdot\Delta\mathbf{r} = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})\cdot\Delta\mathbf{r}\,.$$

A vonatkozó mátrixok kiírásával

$$\begin{bmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\varepsilon_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$$

ahonnan

$$\xi = \frac{\xi'}{1+\varepsilon_1}, \qquad \eta = \frac{\eta'}{1+\varepsilon_2} \qquad \text{és} \qquad \zeta = \frac{\zeta'}{1+\varepsilon_3}.$$

Visszahelyettesítve ezt az eredményt a gömb (2.102) alatti egyenletébe megkapjuk azt a feltételt, amelyet a ξ', η' és ζ' koordináták, vagy ami ugyanaz a $\Delta\mathbf{r}'$ vektor, köteles teljesíteni:

$$\frac{(\xi')^2}{(1+\varepsilon_1)^2} + \frac{(\eta')^2}{(1+\varepsilon_2)^2} + \frac{(\zeta')^2}{(1+\varepsilon_3)^2} = K^2 .$$

Ez az egyenlet ellipszoid egyenlete.

2.5. Határozza meg az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzorhoz tartozó főnyúlásokat, és a tenzor főirányait, ha adott a tenzor mátrixa az xyz KR P pontjában:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 44 & 60 & 0 \\ 60 & -20 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

A megoldás során szinte szószerint ismételhetők az 1.4. Mintafeladat lépései feltéve, hogy $\underline{\mathbf{W}}$ helyére $\underline{\mathbf{A}}$-t, λ helyére pedig ε_n-t gondolunk.

A z irány főirány hiszen $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. A vonatkozó főnyúlást ε_a jelöli. Ez nyilvánvalóan a harmadik oszlop diagonális eleme: $\varepsilon_a = -0.0012$. A (2.59) alapján írható

$$P_3(\lambda) = -\det(\underline{\mathbf{A}} - \varepsilon_n \underline{\mathbf{E}}) = -\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_n & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_n & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_n \end{vmatrix} =$$
$$= \varepsilon_n^3 - A_I \varepsilon_n^2 + A_{II}\varepsilon_n - A_{III} = (\varepsilon - \varepsilon_a)(\varepsilon - \varepsilon_b)(\varepsilon - \varepsilon_c) = 0$$

karakterisztikus egyenletből – A_I, A_{II} és A_{III} az alakváltozási tenzor skalárinvariánsai és mivel nem ismerjük a főnyúlások sorrendjét azokat egyszerűen ε_a, ε_b és ε_c jelöli – helyettesítések után a

$$P_3(\varepsilon_n) = -\begin{vmatrix} 0.0044 - \varepsilon_n & 0.006 & 0 \\ 0.006 & -0.002 - \varepsilon_n & 0 \\ 0 & 0 & -0.0012 - \varepsilon_n \end{vmatrix} =$$
$$= \varepsilon_n^3 - 0.0012\varepsilon_n^2 - 4.768 \times 10^{-5}\varepsilon_n - 5.376 \times 10^{-8} = 0$$

eredmény következik, azaz

$$A_I = \varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c = 0.0012, \qquad A_{II} = -4.768 \times 10^{-5}, \qquad A_{III} = \varepsilon_a\varepsilon_b\varepsilon_c = 5.376 \times 10^{-8},$$

ahol a főtengelyek KR-ét véve alapul és a későbbiek kedvéért kiírtuk képletszerűen is az A_I és A_{III} skalárinvariánsokat. Ha $\varepsilon_n \neq \varepsilon_a$ akkor átoszthatjuk a $P_3(\varepsilon_n) = 0$ karakterisztikus egyenletet az $\varepsilon_n - \varepsilon_a$ gyöktényezővel:

$$\frac{P_3(\varepsilon_n)}{\varepsilon_n - \varepsilon_a} = (\varepsilon_n - \varepsilon_b)(\varepsilon_n - \varepsilon_c) = \varepsilon_n^2 - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)\varepsilon_n + \varepsilon_b\varepsilon_c = 0,$$

ahol

$$\varepsilon_b + \varepsilon_c = A_I - \varepsilon_a = 0.0024 \qquad \text{és} \qquad \varepsilon_b\varepsilon_c = \frac{A_{III}}{\varepsilon_a} = -4.48 \times 10^{-5}.$$

Következésképp az

$$\varepsilon_n^2 - (A_I - \varepsilon_a)\varepsilon_n + \frac{A_{III}}{\varepsilon_a} = \varepsilon_n^2 - 0.0024\varepsilon_n - 4.48 \times 10^{-5} = 0$$

egyenlet megoldása megadja a két hiányzó sajátértéket: ε_b=0.008, ε_c=−0.0056. Nagyság szerint rendezve:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_b = 0.008, \qquad \varepsilon_2 = \varepsilon_a = -0.0012, \qquad \varepsilon_3 = \varepsilon_c = -0.0056$$

és mostmár az is nyilvánvaló, hogy $\mathbf{e}_z = \mathbf{n}_2$. Az $\mathbf{n}_1$ meghatározásához az

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_1 & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} =$$
$$= 10^{-4} \begin{bmatrix} 44 - 10^4\varepsilon_1 & 60 & 0 \\ 60 & -20 - 10^4\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -12 - 10^4\varepsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

azaz a

$$\begin{aligned}-36n_{x1}+60n_{y1}&=0\,,\\ 60n_{x1}-100n_{y1}&=0\,,\\ -92n_{z1}&=0\end{aligned}$$

egyenletrendszert kell megoldani. Nyilvánvaló, hogy választható a második és harmadik egyenlet – az első kettő nem független –, ahonnan

$$n_{x1}=\frac{5}{3}n_{y1}\qquad\text{és}\qquad n_{z1}=0\,.$$

Az utóbbi egyenletek egy megoldását a már normált

$$\mathbf{n}_1=\frac{1}{\sqrt{34}}(5\mathbf{e}_x+3\mathbf{e}_y)$$

vektor adja. Az $\mathbf{n}_3$ a sajátvektorok ortogonalítását és azt figyelembevéve számítható hogy az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{n}_3$ jobbsodratú bázis:

$$\mathbf{n}_3=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2=\frac{1}{\sqrt{34}}(5\mathbf{e}_x+3\mathbf{e}_y)\times\mathbf{e}_z=\frac{1}{\sqrt{34}}(3\mathbf{e}_x-5\mathbf{e}_y)\,.$$

Később látni fogjuk, hogy az ilyen típusú feladatok – vagyis amikor egy főérték ismert – az alakváltozási tenzort grafikusan szemléltető un. Mohr féle kördiagram segítségével is megoldhatók.

2.6. Igazolja, az elemi tetraéderre ható ER-ek egyensúlyi voltát véve alapul, hogy szimmetrikus a feszültségi tenzor.

Az igazolás során feltételezzük, hogy az elemi tetraéder elegendően kicsiny ahhoz, hogy a feszültségvektorok megoszlása a tetraéder lapjain jó közelítéssel állandónak tekinthető. Feltételezzük továbbá, hogy a térfogati ER nyomatéka az O pontra – lásd a 2.18. ábrát – egy nagyságrenddel kisebb mint a tetraéder lapjain ébredő ER-ek ugyanezen pontra vett nyomatéka, és ezért a határátmenet során nem játszik majd szerepet. (Az utóbbi feltevés azon alapul, hogy az eredők minden esetben arányosak a vonatkozó tartomány méretével, és a felület, mint tartomány a hosszméretek négyzetével, a térfogat mint tartomány pedig a hosszméretek köbével arányosan tart zérushoz.)

Ha jó közelítéssel állandónak tekinthető a feszültségvektorok megoszlása az elemi tetraéder lapjain, akkor a

$$-\left\langle\boldsymbol{\rho}_x\right\rangle A_x,\quad -\left\langle\boldsymbol{\rho}_y\right\rangle A_y,\quad -\left\langle\boldsymbol{\rho}_z\right\rangle A_z\quad\text{és}\quad \left\langle\boldsymbol{\rho}_n\right\rangle A_n$$

eredők – ahol, összhangban a korábbi jelöléseinkkel $\langle\boldsymbol{\rho}_x\rangle$, $\langle\boldsymbol{\rho}_y\rangle$, $\langle\boldsymbol{\rho}_z\rangle$ és $\langle\boldsymbol{\rho}_n\rangle$ a feszültségvektorok átlagait jelöli, amelyek most megegyeznek a feszültségvektorok állandóknak tekinthető értékeivel – a lapok S_x, S_y, S_z és S_n súlypontjaiban működnek. A súlypontok O pontra vonatkoztatott helyvektorai – egy háromszög súlypontjának helyvektora a csúcspontok helyvektorai összegének harmada – az

$$\mathbf{r}(S_x)=\frac{1}{3}(\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_C),\quad \mathbf{r}(S_y)=\frac{1}{3}(\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_C),\quad \mathbf{r}(S_z)=\frac{1}{3}(\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B)\quad\text{és}\quad \mathbf{r}(S_n)=\frac{1}{3}(\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_C)$$

képletekből adódnak. Az O pontra vett

$$\mathbf{M}_O=\mathbf{r}(S_x)\times\langle\boldsymbol{\rho}_x\rangle A_x+\mathbf{r}(S_y)\times\langle\boldsymbol{\rho}_y\rangle A_y+\mathbf{r}(S_z)\times\langle\boldsymbol{\rho}_z\rangle A_z+\mathbf{r}(S_n)\times\langle\boldsymbol{\rho}_n\rangle A_n=\mathbf{0}$$

nyomatékösszeg háromszorosa a fenti képletek helyettesítésével, illetve alkalmas bővítéssel a

$$\begin{aligned}3\mathbf{M}_O=-(\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_C-\mathbf{r}_A)\times\langle\boldsymbol{\rho}_x\rangle A_x-(\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_C-\mathbf{r}_B)\times\langle\boldsymbol{\rho}_y\rangle A_y\\ -(\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_C-\mathbf{r}_C)\times\langle\boldsymbol{\rho}_z\rangle A_z+(\mathbf{r}_A+\mathbf{r}_B+\mathbf{r}_C)\times\langle\boldsymbol{\rho}_n\rangle A_n=\mathbf{0}\end{aligned}$$

alakban írható fel, ahol (2.75)-ből adódóan

$$\langle\boldsymbol{\rho}_n\rangle A_n=\langle\boldsymbol{\rho}_x\rangle A_x+\langle\boldsymbol{\rho}_y\rangle A_y+\langle\boldsymbol{\rho}_z\rangle A_z\,,$$

ha a $\mathbf{q}$ nem játszik szerepet. Következőleg

$$3\mathbf{M}_O=\mathbf{r}_A\times\langle\boldsymbol{\rho}_x\rangle A_x+\mathbf{r}_B\times\langle\boldsymbol{\rho}_y\rangle A_y+\mathbf{r}_C\times\langle\boldsymbol{\rho}_z\rangle A_z=\mathbf{0}\,.$$

A továbbiakban vegyük figyelembe, hogy $\mathbf{r}_A=a\mathbf{e}_x$, $\mathbf{r}_B=b\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{r}_C=c\mathbf{e}_z$, majd helyettesítsük a (2.72) képleteket illetve cseréljük fel a szorzótényezők sorrendjét:

$$-\frac{1}{2}\left[\langle\boldsymbol{\rho}_x\rangle\times\mathbf{e}_x+\langle\boldsymbol{\rho}_y\rangle\times\mathbf{e}_y+\langle\boldsymbol{\rho}_z\rangle\times\mathbf{e}_z\right]abc=\mathbf{0}\,.$$

Az abc szorzattal valló átosztás után vegyük a fenti kifejezés határértékét, ha $h\to 0$. Az így kapott

$$\mathbf{t}_a=-\frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\rho}_x\times\mathbf{e}_x+\boldsymbol{\rho}_y\times\mathbf{e}_y+\boldsymbol{\rho}_z\times\mathbf{e}_z\right]=\mathbf{0}$$

eredmény szerint, eltűnik a feszültségi tenzor vektorinvariánsa, azaz szimmetrikus a feszültségi tenzor. Ezt kellett igazolni.

2.7. Mi a $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektorok végpontjainak mértani helye?

Tegyük fel, hogy ismeretes a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor 1, 2 és 3 jelű főtengelyei által kifeszített $\xi\eta\zeta$ kartéziuszi KR, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ és $\mathbf{e}_3$ a vonatkozó egységvektorok. A geometria nyelvét használva, úgy fogalmazhatunk, hogy az

$$\mathbf{n} = n_\xi \mathbf{e}_1 + n_\eta \mathbf{e}_2 + n_\zeta \mathbf{e}_3$$

normálvektorok – által meghatározott

$$n_\xi^2 + n_\eta^2 + n_\zeta^2 = 1$$

egységsugarú gömböt a

$$\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{T} \cdot \mathbf{n}$$

feszültségvektor végpontja által leírt felületre képezi le a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor. Mátrix alakban kiírva – $\rho_{n\xi} = \xi$, $\rho_{n\eta} = \eta$ és $\rho_{n\zeta} = \zeta$ jelöli a feszültségvektor koordinátáit – a

$$\begin{bmatrix} \rho_{n\xi} \\ \rho_{n\eta} \\ \rho_{n\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_\xi \\ n_\eta \\ n_\zeta \end{bmatrix}$$

összefüggés áll fenn, ahonnan

$$n_\xi = \frac{\xi}{\sigma_1}, \qquad n_\eta = \frac{\eta}{\sigma_2} \qquad \text{és} \qquad n_\zeta = \frac{\zeta}{\sigma_3}.$$

Az utóbbi képletek alapján visszahelyettesíthetünk az egységnyi sugarú gömb egyenletébe:

$$\frac{\xi^2}{\sigma_1^2} + \frac{\eta^2}{\sigma_2^2} + \frac{\zeta^2}{\sigma_3^2} = 1\,.$$

Az így kapott egyenlet ellipszoid egyenlete. Ezt az ellipszoidot *feszültségi ellipszoidnak* szokás nevezni.

Még egy megjegyzés érdemel említést.

A gondolatmenet során csak annyit használtunk ki, hogy szimmetrikus a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor. Másként fogalmazva tehát azt mondhatjuk, hogy a szimmetrikus $\boldsymbol{W}$ tenzorral kapcsolatos

$$\mathbf{w}_n = \boldsymbol{W} \cdot \mathbf{n}\,, \qquad |\mathbf{n}| = 1$$

leképezés a $\mathbf{w}_n$ végpontjai által meghatározott ellipszoiddá képezi le az egységsugarú gömböt, bármi is legyen a $\boldsymbol{W}$ tenzor fizikai jelentése. Ilyen módon a fenti eredmény az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzorra is vonatkozik.

2.8. Írja fel a feszültségi tenzort az $R\varphi z$ HKR-ben.

Azt kell visszaidéznünk, hogy az $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_z$ bázisvektorok által kifeszített lokális KR-ben az $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_z$ normálisú síklapokon ébredő

$$\boldsymbol{\rho}_R = \sigma_R \mathbf{e}_R + \tau_{\varphi R} \mathbf{e}_\varphi + \tau_{zR} \mathbf{e}_z\,, \tag{2.103a}$$

$$\boldsymbol{\rho}_\varphi = \tau_{R\varphi} \mathbf{e}_R + \sigma_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \tau_{z\varphi} \mathbf{e}_z \tag{2.103b}$$

és

$$\boldsymbol{\rho}_z = \tau_{Rz} \mathbf{e}_R + \tau_{\varphi z} \mathbf{e}_\varphi + \sigma_z \mathbf{e}_z \tag{2.103c}$$

feszültségvektorok – σ_R, σ_φ és σ_z a normálfeszültségek, $\tau_{R\varphi}=\tau_{\varphi R}$, $\tau_{\varphi z}=\tau_{z\varphi}$ és $\tau_{zR}=\tau_{Rz}$ a nyírófeszültségek, az első index az irányt, a második a normálist azonosítja – egyértelműen meghatározzák, összhangban Cauchy tételével, a feszültségtenzort:

$$\boxed{\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\rho}_R \circ \mathbf{e}_R + \boldsymbol{\rho}_\varphi \circ \mathbf{e}_\varphi + \boldsymbol{\rho}_z \circ \mathbf{e}_z\,.} \tag{2.104}$$

Nyilvánvaló az is, tekintettel a (2.103a,b,c) képletekre, hogy

$$\boxed{\underline{\mathbf{T}} = \underset{(R,\varphi,z)}{\underline{\mathbf{T}}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \underline{\boldsymbol{\rho}}_R & \underline{\boldsymbol{\rho}}_\varphi & \underline{\boldsymbol{\rho}}_z \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ \tau_{\varphi R} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix}} \tag{2.105}$$

a feszültségi tenzor mátrixa. Felhívjuk a figyelmet arra a körülményre, hogy a diádikus előállításban $\mathbf{e}_R$ és $\mathbf{e}_\varphi$ nem állandó, hanem a φ polárszög függvénye – lásd a (2.97) képleteket.

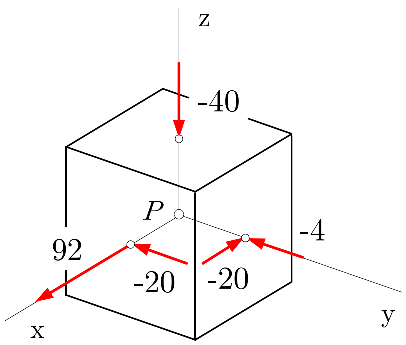
2.9. Adott a feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR-ben:

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 92 & -20 & 0 \\ -20 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix} \left[\mathrm{N/mm^2}\right]$$

Írja fel a feszültségi tenzor diádikus előállítását, szemléltesse a feszültségi állapotot az elemi kockán és számítsa ki az

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{26}}(5\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$$

normálisú síkon ébredő $\boldsymbol{\rho}_n$, τ_n feszültségvektorokat és σ_n normálfeszültséget.



2.25. ábra.

A (2.78) és (2.80) képletek figyelembevételével

$$\boldsymbol{T} = (92\mathbf{e}_x - 20\mathbf{e}_y) \circ \mathbf{e}_x - (20\mathbf{e}_x + 4\mathbf{e}_y) \circ \mathbf{e}_y - 40\mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm^2}}\right]$$

a tenzor diádikus alakja.

A tenzort a 2.25. ábra szemlélteti.

A (2.79), valamint a (2.67a,b) összefüggések alapján

$$\underline{\boldsymbol{\rho}}_n = \underline{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 92 & -20 & 0 \\ -20 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 480 \\ -96 \\ 0 \end{bmatrix} \left[\mathrm{N/mm^2}\right],$$

$$\sigma_n = \boldsymbol{\rho}_n \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{26}(5 \times 480 + 96) = 96 \left[\mathrm{N/mm^2}\right]$$

és

$$\underline{\boldsymbol{\tau}}_n = \underline{\boldsymbol{\rho}}_n - \sigma_n\,\underline{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 480 \\ -96 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{96}{\sqrt{26}} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vagyis az $\mathbf{n}$ irány feszültségi főirány.

Gyakorlatok

2.1. Ismeretes valamely test $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(x,y,z)$ elmozdulásmezeje:

$$\mathbf{u} = -axz^2 z\mathbf{e}_x + axz^2\mathbf{e}_y + b(x^2 - y^2)\mathbf{e}_z\,, \qquad a = 2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{mm^{-2}}\,, \qquad b = 10^{-3}\ \mathrm{mm^{-1}}\,.$$

Határozza meg az $\boldsymbol{U}$ derivált tenzor, a $\boldsymbol{\Psi}$ forgató tenzor és az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor mátrixait.

2.2. Adott az xyz KR-ben egy szilárd test $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(x,y,z)$ elmozdulásmezeje, valamint P pontjának $\mathbf{r}_P$ helyvektora:

$$\mathbf{u}(x,y,z) = -\frac{1}{R}\nu xy\mathbf{e}_x + \frac{1}{2R}\left(\nu x^2 - \nu y^2 - z^2\right)\mathbf{e}_y + \frac{yz}{R}\mathbf{e}_z\,,$$

$$\mathbf{r}_P = 4\mathbf{e}_x - 2\mathbf{e}_y + 5\mathbf{e}_z\ [\mathrm{mm}], \qquad R = 10^4\ \mathrm{mm}, \qquad \nu = 0.25\,.$$

Számítsa ki az $\boldsymbol{U}$ derivált tenzor, a $\boldsymbol{\Psi}$ forgató tenzor és az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor mátrixait illetve a merevtestszerű forgás vektorát képletszerűen, majd határozza meg ezek értékét a P pontban. Szemléltesse a P pontbeli alakváltozási tenzort az elemi triéder segítségével. Számítsa ki az ε_n fajlagos nyúlást és a γ_{mn} fajlagos szögváltozást a P pontban, ha

$$\mathbf{n} = \frac{1}{2}\mathbf{e}_x - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_y \qquad \text{és} \qquad \mathbf{m} = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\mathbf{e}_y\,.$$

Mekkorák a főnyúlások?

2.3. Adott az xyz KR-ben egy szilárd test $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(x,y,z)$ elmozdulásmezeje, valamint P pontjának $\mathbf{r}_P$ helyvektora:

$$\mathbf{u}(x,y,z) = \vartheta z\mathbf{e}_z \times \mathbf{R}, \qquad \mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y\,,$$

$$\mathbf{r}_P = 2\mathbf{e}_x\ [\mathrm{mm}], \qquad \vartheta = 2\cdot 10^{-3}\ \mathrm{mm^{-1}}\,.$$

Határozza meg az $\boldsymbol{U}$ derivált tenzor, a $\boldsymbol{\Psi}$ forgató tenzor és az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor mátrixait a P pontban, számítsa ki az $\mathbf{e}_n = 0.6\mathbf{e}_y + 0.8\mathbf{e}_z$ irányú $\varepsilon_n(P)$ fajlagos nyúlást és szemléltesse az $\boldsymbol{A}_P$ tenzort az elemi triéderen. Mekkorák a főnyúlások a P pontban?

2.4. Válaszolja meg az előző feladat kérdéseit HKR-ben végezve a számításokat. Vegye figyelembe, hogy HKR-ben

$$\mathbf{R} = R\mathbf{e}_R\,, \qquad\qquad R = |\mathbf{R}|\ .$$

2.5. Ismeretesek egy próbatest felületének P pontjában az x, ξ és η tengelyek irányában – mindhárom tengely a próbatest síkfelületén fekszik és az x, y tengelyek között fekvő ξ tengely x tengellyel bezárt szöge $\pi/3$; az η tengely pedig merőleges a ξ tengelyre – mért fajlagos nyúlások: $\varepsilon_x = 2\cdot 10^{-4}$, $\varepsilon_\xi = 0.4\cdot 10^{-4}$ és $\varepsilon_\eta = 4\cdot 10^{-4}$. A z irány az alakváltozási tenzor főiránya. Határozza meg az ε_y fajlagos nyúlás és a γ_{xy} fajlagos szögváltozás értékét.

2.6. Számítsa ki a 2.9. Mintapéldában szereplő feszültségi tenzorhoz tartozó főfeszültségeket és főirányokat. (A 2.5. Mintapélda lépéseit kövesse!)

2.7. Adott a feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR-ben:

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 40 & -32 \\ 0 & -32 & -80 \end{bmatrix} \left[\mathrm{N/mm^2}\right] .$$

Írja fel a feszültségi tenzor diádikus előállítását, szemléltesse a feszültségi állapotot az elemi kockán és számítsa ki a

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{17}}(4\mathbf{e}_y - \mathbf{e}_z) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{17}}(\mathbf{e}_y + 4\mathbf{e}_z)$$

normálisú felületelemeken ébredő σ_n és σ_m normálfeszültséget, valamint a τ_{mn} nyírófeszültséget. Írja fel a feszültségi tenzor mátrixát illetve diádikus előállítását az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{n}$ és $\mathbf{m}$ egységvektorok által kifeszített kartéziuszi KR-ben.

3. FEJEZET

A szilárdságtan alapkísérletei I. Egyenes rúd húzása, zömök rúd nyomása

3.1. Az alapkísérletek célja

Hétköznapi megfigyelés, hogy ugyanazon szilárd test alakváltozásainak mértéke függ a testet terhelő erőrendszertől. Minél nagyobb a terhelés annál nagyobb alakváltozások figyelhetők meg. A statikailag határozott rudak igénybevételeinek számításánál azt is láttuk, hogy a feszültségi eredők, következésképp a belső erőrendszer megoszlása a rúdkeresztmetszeteken függ a terheléstől. Ez természetesen más, nem rudalakú testeknél is így van. Következik tehát hogy a szilárd test terhelés hatására kialakuló belső erőrendszere és alakváltozási állapota egymással kapcsolatban van.

Ez a kapcsolat természetszerűen függ a szilárd test anyagától is. Valóban, ha két azonos alakú de más anyagból készült szilárd testet ugyanannak a terhelésnek vetünk alá, akkor más lesz az alakváltozás mértéke. Ennek illusztrálására visszaidézzük a 2. Fejezet 2.1. ábráján szemléltetett egyik végén befogott, a szabad végén pedig koncentrált erővel terhelt rudat. Ugyanolyan geometriai méretű és ugyanakkora erővel terhelt de különböző anyagú rudakat véve különböző lesz az erő támadáspontjának elmozdulása, a rúd görbülete, és az eddig megismert alakváltozási jellemzők – fajlagos nyúlások, szögváltozások etc. – értéke. Ez azt jelenti, hogy a belső erőrendszer és az alakváltozási jellemzők közötti kapcsolat függ a test anyagától.

A szilárd testek mechanikájának egyik fontos feladata ezen kapcsolat tisztázása.

A kapcsolat vizsgálata részint kísérleti megfigyeléseket, részint elvi megfontolásokat igényel.

A szilárdságtan keretei között csak bizonyos anyagtípusokra, elsősorban rugalmas testekre vonatkozóan tisztázzuk ennek a kapcsolatnak a kérdéseit, és azt is csak fokozatos kifejtésben. Valójában arra a kérdésre keressük a választ, hogyan függ állandó hőmérsékleten – szobahőmérsékleten, vagy szobahőmérsékelethez közeli hőmérsékleteken – az elemi környezet feszültségi állapotát meghatározó $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor az elemi környezet alakváltozási állapotát meghatározó $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzortól.

Vegyük észre, hogy a fentiek, így az utolsó kérdés megfogalmazása is, egy hallgatólagos feltevést tartalmaz, nevezetesen hogy a feszültségi tenzor csak az alakváltozási tenzor függvénye, azaz független más mennyiségektől, így a terhelés történetétől, vagy mondjuk a hőmérsékletváltozástól. Érdemes ezen a ponton hangsúlyozni, hogy a hallgatólagos feltevés miszerint létezik a kölcsönösen egyértelmű

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A}) \tag{3.1}$$

függvénykapcsolat jól tükrözi a valóságot a mindennapos használatban megjelenő legtöbb szerkezeti anyagra a terhelés egy valamilyen tartományában.

A fenti egyenletet *anyagegyenletnek* nevezzük.

Általánosan fogalmazva az anyagegyenlet azt mondja meg, hogyan függ adott anyag esetén a feszültségi tenzor mint állapotjellemző a szilárd test egyéb állapotjellemzőitől. Megjegyezzük a teljesség kedvéért, hogy az anyagegyenletek lehetséges matematikai alakjainak vizsgálata termodinamikai alapokon, illetve a kapott alakok kísérleti eredményekkel való egybevetése a kontinuummechanika feladata.

A későbbiekben valamilyen mértékben a képlékeny alakváltozással kapcsolatos anyagegyenletekre és a hőmérséklet hatására is kitérünk néhány példa kapcsán.

Lineárisan rugalmas testről beszélünk, ha a $\boldsymbol{T}$ feszültségtenzor lineáris függvénye az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzornak. A lineárisan rugalmas testekre vonatkozó anyagegyenlet meghatározása, összhangban a fentebb mondottakkal részint kísérleti körülmények között végzett megfigyeléseken, részint pedig elméleti megfontolásokon alapul. Ami a szóhasználatot illeti az anyagegyenlet meghatározására szolgáló kísérleteket *a szilárdságtan alapkísérleteinek nevezzük*.

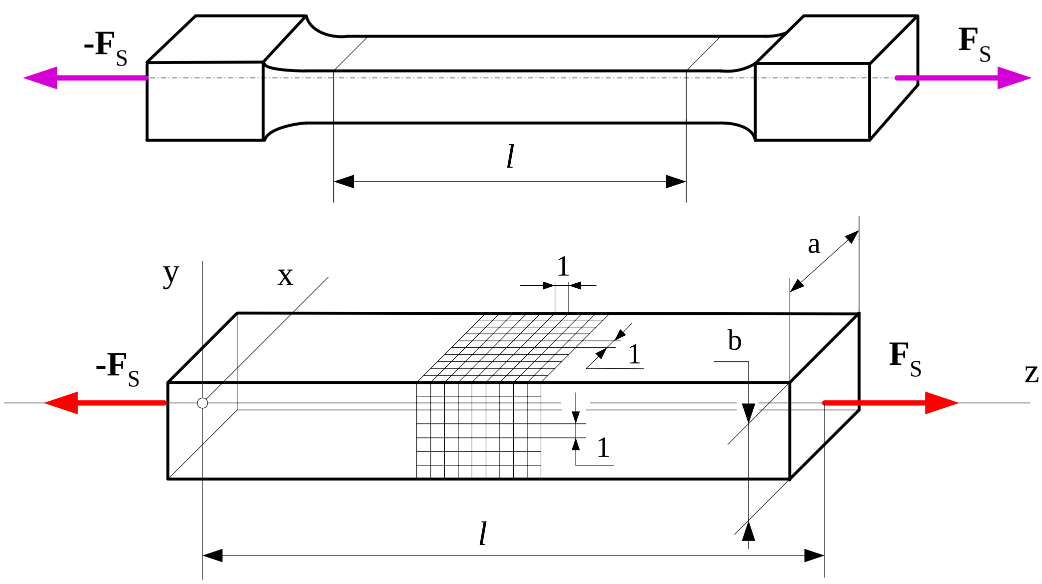
Az anyagegyenlet meghatározása során az alábbi gondolatmenetet követjük:

1. Az alapkísérletek alapján a mérési adatok felhasználásával meghatározzuk az $\boldsymbol{U}$ derivált tenzort és ennek ismeretében számítással a $\boldsymbol{\Psi}$ forgató tenzort és az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzort.
2. A próbatest egészére, illetve részeire felírt egyensúlyi egyenletek segítségével meghatározzuk a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzort.
3. A kapott eredmények alapján összefüggéseket tárunk fel a feszültségi és alakváltozási tenzor koordinátái között.

Az anyagegyenlet meghatározása során eddigi feltevéseinket – az elmozdulások és alakváltozások kicsik, a szilárd test anyaga homogén és izotróp – változatlanul érvényesnek tekintjük.

3.2. Prizmatikus rúd húzása, zömök rúd nyomása

3.2.1. A húzókisérlet leírása és eredményei. A szilárdságtani állapot homogenitása. Tekintsük a 3.1 ábrán vázolt téglalap keresztmetszetű rudat, más elnevezés szerint próbatestet. Feltesszük, hogy a rudat a tengelye mentén működő $\mathbf{F}_S = N\mathbf{e}_z$ és $-\mathbf{F}_S = -N\mathbf{e}_z$ erők húzásra veszik igénybe. A rúd tengelye mentén ható $\mathbf{F}_S$ erőt úgy hozzuk létre hogy a próbatest alkalmasan kialakított két végét szobahőmérsékleten az erre a célra kialakított szakítógépbe helyezzük. A szakítógép alkalmas fokozatosan növekvő húzó igénybevétel létrehozására, azaz kvázistatikus a terhelés. A próbatest úgy van kialakítva, hogy l hosszúságú szakaszának mechanikai



3.1. ábra.

állapotát a Saint Venant elv értelmében nem befolyásolja az erőátadás módja. A terhelés hatására megnyúlik az l hosszúságú rúdszakasz, a keresztirányú a és b méretek pedig megrövidülnek. Jelölje $l^{'}$, valamint $a^{'}$ és $b^{'}$ a megváltozott méreteket. A mondottak szerint

$$\lambda = l^{'} - l > 0, \qquad \Delta a = a^{'} - a < 0 \qquad \text{és} \qquad \Delta b = b^{'} - b < 0\,, \tag{3.2}$$

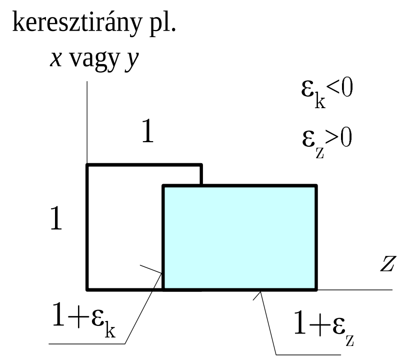
ahol λ az l hosszúságú rúdszakasz megnyúlása, Δa és Δb pedig a keresztirányú méretváltozás. A mérés azt mutatja, hogy a Δa és Δb keresztirányú méretváltozás azonos az l hosszúságú rúdszakasz minden egyes keresztmetszetére nézve. Az alakváltozási állapot tisztázása érdekében az xy, yz és zx koordinátasíkokkal párhuzamos síksorok segítségével és alkalmasan kicsi egység választásával egységnyi oldalélű kockákra hasítjuk gondolatban fel a próbatestet, és megfigyeljük milyen az alakváltozás jellege.

A megfigyelések szerint az xy, yz és zx koordinátasíkokkal párhuzamos anyagi síkok az alakváltozás során párhuzamosak maradnak az xy, yz és zx koordinátasíkokkal, következőleg az egységnyi oldalélű kockák oldallapjai is az xy, yz és zx koordinátasíkokkal párhuzamos síkok maradnak, azaz nincs szögtorzulás az alakváltozás során. Ez azt jelenti, hogy a próbatest l hosszúságú szakaszának minden egyes pontjában fennállnak a

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \tag{3.3}$$

összefüggések.

További megfigyelés, hogy az yz és zx koordinátasíkokkal párhuzamos elemi, egységnyi oldalélű négyzetek mindegyike azonos nagyságú téglalappá deformálódik: a z irányban megnyúlik, a z-re merőleges irányban pedig megrövidül. Ezeket a viszonyokat a 3.2. ábra szemlélteti. Mivel egységnyi oldalélű négyzetekről van szó a hosszirányú méretváltozás a z irányú ε_z fajlagos nyúlás, vagyis



3.2. ábra.

$$\varepsilon_z = \frac{l' - l}{l} = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\lambda}{l} > 0\,. \tag{3.4}$$

Ugyanígy kapjuk, hogy a keresztirányú méretváltozás pedig az ε_k keresztirányú fajlagos nyúlás, amelynek azonban a megfigyelések szerint jóval kisebb az abszolut értéke, mint a hosszirányú fajlagos nyúlásé. Egyrészt tehát fennáll a

$$\varepsilon_k = \frac{a' - a}{a} = \frac{\Delta a}{a} < 0 \tag{3.5}$$

összefüggés – itt az a helyére b-t is írhattunk volna –, másrészt pedig

$$\varepsilon_k = -\nu\varepsilon_z \qquad (k = x, y)\ , \tag{3.6}$$

ahol a ν szám arányossági tényező.

Mivel nincs forgás a fenti megfigyelésekből az következik, hogy a próbatest l hosszúságú szakaszának minden egyes pontjában pontjában zérus a forgató tenzor:

$$\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}\,. \tag{3.7}$$

Következőleg – v.ö. (2.18) – a próbatest l hosszúságú szakaszának minden egyes pontjában megegyezik egymással a derivált tenzor és az alakváltozási tenzor:

$$\underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu\varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \tag{3.8}$$

Vegyük észre, hogy a képlet részletezése során az (3.6) összefüggést is felhasználtuk.

A kísérleti eredmények szerint a ν arányossági tényező értéke független az erő nagyságától, feltéve hogy a próbatest rugalmas módon viselkedik. Ugyanakkor a ν arányossági tényező értéke függ a próbatest anyagától, mivel a mérések azt mutatják, hogy különböző anyagból készült próbatestekre más és más ν-t kapunk. A mérési eredmények szerint fennáll a

$$\nu < 0.5 \tag{3.9}$$

reláció is. Mindent összevetve megállapítható tehát, hogy anyagjellemző a ν arányossági tényező. Ezt a mennyiséget *Poisson tényező*nek szokás nevezni.

Érdemes külön is hangsúlyozni azt a mérések alapján nyilvánvaló körülményt, hogy a próbatest l hosszúságú szakaszának minden egyes pontjában állandó a derivált tenzor és az alakváltozási tenzor. Tekintettel a keresett $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{A})$ függvénykapcsolat kölcsönösen egyértelmű voltára azonnal következik, hogy a próbatest l hosszúságú szakaszának minden egyes pontjában állandó a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor is. Ha állandóak az $\boldsymbol{A}$ és a $\boldsymbol{T}$ tenzorok, akkor feltételezhetően állandó értékű az u fajlagos alakváltozási energia is.

A fentiek alapján értelmezés szerint *homogénnek* nevezzük a test valamely állapotát (pl. alakváltozási állapotát, energetikai állapotát), ha független a helytől az állapotot leíró tenzor.

Ha állandó az $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}$ tenzor (azaz $\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{0}$), továbbá állandó a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor és az u fajlagos alakváltozási energia is, akkor azt mondjuk, hogy homogén a test szilárdságtani állapota.

Mivel a próbatest minden egyes pontjában ugyanaz a feszültségtenzor fennállnak a

$$\boldsymbol{\rho}_x=\sigma_x\mathbf{e}_x+\tau_{yx}\mathbf{e}_y+\tau_{zx}\mathbf{e}_z=\text{állandó},$$
$$\boldsymbol{\rho}_y=\tau_{xy}\mathbf{e}_x+\sigma_y\mathbf{e}_y+\tau_{zy}\mathbf{e}_z=\text{állandó},$$

és

$$\boldsymbol{\rho}_z=\tau_{xz}\mathbf{e}_x+\tau_{yz}\mathbf{e}_y+\sigma_z\mathbf{e}_z=\text{állandó}$$

összefüggések. Az egyelőre ismeretlen σ_x, $\tau_{yx},\ldots,\sigma_z$ feszültségkoordináták meghatározása során vegyük figyelembe, hogy a szilárd test S határfelületének külső ER-el terhelt részén a $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor meg kell, hogy egyezzen a felületi terhelés $\mathbf{f}$ sűrűségvektorával, azaz fenn kell állnia a

$$\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}=\boldsymbol{\rho}_n=\mathbf{f} \tag{3.10}$$

egyenletnek. A próbatest l hosszúságú szakaszának terheletlenek az oldallapjai, azaz zérus ezeken az oldallapokon a külső terhelő ER $\mathbf{f}$ sűrűségvektora. Következésképp el kell, hogy tűnjenek az $\mathbf{n}=\mathbf{e}_x$ és $\mathbf{n}=\mathbf{e}_y$ normálisú hátulsó és felső oldallapokon ébredő feszültségvektorok:

$$\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_x=\boldsymbol{\rho}_x=\sigma_x\mathbf{e}_x+\tau_{yx}\mathbf{e}_y+\tau_{zx}\mathbf{e}_z=\mathbf{0}\,,$$
$$\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_y=\boldsymbol{\rho}_y=\tau_{xy}\mathbf{e}_x+\sigma_y\mathbf{e}_y+\tau_{zy}\mathbf{e}_z=\mathbf{0}\,.$$

A ρ_x és ρ_y feszültségvektorok állandó volta és a feszültségi tenzor szimmetriája miatt az utóbbi két egyenlet csak akkor teljesülhet, ha

$$\sigma_x=\sigma_y=\tau_{yx}=\tau_{xy}=\tau_{zx}=\tau_{xz}=\tau_{zy}=\tau_{yz}=0\,, \tag{3.11}$$

azaz, ha csak a $\sigma_z=$ állandó normálfeszültség különbözik zérustól. Ez egyben azt is jelenti, hogy

$$\underline{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\sigma_z\end{bmatrix} \tag{3.12}$$

alakú a feszültségi tenzor mátrixa. A σ_z normálfeszültség abból a feltételből határozható meg, hogy a próbatest l hosszúságú szakaszának bármely pozitív keresztmetszetére igaz, hogy a $\rho_z=$ $=\sigma_z\mathbf{e}_z$ feszültségek egyenértékűek a tengelyirányú $\mathbf{F}_S=N\mathbf{e}_z$ erővel. Az egyenértékűséget kifejező (2.89) és (2.90) összefüggésekből, tekintettel a (3.11) képletekre, valamint arra, hogy állandó a σ_z normálfeszültség és hogy zérus a keresztmetszet saját súlypontjára vett $\mathbf{S}_S$ statikai nyomatéka az

$$\mathbf{F}_S=N\mathbf{e}_z=\int_A\boldsymbol{\rho}_z\mathrm{d}A=\int_A\left(\sigma_z\mathbf{e}_z+\tau_{xz}\mathbf{e}_x+\tau_{yz}\mathbf{e}_y\right)\,\mathrm{d}A=\int_A\sigma_z\mathbf{e}_z\mathrm{d}A=\sigma_zA\mathbf{e}_z\,, \tag{3.13}$$
$$\mathbf{M}_S=\int_A\mathbf{R}\times\boldsymbol{\rho}_z\mathrm{d}A=\int_A\mathbf{R}\times\sigma_z\mathbf{e}_z\mathrm{d}A=\underbrace{\int_A\mathbf{R}\mathrm{d}A}_{\mathbf{S}_S=\mathbf{0}}\times\sigma_z\mathbf{e}_z=\mathbf{0}$$

eredmények következnek. A fenti eredmények, azaz a hossz- és keresztirányú nyúlásokkal kapcsolatos

$$\boxed{\varepsilon_z=\text{állandó},\qquad\qquad \varepsilon_k=-\nu\varepsilon_z\qquad (k=x,y)} \tag{3.14}$$

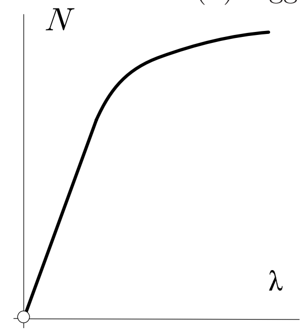
képletek, valamint a (3.13)-ből következő és a σ_z normálfeszültséget adó

$$\boxed{\sigma_z=\frac{N}{A}} \tag{3.15}$$

összefüggések a terhelés egy korlátozott tartományában bármilyen állandó keresztmetszetű, vagyis prizmatikus rúdra érvényben maradnak.

3.2.2. Kapcsolat a z irányú fajlagos nyúlás és feszültség között. Szakítódiagram. A terhelési folyamat során a szakítógép diagramban rögzíti az N húzóerő, valamint a λ megnyúlás összetartozó értékeit adó $N = N(\lambda)$ függvényt. Az így nyert függvény alakja függ egyrészt a próbatest anyagától, másrészt pedig a próbatest alakjától. Az utóbbit az egyes szerkezeti anyagokra szabvány rögzíti.

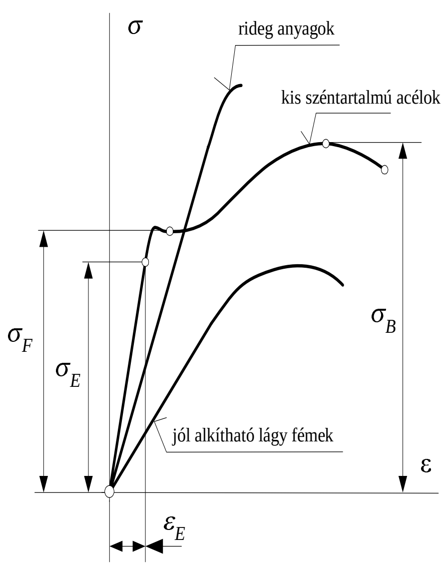
A 3.3. ábra nagyszilárdságú acélból készült próbatestre szemlélteti az $N = N(\lambda)$ függvényt.



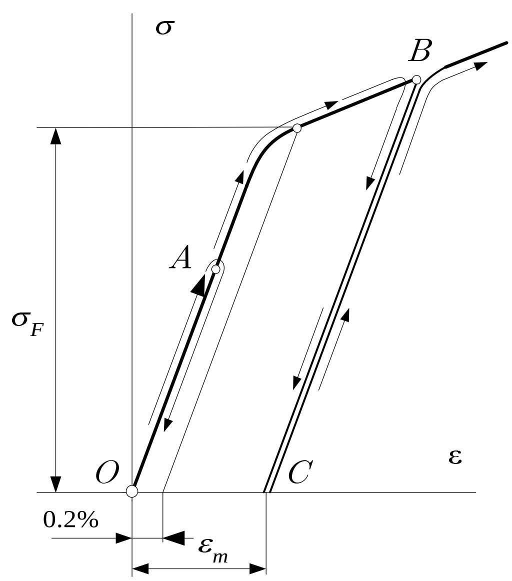
3.3. ábra.

A próbatest alakjától független diagramhoz úgy juthatunk, ha fajlagos mennyiségeket mérünk az egyes tengelyekre. Ez azt jelenti hogy a függőleges tengelyen a $\sigma=\sigma_z$ normálfeszültséget, a vízszintes tengelyen pedig a hozzátartozó $\varepsilon=\varepsilon_z$ fajlagos nyúlást ábrázoljuk. Az így nyert $\sigma=\sigma(\varepsilon)$ diagramokat *szakítódiagramoknak* nevezik. A szakítódiagramok az adott körülmények között már valóban a próbatestek anyagára jellemzőek. A 3.4. ábra néhány szerkezeti anyagtípus esetén azzal a feltevéssel szemlélteti a szakítódiagramokat, hogy nem veszi figyelembe a keresztmetszet méretváltozását a σ normálfeszültség számítása során.

A diagramok közös jellemzője, hogy a kezdeti egyenes szakaszt egy átmeneti rész követi. *Rideg anyagú* (pl. öntöttvas) próbatestek esetén az átmeneti szakasz hirtelen töréssel végződik, maga a diagram pedig megszűnik. Nem rideg anyagú próbatestek esetén az átmeneti szakaszt követően a diagram ellaposodik majd egy újabb lassan növekvő szakasz után visszahajlik és a törés után megszűnik - *kis széntartalmú acélok* -, vagy egy lassan növekvő szakasz majd kissé visszahajló szakasz után törés következik be – az utóbbi viselkedés elsősorban a *jól alakítható fémekre* (aluminium, réz etc.) jellemző.

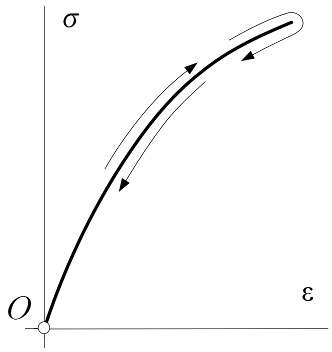


3.4. ábra.



3.5. ábra.

További jellegzetes tulajdonságait ismerhetjük meg a próbatest anyagának, ha különböző mértékű terhelésekre szemléltetjük a tehermentesítés illetve az ismételt terhelés folyamatát – 3.5. ábra. A szakítódiagram jellegét ezekben az esetekben a terhelés mértéke határozza meg. A kezdeti egyenes szakaszon a terhelés, a tehermentesítés és az újraterhelés a kezdeti egyenes szakaszon megy végbe ($O - A - O - A$). A terheletlen állapotból a diagram laposabb, elhajló szakaszára eső B pontig terhelt próbatest tehermentesítése a kezdeti egyenes szakasszal párhuzamos $B - C$ egyenes mentén megy végbe és a terheletlen állapothoz az ε_m *maradó fajlagos nyúlás* tartozik. Az ismételt terhelés a C pontból indul, a $C - B$ egyenesen halad és a B pont elérése



3.6. ábra.

után az eredeti laposabb elhajló szakaszon jobbra folytatódik. Az újabb leterhelés ugyancsak párhuzamos a kezdeti egyenes szakasszal (az újabb tehermentesítést már nem tünteti fel az ábra).

Az $O - A - O$ egyenesvonalú szakítódiagram a *lineárisan rugalmas test szakítódiagramja.*

Általában rugalmas alakváltozásról beszélünk, ha egybeesik, noha nem szükségképp lineáris ez a kapcsolat, a terhelés és a tehermentesítés diagramja, vagyis nem tapasztalható képlékeny alakváltozás. Ha ez a kapcsolat nemlineáris akkor *nemlineárisan rugalmas test*ről beszélünk. A 3.6. ábra nemlineárisan rugalmas test – ilyen például a gumi – szakítódiagramját szemlélteti.

A 3.5. ábrán feltüntetett $O - B - C$ szakítódiagram *rugalmas-képlékeny test* szakítódiagramja.

Az alábbiakban a 3.4. és 3.5. ábrákon szemléltetett, képlékeny alakváltozást is mutató szakítódiagramok segítségével értelmezünk néhány fontos anyagjellemzőt.

A kezdeti egyenes szakaszon fennáll a

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon} \tag{3.16}$$

egyenlet, ahol E a *rugalmassági modulus* (más elnevezéssel Young modulus vagy rugalmassági tényező). Az (3.16) és $(3.14)_2$ egyenletek az *egyszerű Hooke törvényt* alkotják.

Azt a határfeszültséget, amely a kezdeti egyenesszakasz végéhez tartozik és ameddig az alakváltozás rugalmasnak vehető *rugalmassági határnak* nevezzük. Fémek esetére általában a 0.02% maradó nyúláshoz tartozó feszültséget fogadjuk el rugalmassági határnak. Ezt a mennyiséget a szabvány az $R_{0,02}$ módon jelöli. A 0.05% maradó nyúláshoz tartozó $R_{0,05}$ feszültség a σ_E *arányossági határ*. A 0.2% maradó nyúlást okozó $R_{0,2}$ feszültséget *folyási határnak* szokás nevezni. Ezt a mennyiséget a továbbiakban σ_F jelöli.

Egyes szerkezeti acéloknál a rugalmas alakváltozás után egy vízszintes szakasz következik és csak ezután kezdődik a diagram emelkedése. A vízszintes szakasz az *ideálisan képlékeny* testre, a lassan emelkedő szakasz a *keményedő testre* jellemző. A keményedés fogalma azt jelenti, hogy a maradó nyúlás létrejötte után további maradó nyúlás csak az előzőnél nagyobb normálfeszültséggel hozható létre.

A törést előidéző σ_B feszültség a szakítószilárdság. Ez nem valódi feszültség mivel az eredeti keresztmetszeti területtel számoljuk.

A keresztirányú nyúlás mértékére jellemző ν Poisson tényező reciprokát *Poisson szám*nak nevezzük és m-el jelöljük:

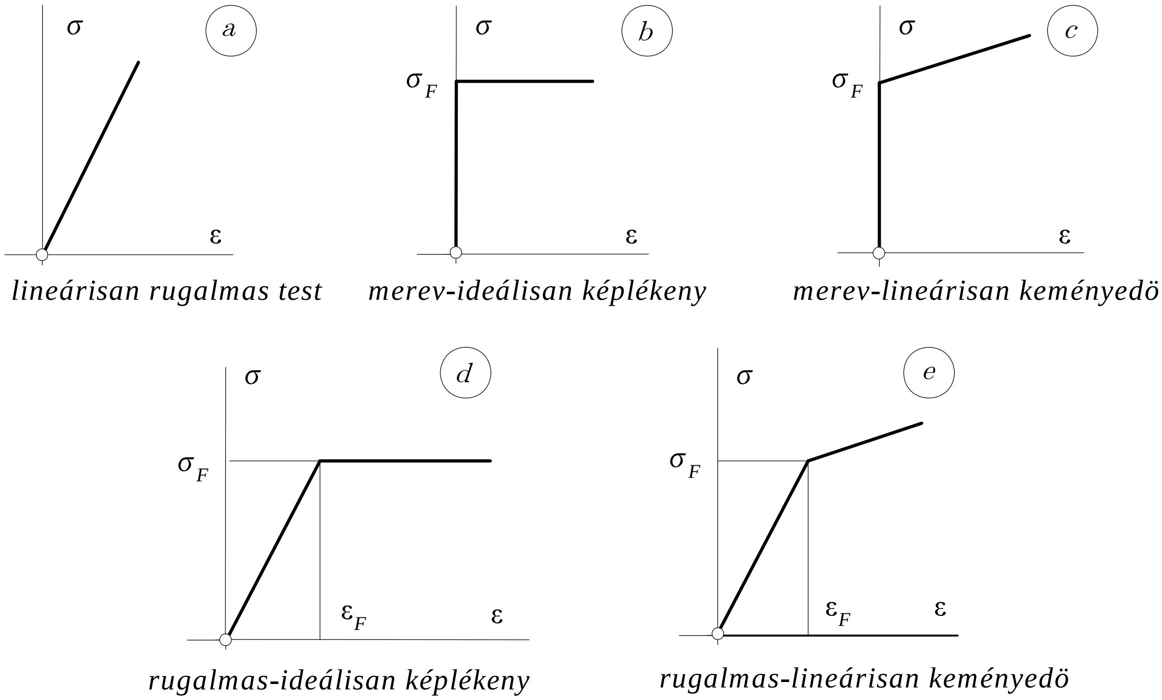
$$\boxed{m = \frac{1}{\nu}\,.} \tag{3.17}$$

3.2.3. Ideális testek szakítódiagramjai. A 2.1. szakasz második bekezdésében rámutattunk, hogy a mechanika a valóságos testek helyett olyan idealizált testeket, modelleket hoz létre, amelyek a vizsgált mechanikai mozgás leglényegesebb tulajdonságait tükrözik, és csak ezekkel rendelkeznek. Így járunk el akkor is, amikor a valóságos szakítódiagramok alapján, ezek egyes tulajdonságait (rugalmas alakváltozás, képlékeny alakváltozás, keményedés) kiragadva különböző *anyagmodelleket* hozunk létre. Az így létrehozott anyagmodelleket követő testeket *ideális testeknek* nevezzük.

Ilyenek

– a *lineárisan rugalmas test* (amely a terhelés mértékétől függetlenül mindig lineárisan rugalmas módon viselkedik),
– a *merev-ideálisan képlékeny test* vagy röviden *ideálisan képlékeny test* (amely a folyáshatár eléréséig merev testként, utána pedig képlékeny testként viselkedik),

– a *merev-lineárisan keményedő test* (amely a folyáshatár eléréséig merev testként, utána pedig lineárisan keményedő képlékeny testként viselkedik),
– a *lineárisan rugalmas-ideálisan képlékeny test* (amely a folyáshatár eléréséig lineárisan rugalmas testként, utána pedig képlékeny testként viselkedik),
– és a *lineárisan rugalmas-lineárisan keményedő test* (amely a folyáshatár eléréséig lineárisan rugalmas testként, utána pedig lineárisan keményedő képlékeny testként viselkedik).



3.7. ábra.

A lineárisan rugalmas szóösszetételben általában elhagyjuk a lineárisan jelzőt. A 3.7.(d) és a 3.7.(e) ábrákon szereplő feliratok már ezt a megállapodást tükrözik.

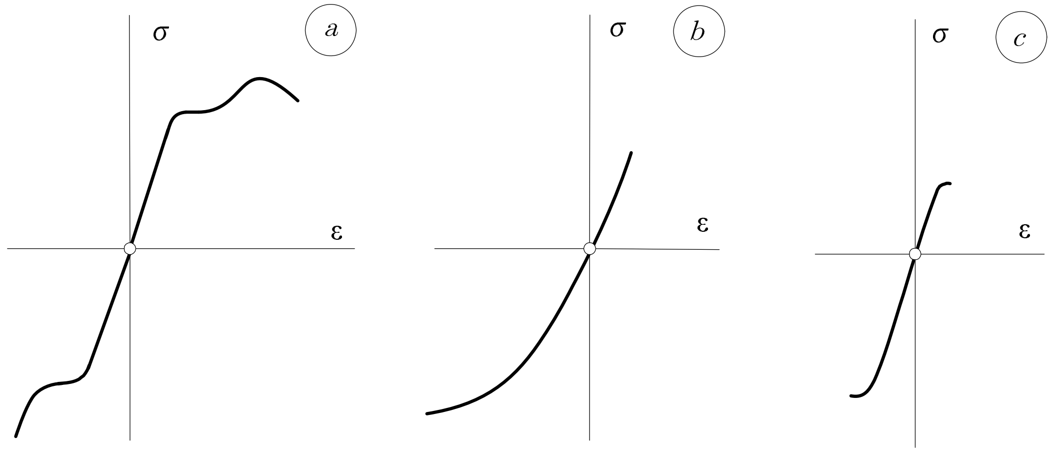
3.2.4. Prizmatikus rúd nyomása, nyomódiagram. Felmerül a kérdés, hogy mennyiben és milyen tekintetben maradnak érvényesek a szakítóvizsgálat eredményei nyomóerővel terhelt prizmatikus rudak esetén. A próbatest az esetleges kihajlás elkerülése érdekében zömök, többnyire kockaalakú. A nyomás hatására a hosszméretek megrövidülnek, a keresztirányú méretek pedig ennél kisebb mértékben megnövekednek. A rugalmas viselkedés tartományában valamennyi eddigi eredmény érvényes marad. Részletezve

– a szögtorzulások zérus értékűek,
– a hosszirányú ε_z és a keresztirányú ε_k fajlagos nyúlások állandóak és értéküket a (3.4) és (3.5) képletekkel kell számítani azaz

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\lambda}{l} \qquad \text{és} \qquad \varepsilon_k = \frac{\Delta a}{a}\,,$$

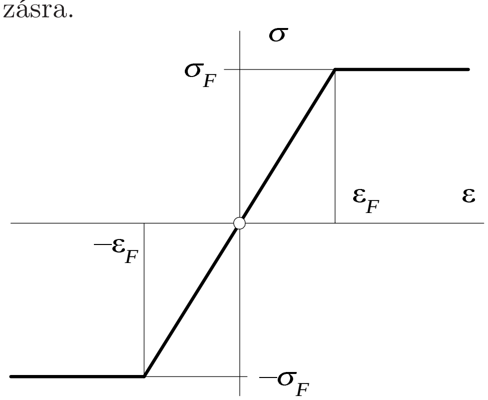
ahol most $\Delta l = \lambda = l' - l < 0$, és $\Delta a = a' - a > 0$,
– a hosszirányú és a keresztirányú nyúlások között továbbra is fennáll az $\varepsilon_k = -\nu\varepsilon_z$ összefüggés, azaz a $(3.14)_2$ egyenlet,
– állandó értékű a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor, az egyetlen zérustól különböző feszültségkoordinátát pedig most is a (3.15) képlettel számítható, ahol azonban mint igénybevétel $N < 0$,
– a (3.15) alatti Hooke törvény változatlanul fennáll.

A 3.8.(a) ábra acél anyagokra, a (b) ábra tiszta betonra, a (c) ábra pedig öntöttvasra jellegzetesen szemlélteti az egyesített szakító-, és nyomódiagramokat. Kitűnik az ábráról, hogy az acél anyagok húzásra és nyomásra nagyjából egyformán viselkednek a rugalmas és a kis képlékeny alakváltozások tartományában. A beton és az öntöttvas ettől lényegesen eltérően viselkedik.



3.8. ábra.

Bár a rugalmas alakváltozás tartományában ugyanazt a törvényt követik nyomásra lényegesen nagyobb abszolutértékű normálfeszültséget képesek maradó károsodás nélkül elviselni, mint húzásra.



3.9. ábra.

Az ideális testek egyesített szakító-, és nyomódiagramja szimmetrikus az origóra. A 3.9. ábra rugalmas-ideálisan képlékeny testre szemlélteti az egyesített szakító és nyomódiagramot.

Összegezésszerűen megjegyezzük, hogy a rugalmas alakváltozás tartományában a húzással kapcsolatos valamennyi eredmény érvényben marad a nyomóerővel terhelt rövid prizmatikus rudak esetére is. A rövid szó hangsúlyozása arra utal, hogy a hosszú nyomott rudaknál fellépő kihajlás jelensége további vizsgálatot igényel és ezzel csak később foglalkozunk.

3.2.5. Hooke törvény egytengelyű feszültségi állapotra. A 2.3.4. szakasz röviden foglalkozott feszültségi tenzor, mint szimmetrikus tenzor főtengelyproblémájával és megadta egyebek között a tenzor mátrixát is a főtengelyek KR-ében. A vonatkozó (2.88) képlet és a (3.13) összefüggés egybevetéséből azonnal következik, hogy húzott, illetve nyomott rudak esetén egyetlen főfeszültség különbözik zérustól, azaz

$$\sigma_1 = \sigma_z, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0\,,$$

ha húzásról van szó, és

$$\sigma_3 = \sigma_z, \quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0\,,$$

ha nyomás esete forog fenn. Értelmezés szerint *egytengelyű feszültségi állapotról* beszélünk, ha egyetlen főfeszültség különbözik zérustól. Ezzel szemben *többtengelyű a feszültségi állapot*, ha legalább két főfeszültség nem zérus. Szokás *két-, illetve háromtengelyű feszültségi állapotnak* is nevezni azokat az eseteket amikor csak egy főfeszültség zérus, vagypedig nincs zérus értékű főfeszültség. A bevezetett terminológiát használva egytengelyű a húzott, illetve nyomott rúd feszültségi állapota.

Mivel kölcsönösen egyértelmű kapcsolat áll fenn a $\boldsymbol{T}$ és $\boldsymbol{A}$ tenzorok között, azért létezik a (3.1) egyenlet $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ alakú un. megfordítása. Az alábbiak ezt a függvényt konstruálják meg.

A (3.8), (3.16) és (3.12) képletek felhasználásával és elemi algebrai átalakításokkal írható, hogy

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nu\varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1+\nu}{E}}_{\frac{1}{2G}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}} - \nu\varepsilon_z \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{E}}} . \tag{3.18}$$

Az

$$E = 2G(1+\nu) \tag{3.19}$$

képlet a G állandót értelmezi. Vegyük észre, hogy a $T_I = \sigma_z = E\varepsilon_z$ skalármennyiség, azaz a feszültségi tenzor első skalárinvariánsa is behelyettesíthető az egységtenzor $\underline{\mathbf{E}}$ mátrixa együtthatójába a (3.18) összefüggés jobboldalán. Mindezeket kihasználva az

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2G}\left[\boldsymbol{T} - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_z\boldsymbol{E}\right] = \frac{1}{2G}\left[\boldsymbol{T} - \frac{\nu}{1+\nu}T_I\boldsymbol{E}\right] . \tag{3.20}$$

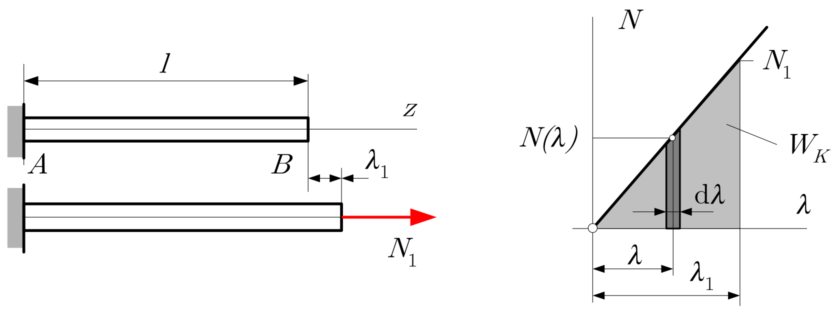
alakot ölti a keresett $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ függvény. Felhívjuk az olvasó figyelmét arra a körülményre, hogy összhangban a kísérleti eredményekkel lineáris a fenti függvénykapcsolat, hiszen a szögletes-zárójelben álló első tag a feszültségi tenzor, a második tag pedig egy, az egységtenzorral arányos additív tag, amelyben T_I a normálfeszültségek, most σ_z, lineáris függvénye.

3.2.6. Alakváltozási energia. A 3.10. ábra az egyik végén befogott, másik végén N_1 erővel terhelt húzott rudat illetve az $N(\lambda)$ függvényt szemlélteti, utóbbi esetben a függvény lineáris tartományában. A (3.4), (3.16) és (3.15) képletek felhasználásával

$$\boxed{\lambda_1 = \varepsilon_z l = \frac{\sigma_z l}{E} = \frac{N_1 l}{AE}} \tag{3.21}$$

a rúd hosszváltozása az N_1 rúderő hatására.

A terhelés kvázistatikus, vagyis a terhelési folyamat egymást követő egyensúlyi állapotok sorozata. Vegyük észre, hogy a külső erők közül egyedül a terhelés végez munkát, a befogás



3.10. ábra.

helyén ui. nincs elmozdulás, következőleg zérus a támasztóerő munkája. Leolvasható az $N(\lambda)$ függvényt szemléltető ábrarészletről a λ megnyúláshoz tartozó $N(\lambda)$ terhelőerő elemi munkája:

$$\mathrm{d}W_K = N(\lambda)\mathrm{d}\lambda .$$

A külső erők munkája integrálással adódik:

$$W_K = \int_0^{\lambda_1} N(\lambda)\mathrm{d}\lambda . \tag{3.22}$$

A továbbiakban vegyük figyelembe, hogy rúdban felhalmozódó alakváltozási energia, amint arra a 2.4.2. szakaszban rámutattunk, megegyezik a külső erők munkájával. Ha emellett kihasználjuk, hogy a W_K-t szemléltető terület háromszög, majd helyettesítjük a (3.21) képletet az

$$\boxed{U = W_K = \frac{1}{2}N_1\lambda_1 = \frac{1}{2}\frac{N_1^2 l}{AE}} \tag{3.23}$$

eredményre jutunk. Érdemes megfigyelni, hogy

$$\frac{\partial U}{\partial N_1} = \frac{\partial}{\partial N_1} \frac{1}{2} \frac{N_1^2 l}{AE} = \frac{N_1 l}{AE} = \lambda_1 \,. \tag{3.24}$$

Ez azt jelenti, hogy az N_1 erő támadáspontjának erőirányú elmozdulása az alakváltozási energia erőkoordináta szerinti parciális deriváltjaként adódik.

Mivel homogén a rúd szilárdsági állapota állandó értékű a fajlagos energiasűrűség, vagyis

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{Al} \frac{1}{2} \frac{N_1^2 l}{AE} = \frac{1}{2} \frac{N_1}{A} \frac{N_1}{AE} = \frac{1}{2} \frac{\sigma^2}{E} = \frac{1}{2} \sigma_z \varepsilon_z \,, \tag{3.25}$$

ahol V a rúd térfogata volt és kihasználtuk a σ_z-t adó (3.15) összefüggést, valamint a (3.16) egyszerű Hooke törvényt.

3.2.7. Ellenőrzés, méretezés, biztonsági tényező. Az egyenes középvonalú húzott vagy nyomott rúdban ébredő σ_z normálfeszültség számítása nem öncélú feladat, hanem eszköze az alábbiakban megfogalmazott két alapvető mérnöki feladat megoldásának:

1. Megtervezett, vagy megépített mérnöki szerkezetek, gépek vizsgálata annak eldöntésére, hogyan viselkedik az adott szerkezet, vagy gép az üzemelés közben fellépő terhelések hatására. Elsősorban arra vagyunk kiváncsiak, hogy a szerkezet úgy van-e megtervezve, illetve megépítve, hogy képes az üzemelés közben fellépő terheléseket tönkremenetel nélkül elviselni. Ennek a feladatnak a megoldását *ellenőrzésnek* nevezzük. (Tönkremenetelről beszélünk, ha nem teljesül valamilyen előírt követelmény, pl. törés lép fel, maradó alakváltozás keletkezik, stb.)
2. Új szerkezet, vagy gép tervezése adott funkció megvalósítására. Kitüntetett figyelmet érdemel eközben a szerkezet, illetve részei anyagának és a geometriai méretek megválasztásának kérdése, mivel az üzemeltetés illetve a használat közben fellépő terhelések nem okozhatnak tönkrementelt. Ezen részfeladat megoldását *méretezésnek* nevezzük.

Jelölje a tönkrementelt okozó normálfeszültséget σ_{jell} (szigma jellemző). Ezt a mennyiséget nyomás esetén is pozitív értékűnek tekintjük. Szívós anyagokra – alacsony széntartalmú acélok, lágy fémek – a jelentős maradó alakváltozások elkerülése érdekében a $\sigma_{\text{jell}} = \sigma_F$ választás a szokásos. Ezzel szemben rideg anyagok esetén nem előzi meg jelentős mértékű alakváltozás a törést. Ez okból rideg anyagokra a $\sigma_{\text{jell}} = \sigma_B$ feltételezés az elfogadott.

Jelölje továbbá a tönkrementelt okozó rúderőt N_{jell}. Ez a mennyiség is pozitív mind húzásra, mind pedig nyomásra. Az

$$n_t = \frac{N_{\text{jell}}}{|N|} = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{|\sigma_z|} > 1 \tag{3.26}$$

hányados – itt N a tényleges rúderő, σ_z pedig az N-hez tartozó normálfeszültség – a tönkremenetellel szembeni *tényleges biztonsági tényező*.

A szabványok, a terhelés módjától és a szerkezet anyagától függően, különböző előírásokat tartalmaznak a biztonsági tényezővel kapcsolatban.

Jelölje n_e vagy röviden n az *előírt biztonsági tényezőt*. Az ennek ismeretében képzett

$$\boxed{\sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{n}} \tag{3.27}$$

hányados a *megengedett feszültséget* értelmezi.

Nyilvánvalóan megfelel a húzott rúd, illetve a rövid nyomott rúd, ha fennáll a (3.15) és (3.27) figyelembevételével írható

$$\boxed{|\sigma_z| = \frac{|N|}{A} \le \sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{n}} \tag{3.28}$$

egyenlőtlenség. Ez az összefüggés az *ellenőrzés* eszköze. Mivel $|\sigma_z| \le \sigma_{\text{meg}}$ az n_t-t adó (3.26) képlet alapján a biztonsági tényezőkkel kapcsolatos

$$n_t = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{|\sigma_z|} \ge \frac{\sigma_{\text{jell}}}{\sigma_{\text{meg}}} = n$$

reláció következik. Vagyis a tényleges biztonsági tényező nagyobb, vagy egyenlő mint az előírt biztonsági tényező.

Ha adott a ruderő, valamint a rúd anyaga, és keressük azt a minimális területű keresztmetszetet – jelölje ezt a területet A_{sz}, ahol az sz index a szükséges szó első betűje –, amely előírt biztonsággal képes elviselni a rúderőt, akkor méretezésről beszélünk. A (3.28) egyenlőtlenség A/σ_{meg} hányadossal való átszorzása a *méretezés* alapjául szolgáló

$$\boxed{A \geq A_{sz} = \frac{|N|}{\sigma_{\text{meg}}}} \tag{3.29}$$

egyenlőtlenséget eredményezi. Az egyenlőtlenség jobboldalát alkotó egyenlőség azt a minimális keresztmetszeti területet adja, amely szükséges az előírt biztonsághoz. A tényleges keresztmetszet, természetesen, ennél nagyobb is lehet.

Visszatérve a biztonsági tényező megválasztásának kérdéséhez a biztonsági tényezőt befolyásoló körülmények közül, a teljesség igénye nélkül, az alábbiakra érdemes felhívni a figyelmet:

1. Az *anyagjellemzők szórása*. Ezt az anyaggyártás pontatlansága, a hőkezelésből adódó maradó feszültségek, természetes anyagok esetén – fa, kőzetek – pedig a növekedés illetve kialakulás körülményeinek változása okozzák. (Fa esetén $n = 4,\ldots,10$, nyomásra igénybevett terméskőre $n = 10,\cdots,20$)
2. A fel- és leterhelések, vagy másnéven *terhelési ciklusok* száma. A tönkrementelt okozó feszültség ui. csökken a terhelési ciklusok növekedésével. Ez a jelenség *kifáradás* néven ismert.
3. A terhelés jellege. Ez nem csak kvázistatikus, hanem *dinamikus, periódikus avagy lökésszerű* is lehet. Az utóbbi esetekben nagyobb biztonsági tényezőt kell választani.
4. A *kopás vagy korrózió* következtében fellépő és nehezen prognosztizálható hatások, méretváltozások.

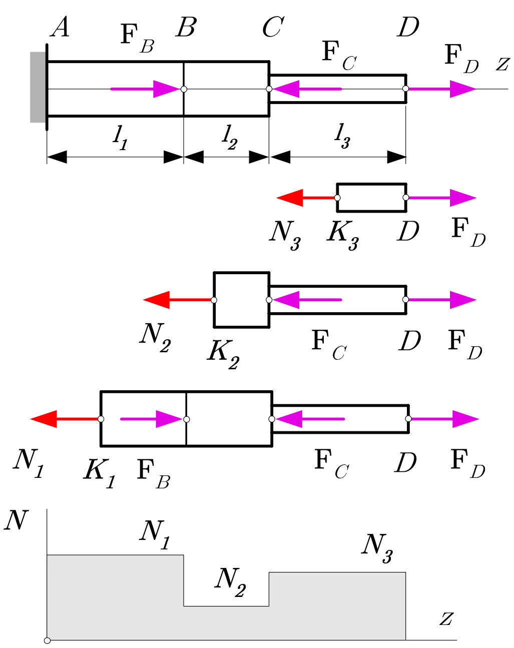
A fentieken túlmenően, nagyobb biztonsági tényezőt kell választani minden olyan esetben, amikor a gép, vagy szerkezet tönkremenetele emberi életeket veszélyeztet. Ezekkel kapcsolatosan a vonatkozó szabványok, tervezési előírások adnak tájékoztatást.

3.3. Változó keresztmetszetű rúd

3.3.1. Szakaszonként állandó keresztmetszet. A 3.11. ábra a szakaszonként állandó keresztmetszetű AD rudat, a rúd terheléseit, a rúd K_3D, K_2D és K_1D jelű részeit, valamint az említett rúdrészeken működő külső és belső erőket, illetve a rűderőábrát szemlélteti. Vegyük észre, hogy az 1, 2 és 3 jelű rúdszakaszokon belül állandó a prizmatikus rudak húzásával illetve nyomásával kapcsolatos képletekben szereplő valamennyi mennyiség, azaz N_i, A_i, E_i és l_i $(i = 1,2,3)$. Leolvasható az ábráról – mivel $F_{Cz} < 0$ – az is, hogy

$$N_1 = F_{Bz} + F_{Cz} + F_{Dz}, \qquad N_2 = F_{Cz} + F_{Dz}, \qquad N_3 = F_{Dz}\,.$$

Ha eltekintünk a hirtelen keresztmetszetváltozás feszültségi és alakváltozási állapotra gyakorolt hatásától, ez ugyanis csak lokális zavarást okoz, akkor az összes eddigi eredményt, azaz a (3.15), (3.21) és (3.23) képleteket egyaránt érvényesnek tekinthetjük az egyes szakaszokra nézve.



3.11. ábra.

Következőleg

$$\boxed{\sigma_{zi} = \frac{N_i}{A_i}} \tag{3.30}$$

a normálfeszültség az i-ik szakaszon belül ($i=1{,}2{,}3$). A rúd hosszváltozása pedig a rúdszakaszok hosszváltozásainak összege:

$$\boxed{\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i l_i}{A_i E_i}\,.} \tag{3.31}$$

A rúdban felhalmozódott teljes alakváltozási energia ugyanilyen módon az egyes rúdszakaszokban felhalmozódott alakváltozási energia összegeként adódik:

$$\boxed{U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \frac{N_i^2 l_i}{A_i E_i}\,.} \tag{3.32}$$

Mivel

$$\frac{\partial N_i}{\partial F_{Dz}} = 1; \qquad i = 1{,}2{,}3$$

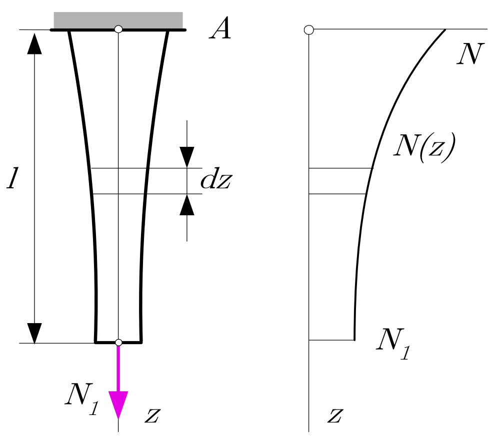
a (3.32) képletből a (3.24) egyenlet általánosítását jelentő

$$\frac{\partial U}{\partial F_{Dz}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i l_i}{A_i E_i} \frac{\partial N_i}{\partial F_{Dz}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{N_i l_i}{A_i E_i} = \lambda$$

összefüggés következik. Az ellenőrzés illetve méretezés azon alapul, hogy minden egyes szakaszra fenn kell állnia a

$$\sigma_{zi} \le \sigma_{\text{meg}\,i} \tag{3.33}$$

relációnak, ahol $\sigma_{\text{meg}\,i}$ az i-ik szakasz anyagának megengedett feszültsége.



3.12. ábra.

3.3.2. Folytonosan változó keresztmetszet. Ha folytonosan de csak kismértékben változik a keresztmetszet területe, akkor jó közelítéssel fennáll, hogy

$$\sigma_z(z) = \frac{N(z)}{A(z)} \tag{3.34}$$

a normálfeszültség, a többi feszültségkoordináta pedig elhanyagolhatóan kicsiny. A rúd hosszváltozását a dz hosszúságú elemi rúdszakasz dλ hosszváltozásának integrálja – a dλ hosszváltozás a (3.21) képletből adódik, ha N_1 helyére $N(z)$-t, l helyére dz-t, AE helyére pedig $A(z)E(z)$-t írunk –, azaz a hosszváltozások összege adja:

$$\lambda = \int_0^l \underbrace{\frac{N(z)}{A(z)E(z)}\mathrm{d}z}_{\mathrm{d}\lambda}\,. \tag{3.35}$$

Hasonló megfontolással kapjuk (3.23)-ból, hogy

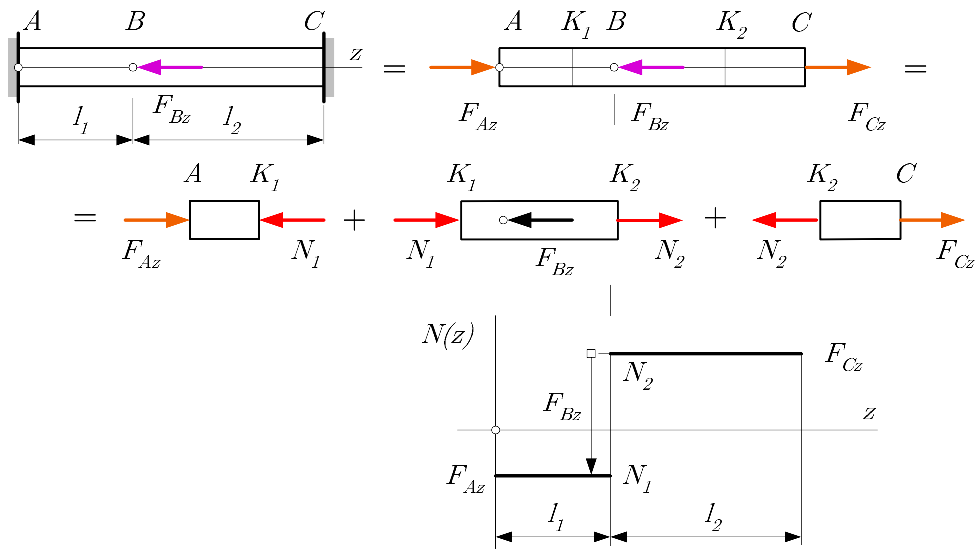
$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{N(z)^2}{A(z)E(z)}\mathrm{d}z \tag{3.36}$$

a rúdban felhalmozott alakváltozási energia. Ami pedig a fenti képletek érvényességét illeti ismételten felhívjuk a figyelmet arra a körülményre, hogy csak akkor alkalmazhatók ezek az összefüggések, ha lassan változik az A keresztmetszet a z függvényében.

Kimutatható, hogy a $dA/dz < 0.1$ reláció fennállása esetén a σ_z normálfeszültség a domináns, azaz az összes többi feszültségkoordináta elhanyagolható mellette. Megjegyezzük, hogy a hirtelen keresztmetszetváltozások feszültségnövekedést okozó hatását a későbbiekben tekintjük majd át.

3.4. Statikailag határozatlan feladatok

A jelen szakasz *statikailag határozatlan rudak* egyes feladataira fordítja figyelmét. Tengelyirányú erőkkel terhelt egyenes rudak esetén valamennyi erő a rúd tengelyvonala mentén működik, ezért egy egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésre a támasztóerők meghatározására. Ha a rúd valamelyik végét befogjuk, akkor egy ismeretlen támasztóerővel kell számolnunk, azaz a feladat statikailag határozott. Ha azonban a rúd mindkét vége befogott akkor két támasztóerőt kell meghatározni és így a feladat statikailag határozatlan, hiszen egy egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésre a két ismeretlen meghatározására. Ez azt jelenti, hogy további egyenletre van szükség a feladat határozottá tételéhez. Ezt a pótlólagos egyenletet abból a feltételből kapjuk, hogy a második támasz révén valójában meggátoljuk a rúd tengelyirányú méretváltozását.



3.13. ábra.

Az elmondottak, jól követhetők a 3.13. ábrán vázolt AC rúd esetén. A rúd két vége befogott, és tengelyvonalának B pontjában az $F_{Bz} < 0$ erő terheli. Az ábra feltünteti

- a támaszairól levett rudat és a reá ható F_{Bz} terhelést továbbá az ismeretlen F_{Az}, F_{Cz} támasztóerőket,
- a rúd AK_1, K_1K_2 és K_2C részeit – K_1 és K_2 az AC illetve BC szakaszokon belül lévő rúdkeresztmetszetek –, valamint a rajtuk működő külső és belső erőket, illetve
- az $N(z)$ rúderőábrát.

Mivel a rúd egyensúlyban van fenn kell állnia a

$$F_{Az} + F_{Bz} + F_{Cz} = 0 \tag{3.37}$$

vetületi egyenletnek. A rúd λ hosszváltozása zérus értékű. Visszaidézve a (3.31) képletet írhatjuk, hogy

$$\lambda AE = N_1 l_1 + N_2 l_2 = 0\,,$$

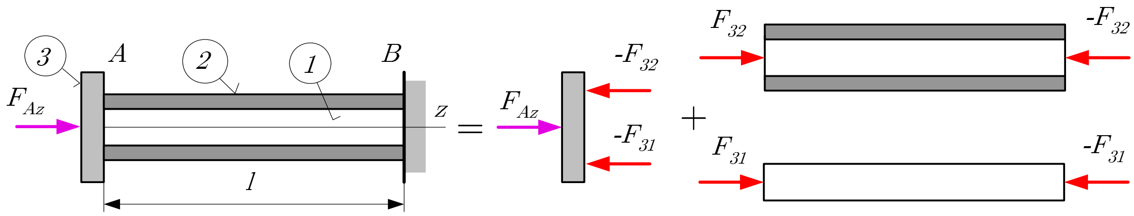
ahol az AK_1 illetve K_2C rúdszakaszok egyensúlya alapján $N_1 = -F_{Az}$ és $N_2 = F_{Cz}$. Következésképp

$$F_{Cz} = \frac{l_1}{l_2} F_{Az}\,. \tag{3.38}$$

Az utóbbi formula (3.37)-ba történő helyettesítésével F_{Az}-t, majd az F_{Az}-re vonatkozó eredményt (3.38)-be írva F_{Cz}-t kapjuk

$$F_{Az} = -\frac{l_2}{l_1 + l_2} F_{Bz}\,, \qquad\qquad F_{Cz} = -\frac{l_1}{l_1 + l_2} F_{Bz}\,. \tag{3.39}$$

Ezzel megoldottuk a feladatot.



3.14. ábra.

A 3.14. ábrán vázolt AB rúd két részből, a 2 jelű csőből és a cső belső átmérőjéhez illeszkedő 1 jelű tömör rúdból épül fel. A két rész anyaga különbözik egymástól. A rúd jobboldali vége befogott, a baloldali végét pedig a 3 jelű merev lap közvetítésével kifejtett F_{Az} nyomóerő terheli. Az ábra jobboldala a szerkezet részeit, valamint a rajtuk működő külső és belső erőket is feltünteti. Az 3 jelű merev lapon működő $-F_{31}$ és $-F_{32}$ erőknek valójában a z tengely a hatásvonala, elkülönített ábrázolásuk a viszonyok áttekinthetősége érdekében történt. Célunk a csőben illetve a tömör rúdban ébredő feszültségek meghatározása.

Vegyük észre, hogy a feladat statikailag határozatlan, mivel a

$$F_{Az} - F_{31} - F_{32} = 0 \tag{3.40}$$

egyensúlyi egyenletben a cső illetve a tömör rúd jobboldali végén kifejtett $-F_{31}$ és $-F_{32}$ támasztóerők az ismeretlenek. További egyenletet abból a feltételből kapunk, hogy azonos a tömör rúd λ_1 és a cső λ_2 összenyomódása.

A (3.21) képlet felhasználásával írhatjuk tehát, hogy

$$\frac{F_{31} l}{A_1 E_1} = \frac{F_{32} l}{A_2 E_2}\,. \tag{3.41}$$

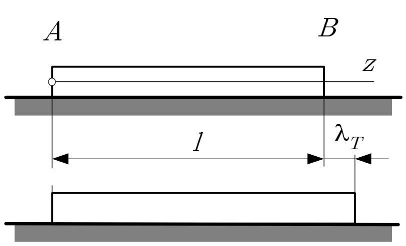
A (3.40), (3.41) egyenletrendszer

$$F_{31} = \frac{A_1 E_1}{A_1 E_1 + A_2 E_2} F_{Az} \qquad \text{és} \qquad F_{32} = \frac{A_2 E_2}{A_1 E_1 + A_2 E_2} F_{Az}$$

megoldásaival, ezek ui. a tömör rúdban és a csőben ébredő nyomóerők, már számítható a σ_z normálfeszültség.

3.5. A hőmérsékletváltozás hatása

Ezideig feltételeztük, hogy állandó a vizsgálat tárgyát képező rúd hőmérséklete a terhelési folyamat során. Az alábbiakban megvizsgáljuk azt a kérdést, hogy mi a hatása a hőmérsékletváltozásnak. Megjegyezzük, mint korlátozó feltevést, hogy a változás következtében kialakuló új hőmérsékletet is állandónak vettük a rúdon belül. Másképp fogalmazva nem foglalkozunk a rúdon belüli egyenlőtlen hőmérséklet-eloszlás feszültségekre gyakorolt hatásával.



3.15. ábra.

Az *első esetben* feltételezzük, hogy nincs gátolva a rúd hőmérsékletváltozás következtében kialakuló mozgása.

A 3.15. ábrán vázolt l hosszúságú prizmatikus rúd, mivel a felület melyen támaszkodik sima, szabadon mozoghat a rúd tengelye mentén. A rúd feszültségmentes. Növeljük meg a rúd hőmérsékletét és jelölje ΔT a vonatkozó hőmérsékletváltozást. A megfigyelések szerint

$$\lambda_T = \alpha l \Delta T \tag{3.42}$$

a rúd hőtágulásból adódó megnyúlása, ahol anyagjellemző az α *fajlagos hőtágulási együttható* – ez a mennyiség az egységnyi hosszúságú rúdszakasz tágulása, ha egy fokkal nő a hőmérséklet.

A vonatkozó fajlagos nyúlás a szokott módon számítható:

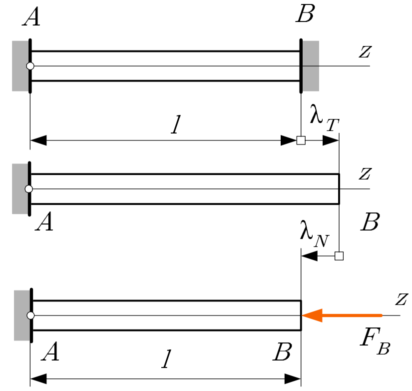
$$\varepsilon_z = \frac{\lambda_T}{l} = \alpha \Delta T \tag{3.43}$$

Mivel nincs gátolva a tengelyirányú mozgás ehhez az alakváltozáshoz nem társul feszültség.

A *második esetben* a rúd mindkét vége befogott.

Feltételezzük, hogy a hőmérséklet értékének megnövelése előtti kezdeti állapotban nincs feszültség a rúdban.

A rúd hőmérsékletének ΔT-vel való növelése azt eredményezi, hogy λ_T értékkel megnövekedik a rúd l hossza, ezt azonban megakadályozzák rúd végein elhelyezett támaszok. Következésképp zérus a z irányú fajlagos nyúlás, ugyanakkor azonban a tágulást akadályozó tengelyirányú erő és normálfeszültség ébred a rúdban. Jelölje F_B a rúd jobboldali végén ható nyomóerőt (támasztóerőt). Ennek tehát akkora az értéke, hogy a rúd hossza változatlan marad.



3.16. ábra.

Hogy matematikailag is át tudjuk tekinteni a viszonyokat tekintsük a 3.16. ábrát. A legfelső ábrarészlet a rúd kezdeti állapotát szemlélteti. Távolítsuk most el gondolatban a jobboldali befogást és növeljük meg a hőmérsékletet. Ez esetben $l+\lambda_T = l(1+\alpha\Delta T)$ lesz a rúd hossza, és ez nagyobb mint a támaszok l távolsága. Következőleg nem fér el a rúd a támaszok között. Az így megnyúlt rudat a középső ábrarészlet mutatja. A rúd úgy nyeri vissza eredeti hosszát, ha a jobboldali végén akkora F_B nyomóerőt alkalmazzunk – ez valójában a támasztóerő –, hogy a vonatkozó λ_N összenyomódás pontosan akkora mint a hőtágulásból adódó nyúlás, azaz

$$\lambda_T = \lambda_N \tag{3.44}$$

Az utóbbi képletből a (3.42) és (3.21) összefüggések felhasználásával az

$$\alpha l \Delta T = \frac{F_B l}{AE}\,, \qquad \text{vagy ami ugyanaz az} \qquad F_B = AE\alpha\Delta T$$

eredmény következik. A normálfeszültség értékét pedig a

$$\sigma_z = -\frac{F_B}{A} = -E\alpha\Delta T$$

összefüggés adja. Végezetül felhívjuk a figyelmet arra, hogy ez a feladat is statikailag határozatlan feladat. A z irányú vetületi egyenletből ui. csak annyi következik, hogy a rúd két végén azonos nagyságú de ellentétes irányú támasztóerők működnek. Maga az F_B támasztóerő egy további független egyenletből, a (3.44) geometriai feltételből adódott.

3.6. Mintafeladatok

3.1. A húzókísérlet során a próbatest mértékadó l hosszúságú szakaszán mindig pozitív a térfogatváltozás. Mutassa meg, hogy ebből a körülményből következik a Poisson tényezővel kapcsolatos (3.9) egyenlőtlenség.

Mivel állandó az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor állandó és a kísérleti eredményekkel összhangban pozitív a fajlagos térfogatváltozás. Tekintettel a (2.54) és a $(3.14)_2$ összefüggésekre fennáll a

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_z(1-2\nu) > 0\,,$$

reláció ahonnan ε_z pozitivitása miatt valóban az $1-2\nu>0$ képlet, azaz a bizonyítani kivánt egyenlőtlenség következik.

3.2. Mutassa meg, hogy húzott vagy nyomott prizmatikus rudak esetén

$$u_x = u = u_A - \frac{N}{AE}\nu x, \qquad u_y = v = v_A - \frac{N}{AE}\nu y \qquad \text{és} \qquad u_z = w = w_A + \frac{N}{AE}z$$

alakú az elmozdulásmező, ahol u_A, v_A és w_A az origó merevtestszerű eltolódása.

Nyilvánvaló, hogy

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \frac{N}{AE}\,, \qquad \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{N}{AE}\,\nu \qquad \text{és} \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{N}{AE}\,\nu$$

Az első egyenlet z, a második x és a harmadik y szerinti integrálásával innen az

$$u_z = w = w_A + \frac{N}{AE}z + f_z(x,y), \qquad u_x = u_A - \frac{N}{AE}\nu x + f_x(y,z) \qquad \text{és} \qquad u_y = v = v_A - \frac{N}{AE}\nu y + f_y(x,z)$$

eredményt kapjuk, ahol az $f_z(x,y)$, $f_x(y,z)$ és $f_y(z,x)$ egyelőre ismeretlen függvények. A továbbiakban megmutatjuk, hogy ezek mindegyike zérus. Ennek igazolása azon alapul, hogy zérus értékűek a szögtorzulások, és zérus értékű a forgató tenzor. Következésképp fennállnak a

$$\gamma_{xy} = 0, \quad 2\varphi_z = 0; \qquad \gamma_{yz} = 0, \quad 2\varphi_x = 0; \qquad \text{és} \qquad \gamma_{zx} = 0, \quad 2\varphi_y = 0;$$

egyenletkettősök. Az első egyenletkettősből a (2.37b) és a (2.35) felhasználásával a

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial f_x(y,z)}{\partial y} + \frac{\partial f_y(x,z)}{\partial x} = 0$$

$$2\varphi_z = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y(x,z)}{\partial x} - \frac{\partial f_x(y,z)}{\partial y} = 0$$

összefüggések következnek, azaz

$$\frac{\partial f_x(y,z)}{\partial y} = 0 \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial f_y(x,z)}{\partial x} = 0\,. \tag{3.45}$$

Ugyanilyen gondolatmenettel kapjuk, a második és harmadik egyenletkettősből, hogy

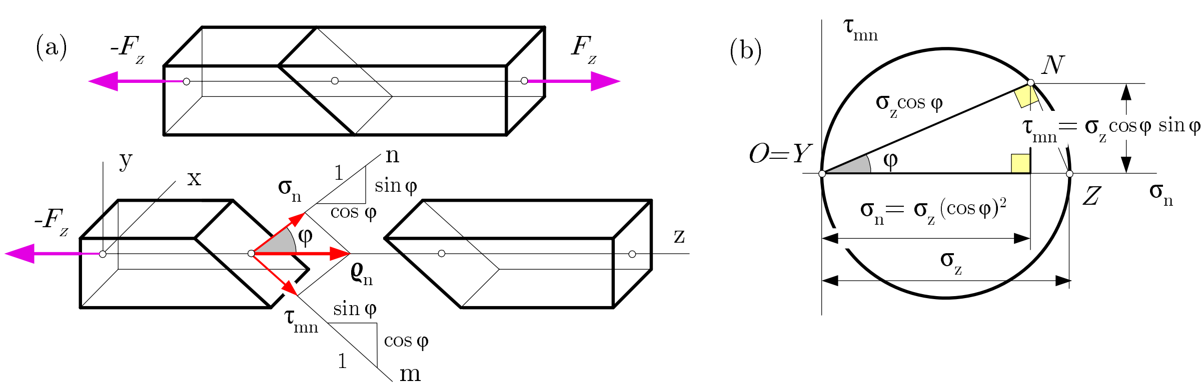
$$\frac{\partial f_y(x,z)}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial f_z(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad \text{és} \qquad \frac{\partial f_z(x,y)}{\partial x} = 0\,, \qquad \frac{\partial f_x(y,z)}{\partial z} = 0 \tag{3.46}$$

A $(3.45)_1$ és $(3.46)_4$ egyenleteknek

$$f_x(y,z) = C + f(z) \qquad \text{és} \qquad f_x(y,z) = C + g(y)$$

a megoldásuk, ahol C állandó, az $f(z)$ és $g(y)$ függvények pedig tetszőlegesek. Következőleg az $f_x(y,z)$-re vonatkozó megoldások csak akkor lehetnek egyenlőek, ha $f_x(y,z)=C$. A C állandó pedig zérus kell legyen, mivel az origóban, feltevésünk szerint, $u_x = u_A$. Ugyanilyen gondolatmenettel kapjuk, hogy $f_y = f_z = 0$. Az igazolás további részleteit az olvasóra hagyjuk.

3.3. A 3.17.(a) ábrán vázolt prizmatikus rudat a rúd tengelyvonala mentén működő F_z és $-F_z$ húzóerők terhelik. A rudat gondolatban átmetszük egy az x tengellyel párhuzamos síkkal. Mekkora az átmetszett síkon ébredő normál és nyírófeszültség?



3.17. ábra.

Jelölje φ a sík n normálisának z tengellyel bezárt szögét. Az átmetsző síkban fekvő m irány merőleges az n és x irányokra. Leolvasható az ábráról, hogy

$$\mathbf{n} = \sin\varphi\,\mathbf{e}_y + \cos\varphi\,\mathbf{e}_z \qquad \text{és} \qquad \mathbf{m} = -\cos\varphi\,\mathbf{e}_y + \sin\varphi\,\mathbf{e}_z; \qquad |\mathbf{n}| = |\mathbf{m}| = 1\,.$$

A (2.79) és (3.12) képletek szerint

$$\underline{\rho}_n = \underline{\mathbf{T}}\,\underline{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_z\cos\varphi \end{bmatrix}, \qquad \text{vagyis} \qquad \rho_n = \sigma_z\cos\varphi\,\mathbf{e}_z$$

a feszültségvektor, ahol a (3.30) alapján $\sigma_z = F_z/A$ az A pedig a rúd keresztmetszetének területe. Vegyük észre, hogy ρ_n párhuzamos a z tengellyel. Ez azt jelenti, hogy a nyírófeszültség párhuzamos kell legyen az m iránnyal. A (2.83a,b) képletekkel

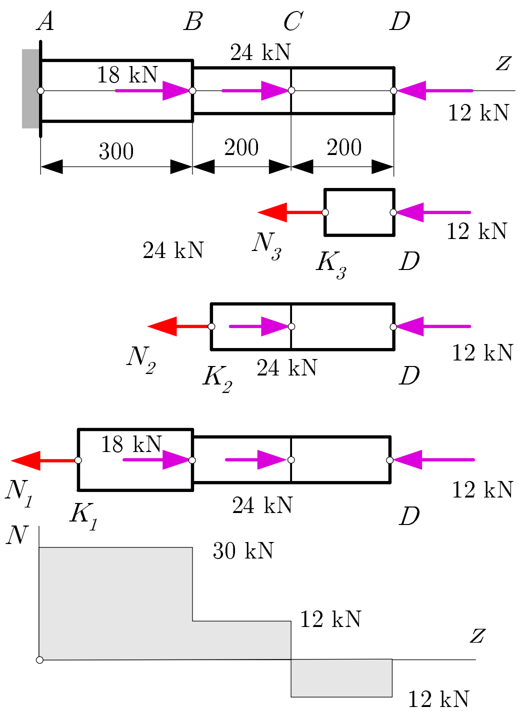
$$\sigma_n = \mathbf{n}\cdot\rho_n = \sigma_z\,(\cos\varphi)^2 \qquad \text{és} \qquad \tau_{mn} = \mathbf{m}\cdot\rho_n = \sigma_z\cos\varphi\sin\varphi$$

a keresett normál és nyírófeszültség. Figyeljük meg, hogy a ρ_n feszültségvektor N végpontja σ_z átmérőjű körön helyezkedik el a σ_n, τ_{mn} koordinátarendszerben[1]. Magát az N pontot úgy kapjuk meg, hogy párhuzamost húzunk az origón keresztül az n iránnyal. Ha $\varphi = 0$, akkor $\sigma_n = \sigma_z$ az N pont pedig a Z

[1]Ismeretes, hogy az $r = a\cos\varphi$ egyenlet – itt φ a polárszög – a átmérőjű kör egyenlete polárkoordináta-rendszerben. A jelen esetben a σ_z normálfeszültség felel meg az a-nak.

pont, ha pedig $\varphi = \pi/2$, akkor $\sigma_n = 0$ az N pont pedig az origóval egybeeső Y pont. A kört a 3.17.(b) ábra szemlélteti.

3.4. Határozza meg a 3.18. ábrán vázolt szakaszonként állandó keresztmetszetű $ABCD$ rúd AB, BC és CD szakaszain belül a σ_z normálfeszültséget, a rúd végpontjának elmozdulását és a rúdban felhalmozódott alakváltozási energiát. Az AB rúdszakasz anyaga acél, amelyre $E=2\cdot10^5\,\mathrm{N/mm}^2$, a keresztmetszet területe pedig $A_1 = 600\,\mathrm{mm}^2$. A $BD = BC+CD$ rúdszakasz aluminium, amelyre $E = 7\cdot10^4\,\mathrm{N/mm}^2$, a keresztmetszet területe pedig $A_2=A_3=400\,\mathrm{mm}^2$. (Az indexek kiírása arra utal, hogy a vonatkozó képletek alkalmazásakor a rudat három szakaszra bontjuk.)



3.18. ábra.

A 3.18. ábra rendre szemlélteti a K_3D, K_2D és K_1D rúdszakaszokat, valamint a reájuk működő külső és belső erőket. Leolvasható ezek egyensúlyából, hogy

$$N_1 = 30\,\mathrm{kN}, \qquad N_2 = 12\,\mathrm{kN} \qquad \text{és} \qquad N_3 = -12\,\mathrm{kN}\,.$$

A kapott értékekkel megrajzolt $N(z)$ függvényt az ábra alsó részén találjuk. A rúderők ismeretében a (3.30) képletből

$$\sigma_{z1} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{30\cdot10^3\mathrm{N}}{600\mathrm{mm}^2} = 50\,\mathrm{N/mm}^2$$

$$\sigma_{z2} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{12\cdot10^3\mathrm{N}}{400\mathrm{mm}^2} = 30\,\mathrm{N/mm}^2$$

és

$$\sigma_{z3} = \frac{N_3}{A_3} = -\frac{12\cdot10^3\mathrm{N}}{400\mathrm{mm}^2} = -30\,\mathrm{N/mm}^2$$

a keresett normálfeszültségek. A rúd hosszváltozását a (3.31) összefüggés alapján az 1 jelű AB, a 2 jelű BC és 3 jelű CD rúdszakaszok hosszváltozása adja:

$$\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = \frac{N_1 l_1}{A_1E_1}+\frac{N_2 l_2}{A_2E_2}+\frac{N_3 l_3}{A_3E_3}\,,$$

ahol a feladat adatai szerint a 2 és 3 jelű rúdszakaszokon minden értékek azonos kivéve a rúderőt, amelyre nézve azonban csak az előjelben van különbség. Következőleg $\lambda_2+\lambda_3=0$. Ezt figyelembevéve és a vonatkozó értékeket helyettesítve a

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{\left(30\cdot10^3\mathrm{N}\right)\cdot300\mathrm{mm}}{(600\mathrm{mm}^2)\cdot2\cdot10^5\mathrm{N/mm}^2} = 0.075\ \mathrm{mm}$$

eredményt kapjuk.

Hasonlóan kapjuk a (3.32) felhasználásával, hogy a teljes alakváltozási energia az 1, 2 és 3 jelű részekben felhalmozott alakváltozási energia összege:

$$U = U_1+U_2+U_3 = \frac{1}{2}\frac{N_1^2 l_1}{A_1E_1}+\frac{1}{2}\frac{N_2^2 l_2}{A_2E_2}+\frac{1}{2}\frac{N_3^2 l_3}{A_3E_3} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(30\cdot10^3\mathrm{N}\right)^2\cdot300\mathrm{mm}}{(600\mathrm{mm}^2)\cdot2\cdot10^5\mathrm{N/mm}^2}+\frac{\left(12\cdot10^3\mathrm{N}\right)^2\cdot200\mathrm{mm}}{(400\mathrm{mm}^2)\cdot7\cdot10^4\mathrm{N/mm}^2} = 2153.6\,\mathrm{Nmm}\,.$$

3.5. A 3.19. ábrán vázolt merev $ABCD$ kart a 10 mm átmérőjű AK és a 15 mm átmérőjű LB rúd valamint a C csukló támasztja meg. A két rúd rézből készült, melyre $E = 110\cdot10^3\ \mathrm{N/mm}^2$. Határozza meg az egyes rudakban ébredő N_A és N_B rúderőket, valamint a rudak végpontjainak függőleges λ_A és λ_B elmozdulásait, ha a kar D pontjában 33 kN nagyságú teher van elhelyezve.

Az ábra szemlélteti a támaszairól levett rudat, valamint a rúdra ható összes külső erőt. A C pontra felírt nyomatéki egyenlet szerint

$$m_C = 0 = (0.5\mathrm{m})\cdot33\mathrm{kN}-(0.5\mathrm{m})\,N_A-(0.25\mathrm{m})\,N_B$$

illetve

$$2N_A+N_B = 66\,. \tag{3.47}$$

A merev karnak feltevés szerint kicsi a szögelfordulása. Amint az leolvasható az ábráról

$$\frac{\lambda_A}{0.5\mathrm{m}} = \frac{\lambda_B}{0.25\mathrm{m}}\,, \qquad \text{azaz} \qquad \lambda_A = 2\lambda_B \tag{3.48}$$

és

$$\lambda_A = \delta_D \,.$$

Az 1 jelű AK és 2 jelű LB rúd

$$\lambda_A = \frac{N_A l_1}{EA_1} \qquad \text{és} \qquad \lambda_B = \frac{N_B l_2}{EA_2}$$

megnyúlásait a $(3.48)_2$ összefüggésbe írva az

$$\frac{N_A l_1}{EA_1} = 2\frac{N_B l_2}{EA_2} \,,$$

illetve az

$$N_A = 2\frac{A_1 l_2}{A_2 l_1} N_B = 2\frac{d_1^2 \pi l_2}{d_2^2 \pi l_1} N_B =$$

$$= 2\frac{(10\text{mm})^2 \cdot 0.9\text{m}}{(15\text{mm})^2 \cdot 0.6\text{m}} N_B = \frac{4}{3} N_B$$

eredmény következik. Ha az utóbbi képletet visszaírjuk a (3.47) egyenletbe, akkor

$$\frac{8}{3} N_B + N_B = 66 \,, \qquad \text{azaz} \qquad N_B = 18\,\text{kN}$$

amivel

$$N_A = \frac{4}{3} N_B = 24\,\text{kN} \,.$$

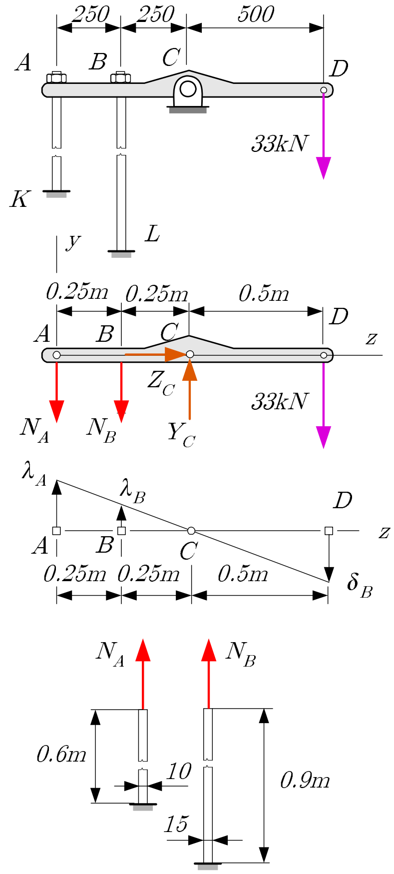
A fentiek alapján

$$\delta_D = \lambda_A = \frac{N_A l_1}{EA_1} =$$

$$= \frac{(24 \cdot 10^3\text{N}) \cdot (600\,\text{mm})}{\left(110 \cdot 10^3\text{N/mm}^2\right) \cdot (5\,\text{mm})^2 \cdot \pi} = 1.6668\,\text{mm}$$

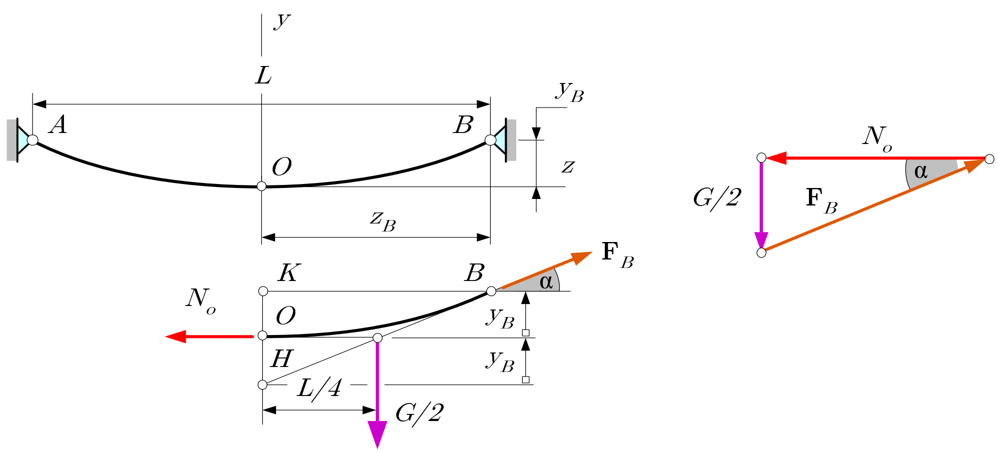
és

$$\lambda_B = 0.5\lambda_A = 0.8334\,\text{mm} \,.$$



3.19. ábra.

3.6. A 3.20. ábrán vázolt kis belógású aluminiumötvözet huzal $L = 40$ m távolságot hidal át. Mekkora lehet a huzal belógása, ha az aluminiumnak $\gamma = 2.746\,8 \cdot 10^{-5}$ N/mm^3 a fajsúlya, $E = 72 \cdot 10^3$ N/mm^2 a rugalmassági modulusa és $\sigma_{\text{meg}} = 130$ N/mm^2 a megengedett feszültség. Határozza meg a huzal hosszát is.



3.20. ábra.

A maximális $N_{\max}$ kötélerő a megengedett feszültség birtokában a

$$N_{\max} = A\sigma_{\text{meg}}$$

módon számítható, ahol A a huzal keresztmetszete. A kötél felének súlya pedig abból a megfontolásból adódik, hogy $2s_{OB} \simeq L$ és így

$$\frac{G}{2} \simeq \frac{L}{2} A\gamma \,.$$

Az ábra azzal a kis belógás esetére érvényes feltevéssel ábrázolja a huzal OB szakaszát, hogy másodfokú parabola a huzal alakja. Ez esetben ui. az O pontbeli vízszintes érintő és a B pontbeli érintő a $z = L/4$ abcisszájú egyenesen metszi egymást. Következőleg $\overline{OH} = y_B$. Az ábra feltünteti az OB huzalszakaszon működő N_o kötélerőt, a huzalszakasz súlyát adó $G/2$ súlyerőt, valamint a B pontbeli $\mathbf{F}_B$ támasztóerőt. Az ábra szemlélteti az OB szakasz egyensúlyát kifejező erőháromszöget is. A maximális kötélerőre nézve nyilvánvalóan fennáll, hogy

$$N_{\max} = |\mathbf{F}_B| \,.$$

Következőleg

$$N_o = \sqrt{(\mathbf{F}_B)^2 - \frac{G^2}{4}} = \sqrt{(N_{\max})^2 - \frac{G^2}{4}} = A\sqrt{(\sigma_{\text{meg}})^2 - \frac{(\gamma L)^2}{4}} \,.$$

Mivel az erőháromszög és a BKH háromszög hasonló

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{G}{2}}{N_o} = \frac{2y_B}{\frac{L}{2}} \,,$$

ahonnan

$$y_B = \frac{L}{8}\frac{G}{N_o} = \frac{\gamma L^2}{\sqrt{(\sigma_{\text{meg}})^2 - \frac{(\gamma L)^2}{4}}} \,.$$

Ez azt jelenti, hogy független a belógás a kábel keresztmetszetétől. A vonatkozó értékek helyettesítésével kapjuk, hogy

$$y_B = \frac{2.7468 \cdot 10^{-5}\text{N/mm}^3 \cdot \left(40 \cdot 10^3\text{mm}\right)^2}{\sqrt{\left(130\text{N/mm}^2\right)^2 - \frac{\left(2.746\,8 \cdot 10^{-5}\text{N/mm}^3 \cdot 40 \cdot 10^3\text{mm}\right)^2}{4}}} = 338\,\text{mm} \,.$$

A tényleges L_t huzalhossz annak figyelembevételével számítható, hogy az origó csúcspontú OB parabolaívnek közelítőleg

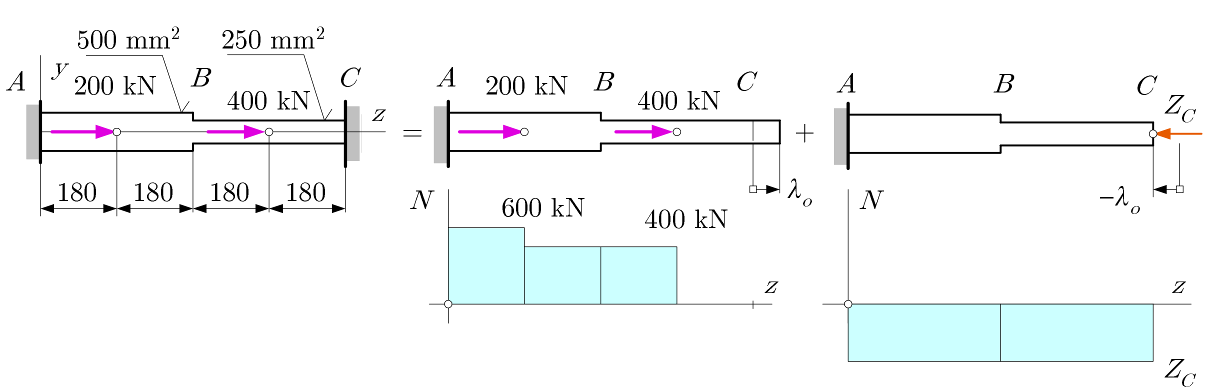
$$s_{OB} \simeq z_B \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{z_B}\right)^2\right]$$

a hossza a zy KR-ben, feltéve hogy $y_B/z_B < 0.5$. Az utóbbi képlettel

$$L_t = 2z_B \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{y_B}{z_B}\right)^2\right] = \left(40 \cdot 10^3\text{mm}\right) \cdot \left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{338\text{mm}}{20 \cdot 10^3\text{mm}}\right)^2\right] = 40007.6\,\text{mm}$$

a huzalhossz értéke.

3.7. A 3.21. ábrán vázolt a terhelés előtt mindkét végén befogott és acélból készült AC rúdon két tengelyirányú külső erő működik. Határozza meg a C pontban ébredő Z_C támasztóerőt.



3.21. ábra.

Ha eltávolítva gondoljuk a jobboldali C támasztot, akkor a terhelések hatására λ_o lenne a C támasz eltávolítása után statikailag határozott AC rúd megnyúlása. A C pontban ébredő $Z_C < 0$ támasztóerő hatására a rúd vissza kell, hogy nyerje eredeti hosszát azaz a Z_C erő $-\lambda_o$ hosszváltozást okoz.

A középső ábrarészlet a C támasz eltávolítása után szemlélteti a rudat és terheléseit, valamint a ruderő ábrát. A (3.31) összefüggés értelemszerű alkalmazásával írhatjuk, hogy

$$\lambda_o = \sum_{i=1}^{4} \frac{N_i l_i}{A_i E},$$

ahol balról jobbra haladva $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 180$ mm, $A_1 = A_2 = 500\ \mathrm{mm}^2$, $A_3 = A_4 = 250\ \mathrm{mm}^2$ és $N_1 = 600$ kN, $N_2 = N_3 = 400$ kN, $N_4 = 0$ kN. Ezekkel az értékekkel

$$\lambda_o = \sum_{i=1}^{4} \frac{N_i l_i}{A_i E} = \frac{1}{E}\left[\frac{600\cdot 10^3\mathrm{N}}{500\,\mathrm{mm}^2} + \frac{400\cdot 10^3\mathrm{N}}{500\,\mathrm{mm}^2} + \frac{400\cdot 10^3\mathrm{N}}{250\,\mathrm{mm}^2} + 0\right]\cdot 180\,\mathrm{mm} = \frac{1}{E} 6.48\cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}}$$

a rúd megnyúlása.

A jobboldali ábrarészlet az állandó Z_C erő hatását illusztrálja. A fentihez hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$-\lambda_o = Z_C \sum_{i=1}^{4} \frac{l_i}{A_i E} = \frac{Z_C}{E}\left[\frac{1}{500\,\mathrm{mm}^2} + \frac{1}{500\,\mathrm{mm}^2} + \frac{1}{250\,\mathrm{mm}^2} + \frac{1}{250\,\mathrm{mm}^2}\right]\cdot 180\,\mathrm{mm} = \frac{Z_C}{E} \times 2.16 \frac{1}{\mathrm{mm}}.$$

Az utóbbi két képlet felhasználásával

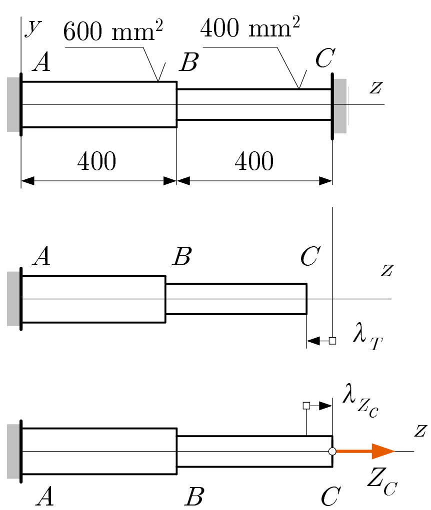
$$0 = \lambda_o - \lambda_o = \sum_{i=1}^{4} \frac{N_i l_i}{A_i E} + Z_C \sum_{i=1}^{4} \frac{l_i}{A_i E} = \frac{1}{E} 6.48\cdot 10^5 \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} + \frac{Z_C}{E} \times 2.16 \frac{1}{\mathrm{mm}},$$

ahonnan

$$Z_C = -\frac{\sum_{i=1}^{4} \frac{N_i l_i}{A_i E}}{\sum_{i=1}^{4} \frac{l_i}{A_i E}} = -300\,\mathrm{kN}$$

a keresett támasztóerő.

3.8. A 20 C°szobahőmérsékleten 800 mm hosszú, szakaszonként állandó keresztmetszetű ABC acélrudat -40 C°-ra hűtjük le. Mekkora feszültség ébred az egyes rúdszakaszokban ha eltekintünk a keresztmetszetváltozás feszültséggyűjtő hatásától. Vegye figyelembe, hogy acélra $\alpha = 1.2\cdot 10^{-5}/\mathrm{C}°$ a fajlagos hőtágulási együttható és $E = 2.1\cdot 10^5\ \mathrm{N/mm}^2$ a rugalmassági modulus.



3.22. ábra.

Vegyük észre, hogy a szerkezet statikailag egyszeresen határozatlan. Ha elhagyjuk a jobboldali megfogást, akkor

$$\lambda_T = \underbrace{\alpha \Delta T}_{\varepsilon_T} l = \left(1.2\cdot 10^{-5}/C°\right)\cdot(-60C°)\cdot(800\,\mathrm{mm}) =$$

$$= -0.576\,\mathrm{mm}$$

hosszváltozást okoz a $\Delta T = -60$ C° hőmérsékletváltozás. Ha az így megrövidült rúd jobboldali végén működtetjük az egyelőre ismeretlen Z_C támasztóerőt, akkor

$$\lambda_{Z_C} = \frac{Z_C l_1}{A_1 E} + \frac{Z_C l_2}{A_2 E} = \frac{Z_C}{E}\left(\frac{l_1}{A_1} + \frac{l_2}{A_2}\right)$$

a rúd megnyúlása. A feladat $l_1 = l_2 = 400$ mm, $A_1 = 600\,\mathrm{mm}^2$, $A_2 = 400\,\mathrm{mm}^2$ és $E = 2.1\cdot 10^5\ \mathrm{N/mm}^2$ adatainak helyettesítésével

$$\lambda_{Z_C} = Z_C \frac{400\,\mathrm{mm}}{2.1\cdot 10^5 \mathrm{N/mm}^2}\left(\frac{1}{600\,\mathrm{mm}^2} + \frac{1}{400\,\mathrm{mm}^2}\right) =$$

$$= Z_C \cdot \frac{10^{-5}}{2.1\cdot 0.6}\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{N}}.$$

Mivel zérus a rúd teljes hosszváltozása írhatjuk, hogy

$$\lambda = \lambda_T + \lambda_{Z_C} = -0.576\,\mathrm{mm} + Z_C \cdot \frac{10^{-5}}{2.1\cdot 0.6}\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{N}} = 0,$$

ahonnan

$$Z_C = 72576.0\,\mathrm{N}.$$

A támasztóerő ismeretében

$$\sigma_1 = \frac{Z_C}{A_1} = \frac{72576.0\,\mathrm{N}}{600\,\mathrm{mm}^2} = 120.96\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

és

$$\sigma_2 = \frac{Z_C}{A_2} = \frac{72576.0\,\mathrm{N}}{400\,\mathrm{mm}^2} = 181.44\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

a normálfeszültség az AB és BC rúdszakaszokon belül. Vegyük észre, hogy a fajlagos nyúlások és ennek megfelelően az egyes rúdszakaszok hosszváltozásai is különbözőek:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \varepsilon_T + \frac{\sigma_1}{E} = \alpha\Delta T + \frac{\sigma_1}{E} = \left(1.2\cdot 10^{-5}/C^\circ\right)\cdot(-60C^\circ) + \frac{120.96\,\mathrm{N/mm}^2}{2.1\cdot 10^5\,\mathrm{N/mm}^2} = \\ &= -7.2\cdot 10^{-4} + 5.76\cdot 10^{-4} = -1.44\cdot 10^{-4} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_T + \frac{\sigma_2}{E} = -7.2\cdot 10^{-4} + \frac{181.44}{2.1\cdot 10^5} = 1.44\cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

amivel

$$\lambda_{AB} = \varepsilon_1 l_1 = -1.44\cdot 10^{-4}\cdot 400\,\mathrm{mm} = -0.0576\,\mathrm{mm} = -\lambda_{BC}$$

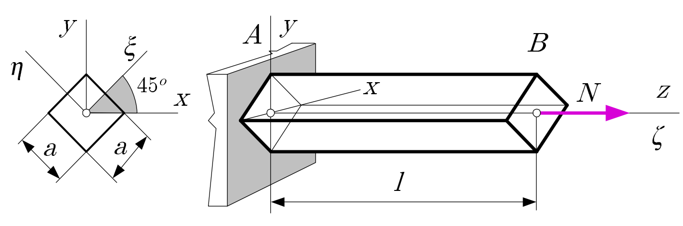
az AB és BC szakasz hosszváltozása. Nyilvánvaló, hogy

$$\lambda_{AB} + \lambda_{BC} = 0\,.$$

Gyakorlatok

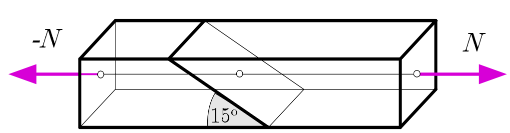
3.1. Egy 1.8 m hosszúságú és körkeresztmetszetű vezérlőrúd megnyúlása nem lehet több, mint 1.8 mm ha 9 kN nagyságú húzóerő hat rá. A rúd anyaga acél, melyre $E_{acél} = 2.1\cdot 10^5$ N/mm^2. Mekkora a rúd átmérője és mekkora a rúdban ébredő feszültség? Megfelel ezzel az átmérővel a rúd, ha $\sigma_{\mathrm{jell}} = 375$ N/mm^2 az előírt biztonsági tényező pedig $n = 1.5$?

3.2. A 3.23. ábrán vázolt $l = 400$ mm hosszú és négyzetkeresztmetszetű acél rudat húzásra veszi igénybe a B keresztmetszetben centrikusan működő N erő. A rúd megnyúlása $\lambda = 0.04$ mm, a rugalmassági modulus $E_{acél} = 2\cdot 10^5$ N/mm^2, a Poisson szám $\nu = 0.3$, a négyzet oldaléle pedig $a = 20$ mm. (a) Határozza meg az ε_x, ε_y és ε_z fajlagos nyúlások, a σ_z normálfeszültség, valamint az N húzóerő értékét. (b) Írja fel az alakváltozási és a feszültségi tenzor mátrixait az xyz és $\xi\eta\zeta$ KR-ben. (c) Mekkora az N erő, ha $\Delta a = -0.045$ mm a négyzet a oldalélének a megváltozása?



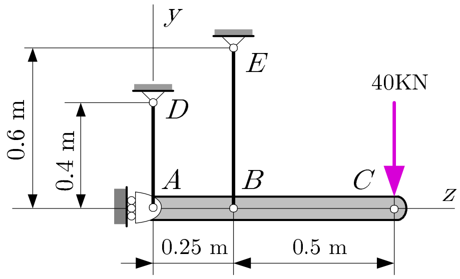
3.23. ábra.

3.3. Az ábrán vázolt állandó 60×80 mm^2 keresztmetszetű farúd két részből áll, amelyek az ábrán feltüntetett sík mentén vannak egymáshoz ragasztva. Mekkora lehet az N terhelőerő legnagyobb értéke, ha a feladat viszonyai között $\tau_{\mathrm{meg}} = 0.6\,\mathrm{N/mm}^2$ a megengedett nyírófeszültség a ragasztóanyagra nézve.



3.24. ábra.

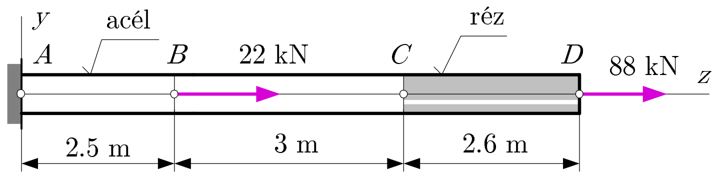
3.4. Egy vékony acélhuzal megnyúlása nem haladhatja meg az 1.5 mm-t. Mekkora a huzal hossza, ha $\sigma_{\mathrm{meg}} = 105$ N/mm^2 és $E_{acél} = 2.1\cdot 10^5$ N/mm^2? Mekkora a huzal átmérője, ha a húzóerő $N = 330$ N?



3.25. ábra.

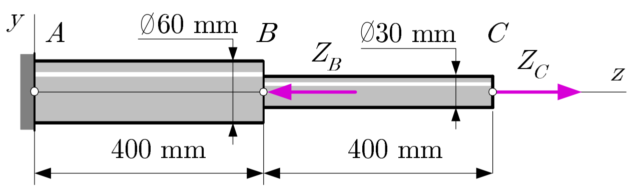
3.5. A tökéletesen merev ABC rudat az AD aluminium és BE acél rudak segítségével az ábrán vázolt módon függesztjük fel. Az AD rúd keresztmetszete 500 mm^2, az aluminium rugalmassági modulusza $E_{aluminium} = 7.2 \cdot 10^4$ N/mm^2; a BE rúd keresztmetszete 650 mm^2, az acél rugalmassági modulusa pedig $E_{acél} = 2.1 \cdot 10^5$ N/mm^2. Mekkorák az A, B és C pontok elmozdulásai?

3.6. A 3.26. ábrán vázolt 44 mm átmérőjű körkeresztmetszetű rúd AC szakasza acélból, CD szakasza pedig, rézből készült. A rúd terhelését az ábra szemlélteti. Számítsa ki C és D pontok elmozdulásait!



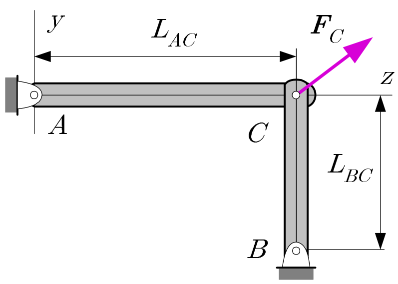
3.26. ábra.

3.7. A 3.27. ábrán vázolt ABC rúd acélból készült, melyre $E_{acél} = 2 \cdot 10^5$ N/mm^2. Határozza meg a B és C keresztmetszetek elmozdulásait, ha $Z_B = -200$ kN és $Z_C = 50$ kN.



3.27. ábra.

3.8. Tegyük fel, hogy $Z_B = -250$ kN. (a) Mekkora legyen a Z_C erő ha azt akarjuk, hogy ne változzon a rúd hossza? (b) Mekkora ez esetben a B pont elmozdulása?



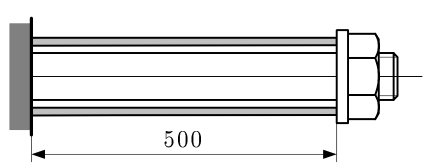
3.28. ábra.

3.9. A 3.28. ábrán vázolt háromcsuklós ív C pontját az F_C erő terheli. (a) Az AC és BC rudak azonos anyagúak és a rúdkeresztmetszetek területei is azonosak. Mutassa meg, hogy az

$$\frac{F_{Cy}}{F_{Cz}} = \frac{L_{AC}}{L_{BC}}$$

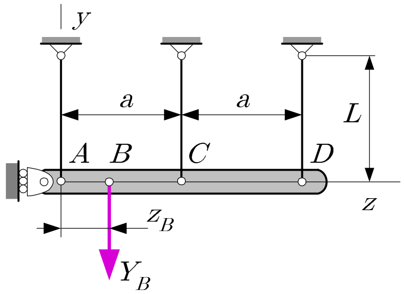
reláció fennállása esetén a C pont a z tengellyel 45^o-os szöget bezáró egyenes mentén mozdul el. (b) Hogyan változik meg a feltétel alakja, ha a különböző a két rúd anyaga és keresztmetszete?

3.10. Az egyik végén befogott 12 mm átmérőjű sárgaréz csavart ($E_{\text{sárgaréz}} = 1.05 \cdot 10^5$ N/mm^2) a 3.29. ábrán vázolt módon 20 mm külső átmérőjű és 2 mm falvastagságú aluminium csőbe ($E_{\text{aluminium}} = 7.2 \cdot 10^4$ N/mm^2) helyezzük. Ha nem lép fel erő a csavaranya és a cső között, az ábra ezt a helyzetet szemlélteti, akkor 500 mm hosszú a csavar csőben fekvő része. Ekkor az anyát a teljes fordulat egyharmadával szorosabbra húzzuk. Mekkora a normálfeszültség a csőben és a csavarban, ha a menetemelkedés 1.5 mm.



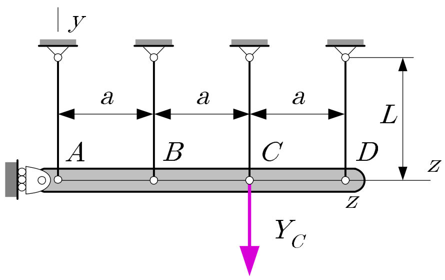
3.29. ábra.

3.11. Mekkora az előző feladat esetén a csőben és a csavarban ébredő feszültség, ha a csavar anyaga acél. A feladat egyéb adatai változatlanok. ($E_{acél} = 2.1 \cdot 10^5$ N/mm^2).



3.30. ábra.

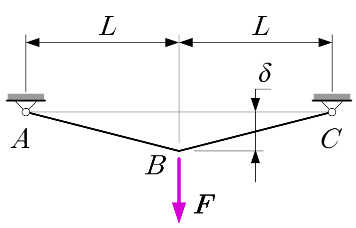
3.12. Az ACD merev rudat három azonos kötél segítségével a 3.30. ábrán vázolt módon függesztjük fel. A z_B koordinátájú B pontban az $Y_B < 0$ erő terheli a szerkezetet. A rúd súlya elhanyagolható az $|Y_B|$ mellett. Határozza meg mekkora lehet a z_B ha azt akarjuk, hogy mindegyik kötél megfeszüljön.



3.31. ábra.

3.13. Az $ABCD$ merev rudat négy azonos kötél segítségével a 3.31. ábrán vázolt módon függesztjük fel. A C pontban az $Y_C < 0$ erő terheli a szerkezetet. A rúd súlya elhanyagolható $|Y_C|$ mellett. Határozza meg az egyes kötelekben ébredő erőt.

3.14. Oldja meg az előző feladatot, ha (a) eltávolítjuk a C ponthoz csatlakozó kötelet (b) ha eltávolítjuk a D ponthoz csatlakozó kötelet.



3.32. ábra.

3.15. A terheletlen állapotban $2L$ hosszúságú köteldarabot a 3.32. ábrán vázolt módon az F erő terheli. Mutassa meg, hogy a $\delta \ll L$ feltétel fennállása esetén

$$\delta = L\sqrt[3]{\frac{F}{AE}}$$

a kötél középső B pontjának függőleges elmozdulása. Itt E a kötél anyagának rugalmassági modulusa, A pedig a kötél keresztmetszete.

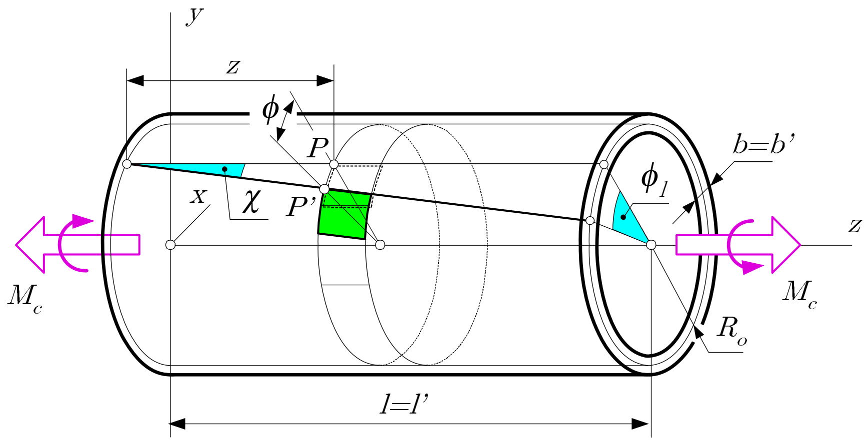
4. FEJEZET

A szilárdságtan alapkísérletei II. Kör- és körgyűrű szelvényű rudak csavarása

4.1. Vékonyfalú körgyűrű keresztmetszetű rúd csavarása

4.1.1. A kísérlet leírása és eredményei. Tekintsük a 4.1. ábrán vázolt l hosszúságú és b falvastagságú vékonyfalú csövet. A cső külső és belső palástjának rendre $R_o+b/2$ illetve $R_o-b/2$ a sugara, az R_o sugarú belső hengerfelület pedig a cső úgynevezett középfelülete.

Amint azt az ábra is szemlélteti a cső $z=0$ koordinátájú keresztmetszetét a $-M_c\mathbf{e}_z$, a $z=l$ koordinátájú keresztmetszetét pedig az $M_c\mathbf{e}_z$ csavarónyomaték terheli. Az M_c csavarónyomaték nagyságát úgy választjuk meg, hogy a cső alakváltozása lineárisan rugalmas. Bár az ábra nem tüntet fel támaszokat, a cső $z=0$ keresztmetszete, feltevés szerint, helyben marad.



4.1. ábra.

A cső középfelületén gondolatban egységnyi oldalélű négyzetes hálót készítünk, oly módon, hogy a hálót egyrészről a z tengelyre merőleges síkok metszik ki az R_o sugarú hengerfelületből, másrészt pedig a hengerfelület z tengellyel párhuzamos alkotói adják. Az ábra nem tünteti fel a teljes hálót, csupán egy kis részét szemlélteti. A P sarokpontú négyzetet folytonos és szaggatott vonallal rajzoltuk meg.

Megjegyezzük, hogy a próbatest geometriai viszonyai miatt HKR alkalmazása kívánatos mind a kísérleti megfigyelések rögzítése, mind pedig a feszültségek egyensúlyi követelmények alapján történő számítása során.

A megfigyelések alapján a terhelések hatása az alábbiakban összegezhető:

1. Az egyes keresztmetszetek merev lapként fordulnak el a z tengely körül és az elfordulás során megmaradnak a saját síkjukban. Következésképp nem változik sem a cső vastagsága, sem a középfelület R_o sugara, sem pedig a cső hossza a deformáció során. Ez azt jelenti, hogy
$$l=l^{'}\,,\qquad b=b^{'}\qquad \text{és}\qquad R_o=R_o^{'}\,.$$
Bár az ábrán nincs megrajzolva a cső külső és belső átmérője, ezeket a mennyiségeket itt és a továbbiakban rendre D és d jelöli. Nyilvánvaló, hogy ezek az értékek is változatlanok maradnak, azaz
$$D=D^{'}\qquad \text{és}\qquad d=d^{'}\,.$$

2. Az egyes keresztmetszetek Φ szögelfordulása egyenesen arányos a keresztmetszet z koordinátájával:

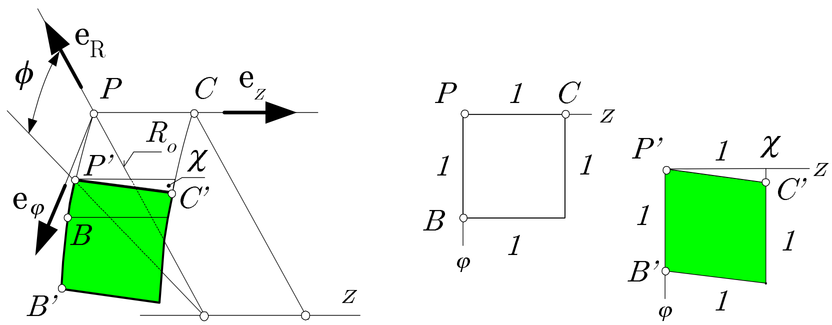
$$\Phi = \vartheta z\,, \tag{4.1}$$

ahol a ϑ állandó az u.n. fajlagos elcsavarodási szög.

Mivel alapfeltevés, hogy kicsik az elmozdulások és alakváltozások, kicsinek vehetjük az egyes keresztmetszetek z tengely körüli elfordulását is. Ez esetben a P pont mozgását adó P és P' közötti ΦR_o ív jó közelítéssel a P ponthoz tartozó $\mathbf{r}_{PP'}$ elmozdulásvektor hossza. Bár az erős nagyítással rajzolt 4.2. ábra nem tünteti fel magát az $\mathbf{u} = \mathbf{r}_{PP'}$ elmozdulásvektort nyilvánvaló az ábráról, hogy az $\mathbf{e}_\varphi$ irányú vektornak vehető. A (4.1) képletet is figyelembevéve

$$\mathbf{u} = \Phi R_o \underbrace{\mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R} = \vartheta z \mathbf{e}_z \times \underbrace{R_o \mathbf{e}_R}_{\mathbf{R}_o} = \vartheta z \mathbf{e}_z \times \mathbf{R}_o \tag{4.2}$$

az elmozdulásvektor az R_o sugarú kör pontjaiban.



4.2. ábra.

Vékonyfalú cső esetén eltekinthetünk a fajlagos nyúlások és a fajlagos szögváltozások valamint a normál és nyírófeszültségek cső vastagsága menti megváltozásától. Ez azt jelenti, hogy ezek a mennyiségek függetlennek vehetők az R sugártól.

Visszaidézve a 2.2. Mintapélda (2.101) képletét

$$\underline{\mathbf{A}} = [\ \boldsymbol{\alpha}_R \quad \boldsymbol{\alpha}_\varphi \quad \boldsymbol{\alpha}_z\ ] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{R\varphi} & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\varphi R} & \varepsilon_\varphi & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{4.3}$$

az alakváltozási tenzor mátrixa HKR-ben. Az alábbiakban meghatározzuk a kísérleti megfigyelések alapján az alakváltozási tenzor mátrixában álló fajlagos nyúlásokat és szögtorzulásokat.

Láttuk, hogy nem változik az egyes keresztmetszetek távolsága az alakváltozás során. Mivel a keresztmetszetek merev lapként fordulnak el $\mathbf{e}_\varphi$ irányban sincs hosszváltozás. Következőleg:

$$\varepsilon_z = \varepsilon_\varphi = 0\,. \tag{4.4}$$

Nem változik a cső falvastagsága sem. Ez azt jelenti, hogy

$$\varepsilon_R = 0\,. \tag{4.5}$$

A 4.2. ábra érzékelhetően szemlélteti, hogy a P pontban az R és φ anyagi vonalak (a sugár és a PB ív, vagy ami ugyanaz az $\mathbf{e}_R$ és $\mathbf{e}_\varphi$ egységvektorok) közötti $\pi/2$ nagyságú szög változatlan, azaz derékszög marad az R és φ anyagi vonalak deformált helyzetében is, hiszen a P' pontban derékszög a sugár és a $P'B'$ ív által bezárt szög. Ugyanerről az ábráról állapítható meg az is, hogy az R és z anyagi vonalak (a sugár és a PC egyenesszakasz) közötti $\pi/2$ nagyságú szög a deformált helyzetben derékszög marad, hiszen az utóbbi szög a P' pontbeli sugár és a középfelületen fekvő $P'C'$ csavarvonalszakasz által bezárt szög. Következésképp zérus értékűek a vonatkozó fajlagos szögváltozások:

$$\gamma_{R\varphi} = \gamma_{Rz} = 0\,. \tag{4.6}$$

Az egyetlen nem zérus fajlagos szögváltozás a z és φ anyagi vonalak (a PB és PC ívek) közötti $\pi/2$ szög csökkenése χ radiánnal. A 4.1. ábra és a (4.1) összefüggés szerint $PP'=\chi z=R_o\Phi=R_o\vartheta z$, következésképp

$$\gamma_{\varphi z}=\chi=R_o\vartheta. \tag{4.7}$$

A (4.4)-(4.7) fajlagos nyúlásokkal és szögváltozásokkal az alakváltozási tenzor mátrixát adó (4.3) képletből az

$$\underline{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\gamma_{\varphi z}\\0&\frac{1}{2}\gamma_{z\varphi}&0\end{bmatrix},\qquad \gamma_{\varphi z}=\gamma=\chi=R_o\vartheta \tag{4.8}$$

eredmény következik. Eszerint az alakváltozási tenzor mátrix mátrixa állandó.

A feszültségek meghatározása során a feszültségi tenzor

$$\underline{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}_R & \boldsymbol{\rho}_\varphi & \boldsymbol{\rho}_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_R&\tau_{R\varphi}&\tau_{Rz}\\\tau_{\varphi R}&\sigma_\varphi&\tau_{\varphi z}\\\tau_{zR}&\tau_{z\varphi}&\sigma_z\end{bmatrix} \tag{4.9}$$

mátrixában álló σ_R, σ_φ és σ_z normálfeszültségeket, valamint a $\tau_{\varphi R}=\tau_{R\varphi}$, $\tau_{zR}=\tau_{Rz}$ és $\tau_{z\varphi}= =\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültségeket keressük. Mivel állandó az alakváltozási tenzor mátrixa, állandónak kell lennie a feszültségi tenzor mátrixának is. A keresett $\sigma_R, \sigma_\varphi, \dots, \tau_{\varphi z}$ feszültségkoordináták meghatározása során vegyük figyelembe, hogy a cső külső palástján ébredő $\boldsymbol{\rho}_n=\boldsymbol{\rho}_R$ feszültségvektor meg kell, hogy egyezzen az ott működő felületi terhelés $\mathbf{f}$ sűrűségvektorával, ami azonban zérus hiszen terheletlen a cső palástja. Következésképp

$$\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_R=\boldsymbol{\rho}_R=\sigma_R\mathbf{e}_R+\tau_{\varphi R}\mathbf{e}_\varphi+\tau_{zR}\mathbf{e}_z=0\,. \tag{4.10}$$

Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy a fentiek szerint állandónak vehetők a σ_R, $\tau_{\varphi R}$ és τ_{zR} feszültségkoordináták, akkor a (4.10) egyenletből a

$$\sigma_R=0,\qquad \tau_{\varphi R}=0,\qquad \tau_{zR}=0 \tag{4.11}$$

eredményt kapjuk. További összefüggések adódnak abból a feltételből, hogy a vékonyfalú cső bármely pozitív keresztmetszetére igaz, hogy a $\boldsymbol{\rho}_z=\tau_{\varphi z}\mathbf{e}_\varphi+\sigma_z\mathbf{e}_z$ feszültségek – itt is emlékeztetünk arra a lentiekben kihasználásra kerülő körülményre, hogy a $\tau_{\varphi z}$ és σ_z állandó – egyenértékűek a keresztmetszet igénybevételeivel, azaz $N=0$ és $M_c\neq 0$. Az egyenértékűséggel kapcsolatos első, vagyis a (2.89) összefüggésből

$$N=\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{F}_S=\int_A \mathbf{e}_z\cdot\rho_z\mathrm{d}A=\int_A \mathbf{e}_z\cdot(\tau_{\varphi z}\mathbf{e}_\varphi+\sigma_z\mathbf{e}_z)\,\mathrm{d}A=\int_A\sigma_z\,\mathrm{d}A=\sigma_zA=0\,,$$

ahonnan

$$\sigma_z=0 \tag{4.12}$$

a z irányú normálfeszültség. Ami a belső erőrendszer nyomatékát illeti vegyük figyelembe, hogy vékonyfalú cső esetén jó közelítéssel fennállnak az

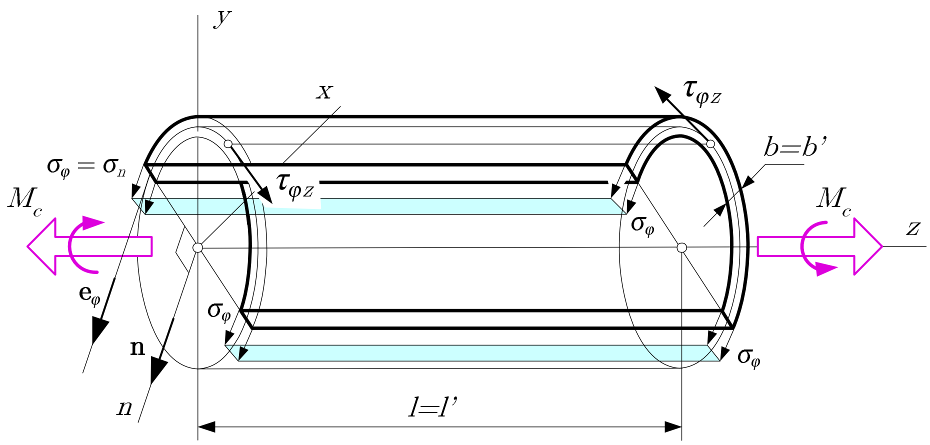
$$R\simeq R_o\,,\qquad \mathrm{d}A=b\,\mathrm{d}s=bR_o\,\mathrm{d}\varphi$$

összefüggések. Ha ezeket is felhasználjuk, akkor az egyenértékűséggel kapcsolatos második, azaz a (2.90) összefüggésből az

$$M_c=\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{M}_S=\mathbf{e}_z\cdot\int_A\mathbf{R}\times\boldsymbol{\rho}_z\mathrm{d}A=\mathbf{e}_z\cdot\int_A R_o\tau_{\varphi z}\underbrace{\mathbf{e}_R\times\mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{e}_z}\mathrm{d}A=R_o\tau_{\varphi z}bR_o\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=R_o\tau_{\varphi z}\underbrace{2\pi bR_o}_{A_k}$$

eredmény következik, ahonnan azonnal megkapjuk a keresett $\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültséget:

$$\boxed{\tau_{\varphi z}=\frac{M_c}{R_oA_k},\qquad A_k=2\pi bR_o\,.} \tag{4.13}$$



4.3. ábra.

A σ_φ normálfeszültség számításához a z tengelyen átmenő és $\mathbf{n}$ normálisú sík segítségével kettévágjuk gondolatban a vékonyfalú csövet és az így kapott egyik félcső – ezt a 4.3. ábra szemlélteti – egyensúlyából indulunk ki. A keresett normálfeszültséget az n irányban felírt vetületi egyenletből számítjuk. A számítás során az alábbiakat vegyük figyelembe:

1. A félcső felületének átmetszéssel kapott $\mathbf{n}$ normálisú téglalapjain $\rho_n = \sigma_n \mathbf{n} + \tau_{nz}\mathbf{e}_z$ a feszültségvektor és $\sigma_n = \sigma_\varphi$. Megjegyezzük, hogy az ábra csak a vetületi egyenletben szerepet játszó $\sigma_n = \sigma_\varphi$ feszültségkoordináta megoszlását tünteti fel.
2. A félcső palástja terheletlen.
3. A $z = 0$ és $z = l$ véglapokon ébredő és az azonos R és φ koordinátájú pontokhoz tartozó $\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültségek vektoriális összege – az ábra egy ilyen pontpárt tüntet fel – zérus.

A fentiek alapján felírt

$$\sum F_n = 2lb\sigma_\varphi + \underbrace{\begin{bmatrix} \text{A paláststerhelés eredőjének} \\ n \text{ irányú összetevője} \end{bmatrix}}_{=0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \text{A } \tau_{\varphi z} \text{ nyírófeszültségek eredőjének} \\ n \text{ irányú összetevője} \end{bmatrix}}_{=0} = 0$$

vetületi egyenletből

$$\sigma_\varphi = 0\,. \tag{4.14}$$

A (4.11), (4.12), (4.13) és (4.14) képletek felhasználásával

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}; \qquad \tau_{\varphi z} = \tau = \frac{M_c}{R_o A_k} \tag{4.15}$$

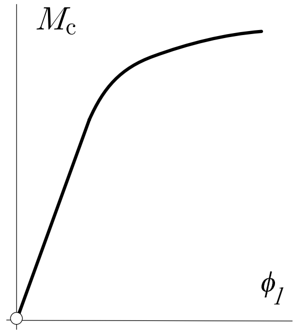
a feszültségi tenzor mátrixa. Az utóbbi képlet alapján azt a feszültségi állapotot, amikor csak egy nyírófeszültség és duális párja különbözik zérustól *tiszta nyírásnak* nevezzük.

4.1.2. Csavaródiagramm. Hooke törvény nyírófeszültségekre. A húzókísérlet kapcsán megrajzolt $N = N(\lambda)$ diagramnak a vékonyfalú cső csavarása kapcsán az $M_c = M_c(\Phi_l)$ diagram a párja – 4.4. ábra. Az $M_c(\Phi_l)$ függvény alakja egyrészt a vékonyfalú cső anyagától, másrészt a cső geometriai méreteitől függ. A vékonyfalú cső anyagára jellemző diagramhoz úgy jutunk – hasonlóan a húzókísérlet esetéhez – hogy, fajlagos, azaz a vékonyfalú cső méreteitől független mennyiségeket mérünk fel az egyes koordinátatengelyekre. Ez azt jelenti, hogy a vízszintes tengely mentén a

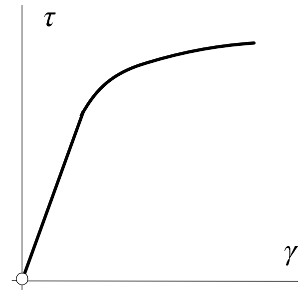
$$\gamma = \gamma_{\varphi z} = \chi = R_o \frac{\Phi_l}{l} = R_o \vartheta$$

fajlagos szögváltozást, a függőleges tengely mentén pedig a

$$\tau = \tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{R_o A_k}$$

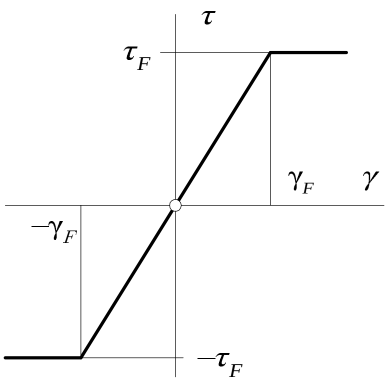


4.4. ábra.



4.5. ábra.

nyírófeszültséget ábrázoljuk. A vékonyfalú cső anyagára jellemző $\tau = \tau(\gamma)$ görbét *csavaródiagramnak* nevezzük – 4.5. ábra. A csavaródiagram jellemző tulajdonságai ugyanazok, mint amelyekkel a 3.4., 3.5. és 3.6. szakítódiagramok kapcsán a 3.2.2. szakaszban megismerkedtünk Ezeket ehelyütt nem ismételjük meg. Az ideális testek csavaródiagramjai a 3.7. ábrán vázolt szakítódiagramok alapján rajzolhatók meg. A 4.6. ábra a későbbiek kedvéért a lineárisan rugalmas-ideálisan képlékeny test csavaródiagramját mutatja. A diagramon τ_F a folyáshatár és γ_F a folyáshatárhoz tartozó fajlagos szögváltozás. A lineárisan rugalmas viselkedés tartományában fennáll a



4.6. ábra.

$$\boxed{\tau = G\gamma} \tag{4.16}$$

egyenlet, ahol G a lineáris szakasz meredeksége vagy más elnevezéssel *nyírási rugalmassági modulus.* Ez a mennyiség anyagjellemző. Kiolvasható a képletből az is, hogy a G feszültségdimenziójú mennyiség. Később formálisan igazolni fogjuk, hogy a méréssel kapott G, valamint az (3.19) képletből az E és ν-vel kifejezett G ugyanaz a mennyiség. A (4.16) egyenletet a *csúsztatófeszültségekkel kapcsolatos egyszerű Hook törvénynek* nevezzük. Az elnevezés arra utal, hogy a fenti egyenlet mindig fennáll a lineáris viselkedés tartományában függetlenül attól, hogy milyen igénybevétel vagy terhelés hozza létre a tiszta nyírást. A (4.16) képlet felhasználásával vetve egybe az alakváltozási és feszültségi tenzor mátrixait adó (4.8) és (4.14) összefüggéseket írhatjuk, hogy

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ 0 & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2G} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

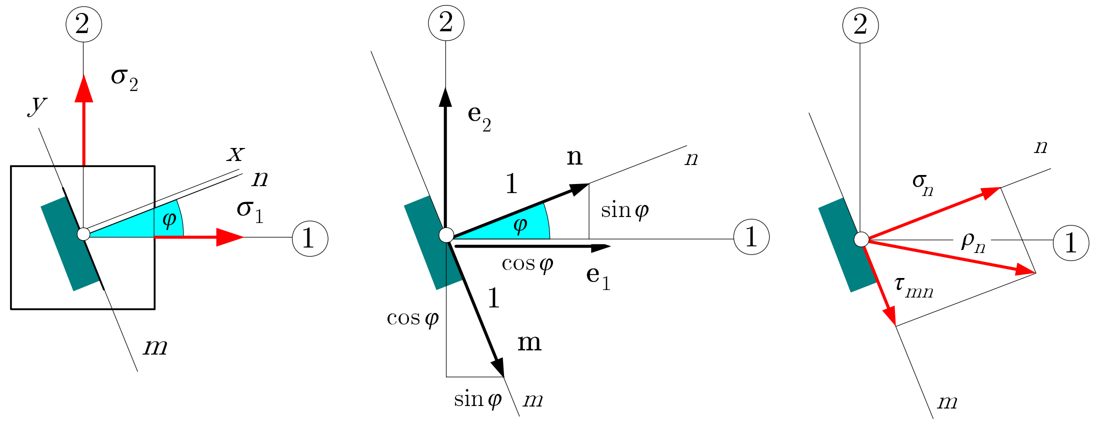
vagy

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2G}\boldsymbol{T}\,, \tag{4.17}$$

ami a csúsztatófeszültségekkel kapcsolatos Hook törvény tenzoriális alakja.

4.1.3. A feszültségi állapot szemléltetése. Részleges Mohr-féle kördiagram. Tegyük fel, hogy ismeretesek a feszültségi tenzor főirányai. A 4.7. ábra baloldala a főtengelyek KR-ében és a harmadik főirány felől nézve szemlélteti az elemi kockán a feszültségi állapotot. Ezen az ábrarészleten jelenik meg először a gondolatmenet kifejtésében később szerepet kapó $x = n$ és $y = -m$ tengelypár is.

Legyenek az 1 és 2 jelű főtengelyek által kifeszített fősíkban fekvő n és m irányok merőlegesek egymásra. Azt is feltételezzük, hogy a pozitív m féltengely az óramutató járásával ellentétes irányban forgatható be a pozitív n féltengelybe, azaz $\mathbf{m} \times \mathbf{n} = \mathbf{e}_3$; $|\mathbf{m}| = |\mathbf{n}| = 1$. A 4.7. ábra középső részlete az n és m egyeneseket, a vonatkozó $\mathbf{m}$ és $\mathbf{n}$ egységvektorokat, a főirányokat adó $\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}_1$ és $\mathbf{e}_2 = \mathbf{n}_2$ egységvektorokat, továbbá az $\mathbf{e}_1$ és $\mathbf{n}$ közötti φ szöget szemlélteti.



4.7. ábra.

Tekintsük az $\mathbf{n}$ normálisú lapon ébredő $\rho_n = \sigma_n \mathbf{n} + \tau_{mn} \mathbf{m}$ feszültségvektort – 4.7. ábra jobboldali ábrarészlet. A továbbiakban arra a kérdésre keressük a választ, hogy mi a σ_n és τ_{mn} feszültségkoordináták által meghatározott pontok mértani helye a σ_n, τ_{mn} síkon. Nyilvánvaló, hogy mind σ_n mind pedig τ_{mn} az n és m irányokat meghatározó φ szög mint paraméter függvénye.

A számításokat a főtengelyek KR-ében végezzük. Amint azt már láttuk – lásd a feszültségi tenzor (2.88) alatti előállítását – ebben a KR-ben

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

a feszültségi tenzor mátrixa.

A középső ábrarészlet alapján

$$\mathbf{n} = \cos\varphi\, \mathbf{e}_1 + \sin\varphi\, \mathbf{e}_2 \qquad \text{és} \qquad \mathbf{m} = \sin\varphi\, \mathbf{e}_1 - \cos\varphi\, \mathbf{e}_2 \,.$$

Következésképp

$$\underline{\rho}_n = \underline{\mathbf{T}}\, \underline{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos\varphi \\ \sigma_2 \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

a feszültségvektor mátrixa, amivel

$$\sigma_n = \underline{\mathbf{n}}^T \underline{\rho}_n = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos\varphi \\ \sigma_2 \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi \tag{4.18a}$$

a keresett normálfeszültség és

$$\tau_{mn} = \underline{\mathbf{m}}^T \underline{\rho}_n = \begin{bmatrix} \sin\varphi & -\cos\varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \cos\varphi \\ \sigma_2 \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} = (\sigma_1 - \sigma_2)\cos\varphi\, \sin\varphi \tag{4.18b}$$

a keresett nyírófeszültség. A trigonometriából jól ismert

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,, \qquad \sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2} \qquad \text{és} \qquad \sin\varphi\cos\varphi = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \tag{4.19}$$

képletek helyettesítésével a (4.18a,b) képletekből némi rendezéssel a

$$\sigma_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\varphi\,, \tag{4.20a}$$

$$\tau_{mn} = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\varphi \tag{4.20b}$$

egyenleteket kapjuk. Ez a két egyenlet kör paraméteres egyenlete[1] a σ_n, τ_{mn} síkon. A kör közepe a σ_n tengelyen van, a kör középpontjának $(\sigma_1+\sigma_2)/2$ az abcisszája, a kör sugara pedig $R = (\sigma_1-\sigma_2)/2$. Az

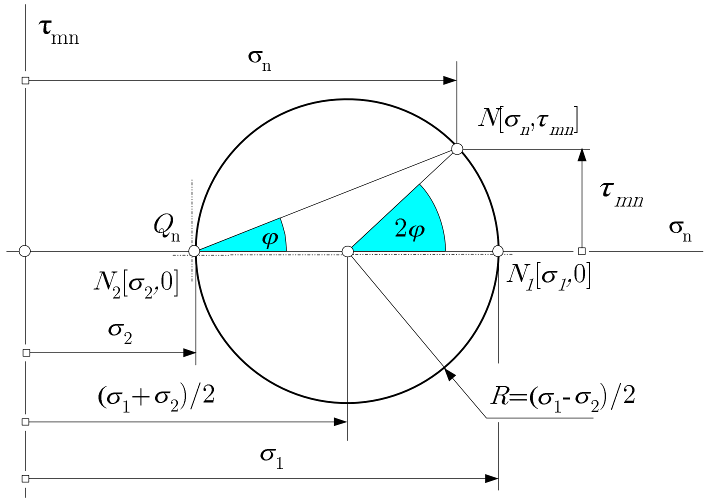
[1] Ismeretes, hogy az $x - u = R\cos 2\varphi$; $y = R\sin 2\varphi$ egyenletkettős olyan kör paraméteres egyenlete, amelynek középpontja az x tengelyen van, u a középpont abcisszája és R a kör sugara. A kör közepéből a körön levő x abcisszájú és y ordinátájú pontba rajzolt sugár 2φ szöget zár be a pozitív x tengellyel. A szöget óramutató járásával ellentétesen kell felmérni.

adott **n** normálishoz tartozó $N[\sigma_n,\,\tau_{mn}]$ körpontot pedig úgy kapjuk meg, hogy olyan sugarat rajzolunk a kör közepéből kiindulva, amely 2φ szöget zár be az abcissza tengellyel.

Kiküszöbölhető a φ paraméter, ha a jobb és baloldalak négyzetre emelése után összeadjuk a két egyenletet:

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2+\tau_{mn}^2=\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \tag{4.21}$$

Az így kapott egyenlet ugyancsak kör egyenlete.

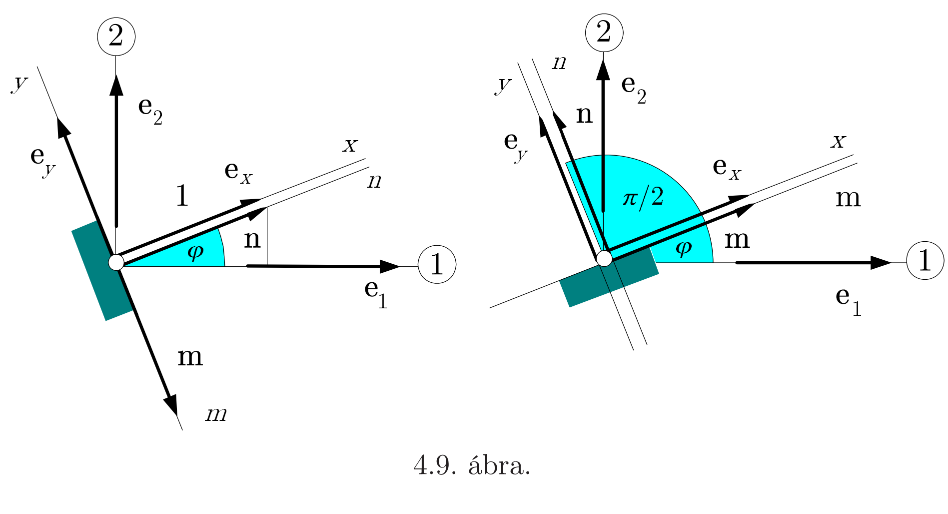


4.8. ábra.

A fentiek alapján megszerkeszthető a kör, ha ismeretesek a σ_1 és σ_2 főfeszültségek. Első lépésben megrajzoljuk az $N_1[\sigma_1,0]$ és $N_2[\sigma_2,0]$ pontokat. Második lépésben megszerkesztjük az N_1 és N_2 pontokat összekötő egyenesszakasz felezési pontját. Ez lesz a kör középpontja. Mivel mind az N_1, mind pedig az N_2 rajta van a körön mostmár megrajzolható maga a kör is. Az $N[\sigma_n,\,\tau_{mn}]$ körpont pedig az abcisszatengellyel 2φ szöget alkotó körsugár berajzolásával adódik.

Egy további lehetőséget kapunk az N szerkesztésére, ha az N_1 ponton keresztül az $\mathbf{e}_1$ főiránnyal az N_2 ponton keresztül pedig az $\mathbf{e}_2$ főiránnyal húzunk párhuzamos egyenest – szaggatott vonalak – majd Q_n-el jelölve metszésüket, a Q_n ponton át az n normálissal párhuzamosan egy további egyenest húzunk. Mivel ez az egyenes φ szöget zár be az abcisszatengellyel a kerületi és középponti szögek tétele értelmében az N pontban metszi a kört. A Q_n pontot normálisok pólusának szokás nevezni.

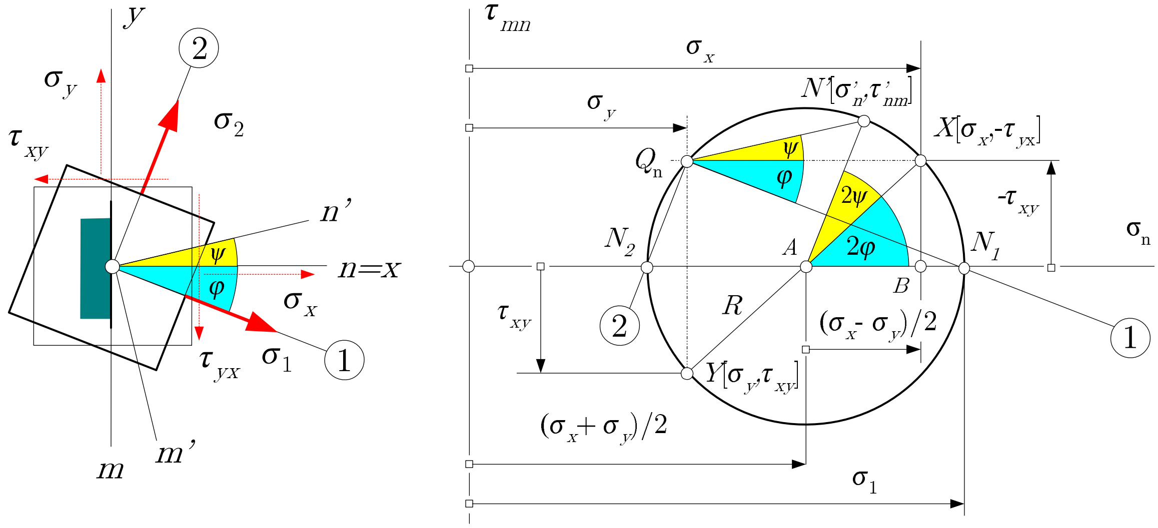
A bemutatott szerkesztés csak akkor alkalmazható, ha ismeretesek a σ_1 és σ_2 főfeszültségek. A szerkesztés szabályainak általánosítása kedvéért azt a kérdést vizsgáljuk a továbbiakban, hogy miként kell eljárni, ha nem ismerjük előre a σ_1 és σ_2 főfeszültségek értékét. A felvetett kérdés megoldásában lépésről lépésre haladunk előre.



4.9. ábra.

Tegyük fel először, hogy $\mathbf{n}=\mathbf{e}_x$ és $\mathbf{m}=-\mathbf{e}_y$. Ez esetben $\sigma_n=\sigma_x$, és (4.20b) szerint $\tau_{mn}=-\tau_{yx}>0$, a vonatkozó körpontot pedig az $X[\sigma_x,\,-\tau_{yx}]$ pont adja – a viszonyokat a 4.9. ábra baloldali része, és a 4.10. ábra szemlélteti. Az X pontba mutató körsugár nyilvánvalóan 2φ szöget zár be az abcisszatengellyel.

Tegyük fel másodszorra, hogy $\mathbf{n}=\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{m}=\mathbf{e}_x$. Ez esetben $\sigma_n=\sigma_y$, $\tau_{mn}=\tau_{xy}$ a vonatkozó körpontot pedig az $Y[\sigma_y, \tau_{xy}]$ pont adja – ezeket a viszonyokat a 4.9. ábra jobboldali része és a 4.10. ábra szemlélteti. Mivel ekkor az n irány $\varphi+\pi/2$ nagyságú szöget zár be az $\mathbf{e}_1$ főiránnyal az Y pontba mutató körsugár $2\varphi+\pi$ szöget zár be az abcisszatengellyel. Következésképp az X és Y pontok ugyanazon a körátmérőn fekszenek. Ez egyben azt is jelenti, hogy azonnal megszerkeszthető a kör, ha ismerjük az X és Y pontok helyét a σ_n és τ_{mn} síkon. A 4.10. ábra szemlélteti az X és Y pontokat valamint magát a megrajzolt kört is. Az ábra baloldalán ismét látható a feszültségi állapotot szemléltető, és a 4.7. ábra baloldali részén már korábban ábrázolt, de a további magyarázat kedvéért az óramutató járásával egyező



4.10. ábra.

irányban elforgatott elemi kocka. A forgatás úgy történt, hogy a vízszintes tengely legyen az x tengely. Figyeljük azt is meg, hogy az elforgatott elemi kocka mellett halványan megrajzoltuk az xyz KR-beli elemi kockát is, amelyen halványan feltüntettük az ismertnek tekintett σ_x, σ_y és τ_{xy} feszültségkoordinátákat. Mivel az első esetben az m irány ellentétes az y iránnyal és τ_{mn} pozitív volt τ_{xy} negatív a feladat viszonyai között. Az ugyanezen ábrarészleten berajzolt n' irány ψ szöget zár be az x és a $\varphi+\psi$ szöget az 1 jelű főtengellyel. Az n' irányra merőleges m' irány lefelé és kissé jobbra mutat. Következőleg az $N'[\sigma'_n, \tau'_{nm}]$ körponthoz tartozó körsugár $2\,(\varphi+\psi)$ nagyságú szöget alkot a σ_n tengellyel.

Mivel az XY egyenesszakasz körátmérő az X ponton keresztül az x tengellyel, az Y ponton keresztül pedig az y tengellyel párhuzamosan szaggatott vonallal megrajzolt egyenesek, Thalész tétele értelmében a körön metszik egymást. Jelölje Q_n a két egyenes metszéspontját. Vegyük észre, hogy a Q_nXN' és az AXN' szögek ugyanazon az íven nyugvó kerületi és középponti szögek. Következőleg a Q_nN' egyenes párhuzamos az n' egyenessel. Ez megfordítva azt jelenti, hogy a Q_n pont segítségével bármilyen n' felületi normális és a hozzá tartozó m' esetén megszerkeszthető az $N'[\sigma'_n, \tau'_{nm}]$ körpont, oly módon, hogy párhuzamost húzunk a Q_n körponton keresztül az n' egyenessel.és meghatározzuk a párhuzamos és a kör újabb metszéspontját. Utóbbi tulajdonsága miatt a Q_n pont most is a normálisok pólusa nevet viseli.

A Q_n pont szerepével kapcsolatos gondolatmenet alapján nyilvánvaló, hogy

- a Q_nN_1 egyenes főiránnyal párhuzamos egyenes, a jelen esetben az 1 jelű főiránnyal,
- a Q_nN_2 egyenes főiránnyal párhuzamos egyenes, a jelen esetben az 2 jelű főiránnyal,
- a Q_nN_1X szög a vízszintes és főirány, a jelen esetben az 1 jelű főirány, közötti szög.

Az ABX derékszögű háromszög segítségével kiszámítható a kör sugara

$$R=\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\,,$$

amivel az ábra alapján

$$\sigma_1=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+R \qquad \text{és} \qquad \sigma_2=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-R$$

a két főfeszültség. Az is leolvasható az ábráról, hogy

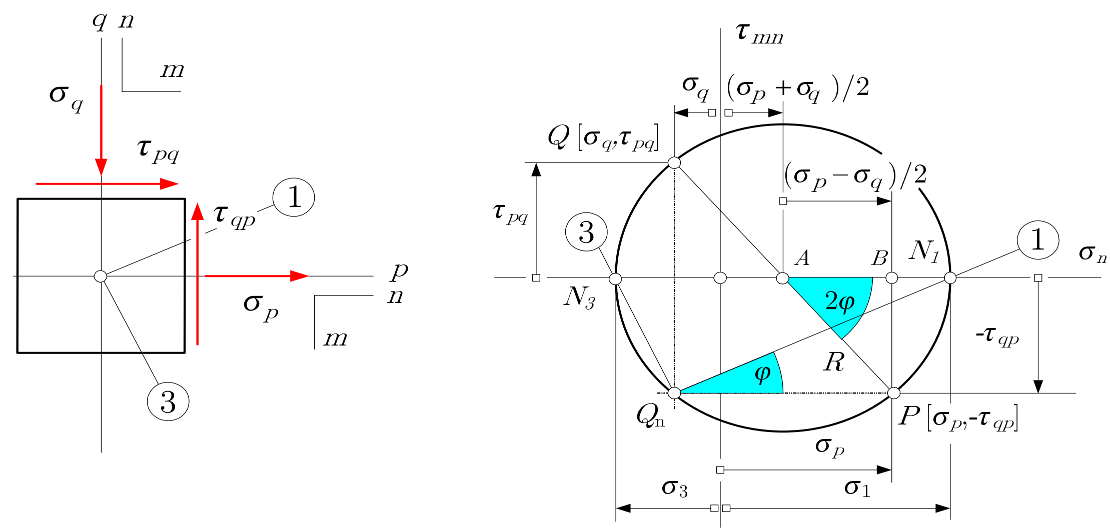
$$\mathrm{tg}2\varphi=\frac{2\,|\tau_{xy}|}{\sigma_x-\sigma_y}\,.$$

Az bemutatott gondolatmenet alapján minden olyan esetben meghatározhatók a főfeszültségek és a főirányok, ha ismeretes a feszültségi tenzor egy főiránya.

A szerkesztésben megjelenő mértani helyet, azaz a σ_n, τ_{mn} pontpárok által alkotott kört, a szerkesztés lehetőségét felismerő és elsőként leíró Mohr után részleges Mohr körnek szokás nevezni.

4.1.4. A szerkesztés lépéseinek összegezése. Az alábbiak tömören és minden szóbajöhető esetre alkalmazható sablont adnak a szerkesztésre. A sablon a 4.1.3. szakasz gondolatmenetének lényegén alapul; azon, hogy ismeretes egy főfeszültség – mindegy, hogy melyik –, azon, hogy a kör átmérőjét az elemi kocka más két lapján ébredő feszültségvektor σ_n és τ_{mn} koordinátái határozzák meg, függetlenül attól milyen betűvel jelöltük eredetileg ezen lapok normálisait, továbbá azon, hogy a Q_n pont és a főirányok szerkesztése is független a két lap normálisának jelölésére felhasznált betűjelektől.

Legyen a vizsgált test egy adott pontjában ismeretes a feszültségállapot. Tételezzük fel, hogy az ezen a ponton átmenő p, q és r koordinátatengelyek kartéziuszi KR-t alkotnak (a fentiekkel összhangban a p, q, r, valójában az x, y, z, vagy az y, z, x, vagypedig a z, x, y koordinátatengelyeket jelenti). Legyen ismert ugyanebben a pontban a feszültségi állapot: $\boldsymbol{\rho}_r = \sigma_r \mathbf{e}_r$ (vagyis az r irány főirány), $\sigma_p > 0$, $\tau_{pq} = \tau_{qp} > 0$ és $\sigma_q < 0$.



4.11. ábra.

A szerkesztés lépéseit az alábbiak összegezik:

1. Megrajzoljuk az ismert r főirány felől nézve az elemi kockát. Ügyeljünk eközben arra, hogy az r-t követő első koordinátairány, azaz a p vízszintes, a q pedig függőleges irányba mutasson az ábránkon, úgy ahogyan azt a 4.11. ábra baloldali része szemlélteti.
2. Meghatározzuk σ_n, és τ_{mn} feszültségkoordinátákat a p és q normálisú oldallapokon. Ezt az segíti, hogy berajzoljuk a p normálisú oldallapon az $n = p$ és $m = -q$, a q normálisú lapon pedig az $n = q$ és $m = p$ koordinátairányokat. Így azonnal megállapítható a baloldali ábrarészlet elemi kockájának felhasználásával, hogy a σ_n, τ_{mn} sík $P[\sigma_p, -\tau_{qp}]$ és $Q[\sigma_q, \tau_{pq}]$ pontjai határozzák meg a kör átmérőjét.
3. Bejelöljük a $P[\sigma_p, -\tau_{qp}]$ és $Q[\sigma_q, \tau_{pq}]$ pontokat a σ_n, τ_{mn} koordinátasíkon, majd megrajzoljuk a PQ körátmérőt. A PQ egyenesszakasz és a σ_n tengely metszése adja a kör közepét. A kör és a σ_n tengely metszéspontjai pedig kiadják a keresett főfeszültségeket. Mivel a főfeszültségek nagyság szerint rendezettek – $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ – és a $\sigma_r = 0$ normálfeszültség főfeszültség a szerkesztés a jelen esetben az 1 és 3 jelű főfeszültségeket adja ki.
4. A P ponton keresztül a p normálissal, a Q ponton pedig a q normálissal húzunk párhuzamost. A két egyenes a kör Q_n pontjában metszi egymást. A Q_nN_1 és Q_nN_3 egyenesek megadják az 1 és 3 jelű főirányokat. Ezeket az elemi kocka felülnézeti képén is érdemes berajzolni.

5. Kiszámítjuk az ábra alapján az R, σ_1, σ_3 és φ értékeket. Ez a számítás az ábráról leolvasható

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_p - \sigma_q}{2}\right)^2 + \tau_{pq}^2}\,, \tag{4.22}$$

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_p + \sigma_q}{2} + R\,, \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_p + \sigma_q}{2} - R \tag{4.23}$$

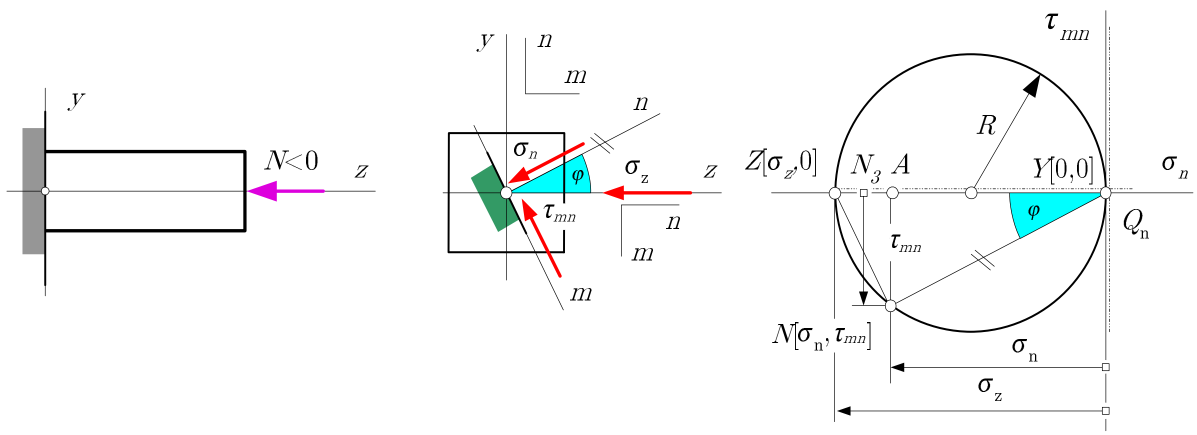
és

$$\mathrm{tg} 2\varphi = \frac{2\,|\tau_{pq}|}{\sigma_p - \sigma_q}\,. \tag{4.24}$$

képletek segítségével végezhető el.
6. Ha adott egy felületelem n' normálisa és a hozzátartozó m' irány, akkor az $N'[\sigma_n', \tau_{mn}']$ pontot a Q_n ponton át az n'-vel párhuzamosan húzott egyenes és a kör metszése adja.

Megjegyezzük, hogy a zsúfoltság elkerülése érdekében nem tünteti fel az utolsó lépést a 4.11. ábra. Visszautalunk ehelyett a 4.10. ábrára és megjegyezzük, hogy a feszültségi tenzor segítségével pontosabban határozható meg a σ_n' és τ_{mn}' számítással, mint szerkesztéssel. A szerkesztést és a szerkesztésen alapuló (4.22), (4.23) és (4.24) képleteket elsősorban a főfeszültségek és főirányok meghatározására érdemes használni.

4.1.5. A szerkesztés két alkalmazása. Összefüggés a rugalmassági állandók között. Két egyszerű példa esetén mutatjuk be a szerkesztés alkalmazását. A 4.12. ábra nyomásra igénybevett zömök rudat szemléltet. A középső ábrarészlet a negatív x tengely felől nézve mutatja az elemi kockán a feszültségi állapotot, valamint a szerkesztéshez szükséges segédvonalakat. A 4.12. és a 4.11. ábra egybevetése alapján a z és y koordinátatengelyek felelnek meg a p és q



4.12. ábra.

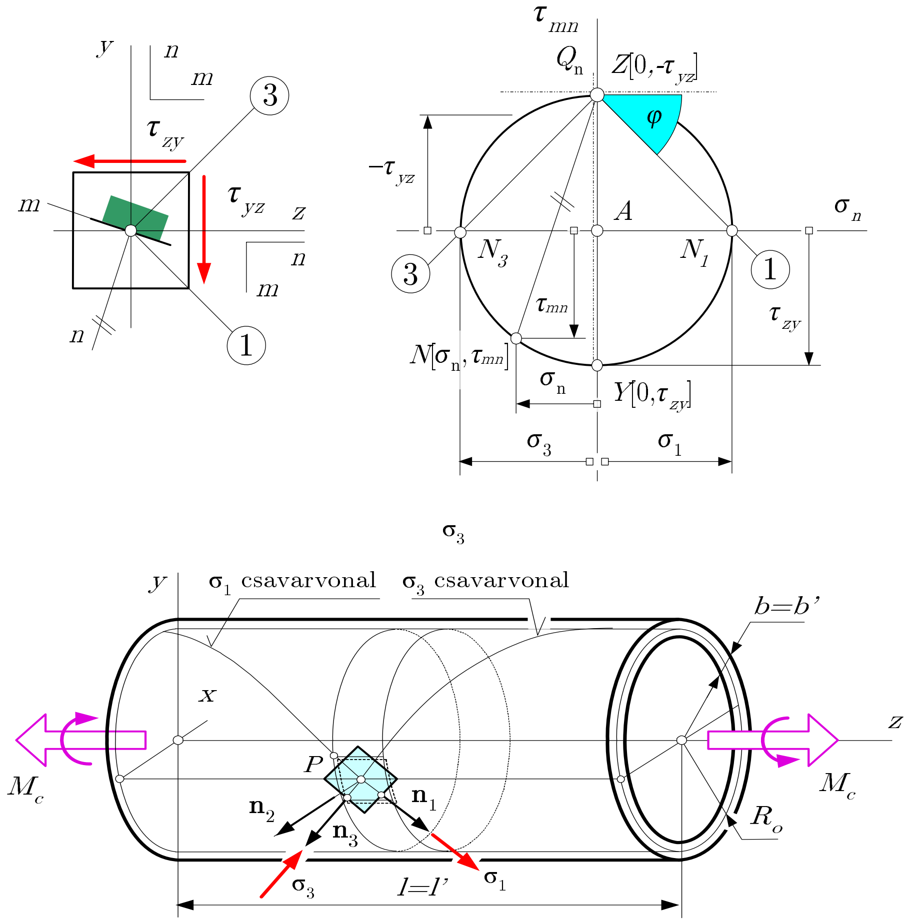
koordinátatengelyeknek. Mivel $\boldsymbol{\rho}_y = 0$ és $\boldsymbol{\rho}_z = \sigma_z \mathbf{e}_z$ ($\sigma_z < 0$) az $Y[0{,}0]$ és $Z[\sigma_z{,}0]$ pontok meghatározzák a kör átmérőjét. Következőleg $R = |\sigma_z|/2$ a kör sugara. A Q_n pontot a Z ponton át a z tengellyel illetve az Y ponton át az Y tengellyel húzott párhuzamosok metszése adja. A jelen esetben egybeesik a Q_n pont az Y ponttal. Az n normálisú lapon ébredő σ_n és τ_{mn} feszültségeket a Q_n ponton keresztül az n-el húzott párhuzamos és a kör N metszéspontja adja. Mivel a ZNQ_n és az ANQ_n háromszögek egyaránt derékszögű háromszögek leolvasható az ábráról, hogy

$$\sigma_n = \sigma_z \cos^2\varphi \qquad \text{és} \qquad \tau_{mn} = \sigma_z \cos\varphi \sin\varphi\,.$$

Az ábrán feltüntetett n normálisú felületelemen bejelöltük a σ_n és τ_{mn} feszültségkoordinátákat.

Megjegyezzük a fentiek kiegészítéseként, hogy a 3.3. Mintapélda közölt megoldása valójában a részleges Mohr kör alkalmazása húzott rúd esetén.

A második példa célja a főfeszültségek és a főirányok meghatározása a vékonyfalú rúd csavarási feladata esetén. A feladat megoldása érdekében megrajzolt 4.13. ábra mindent szemléltet: a csavart vékonyfalú csövet, a szerkesztés alapjául szolgáló elemi kockát valamint magát a szerkesztést is. A cső középfelületén megrajzolt és egymással párhuzamos folytonos és szagatott



4.13. ábra.

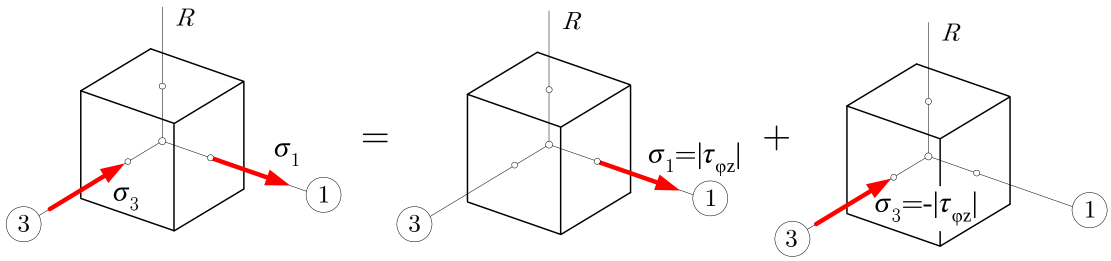
vonalak annak a $-x$ normálisú négyzetnek a kontúrját adják, amelyben a szerkesztést alapját adó elemi kocka metszi a középfelületet. Az elemi kocka homloklapja feszültségmentes, a z normálisú lapon $\boldsymbol{\rho}_z = \tau_{yz}\mathbf{e}_y$; $\tau_{yz} < 0$, az y normálisú lapon pedig $\boldsymbol{\rho}_y = \tau_{zy}\mathbf{e}_z$ a feszültségvektor. Mivel az elemi kocka z és y normálisú lapjain is zérus a σ_n normálfeszültség a Mohr kör átmérőjét adó $Z[0,-$ $-\tau_{yz}]$; $-\tau_{yz} > 0$ és $Y[0, \tau_{zy}]$ pontpár a τ_{mn} tengelyen van és az origó a kör közepe. Következőleg $|\tau_{yz}|$ a kör sugara. Az $x = R$ irány nyilvánvalóan főirány, a $\sigma_x = \sigma_R = 0$ feszültség pedig főfeszültség: A körről leolvasott adatokat is felhasználva

$$\sigma_1 = |\tau_{yz}| = |\tau_{\varphi z}| \,, \qquad \sigma_2 = \sigma_x = \sigma_R = 0 \qquad \text{és} \qquad \sigma_3 = -|\tau_{yz}| = -|\tau_{\varphi z}| \tag{4.25}$$

a három nagyság szerint rendezett főfeszültség értéke. Maga a Q_n pont ugyanúgy szerkeszthető mint az előző feladatban. A jelen esetben azonban a Z ponttal esik egybe. A σ_n tengellyel $-$ -45^o szöget bezáró Q_nN_1 és 45^o szöget bezáró Q_nN_3 egyenes az 1 jelű és 3 jelű főirányokat adja. A vékonyfalú cső ábráján bejelöltük a főtengelyek KR-ét kifeszítő $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2 = -\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_R$ és $\mathbf{n}_3$ egységvektorokat.

A kapott eredmények szerint a csak két főfeszültség különbözik zérustól. Ez azt jelenti hogy kéttengelyű a vékonyfalú cső feszültségi állapota. Érdemes arra is felfigyelni, hogy pozitív csavarónyomaték esetén a középfelület egy adott pontjáról indulva ki az 1 jelű főirányok 45^o-os menetemelkedésű jobbmenetű csavarvonal érintői, maga a csavarvonal pedig megnyúlik. A 2 jelű főirányok ugyancsak 45^o-os menetemelkedésű de balmenetű csavarvonal érintői, maga a csavarvonal pedig megrövidül.

A rideg, törékeny anyagú csövek az anyag sajátosságai miatt az 1 jelű főirányra merőleges felületen törnek a csavarókísérlet során. A lágy, jól alakítható fémek ezzel szemben a z tengelyre merőleges keresztmetszeti síkokban törnek el, vagyis elnyíródnak.



4.14. ábra.

A 4.14. ábra a vékonyfalú csőben kialakuló kéttengelyű feszültségi állapotot szemlélteti a főtengelyek, azaz az $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_R$ és $\mathbf{e}_3$ egységvektorok által kifeszített lokális KR-ben. Az is leolvasható az ábráról, hogy ez a feszültségi állapot valójában két egytengelyű feszültségi állapot szuperpozíciója. Következésképp

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}_1 + \underline{\mathbf{T}}_3$$

a feszültségi tenzor mátrixa, ahol

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{T}}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad \underline{\mathbf{T}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}.$$

Az egytengelyű feszültségi állapottal kapcsolatos (3.18) Hooke törvény alapján, tekintettel az $\varepsilon_1 = \sigma_1/E$ és $\varepsilon_3 = \sigma_3/E$ összefüggésekre is

$$\boldsymbol{A}_1 = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{T}_1 - \frac{\nu}{E}\sigma_1\boldsymbol{E} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{A}_3 = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{T}_3 - \frac{\nu}{E}\sigma_3\boldsymbol{E}$$

a vonatkozó alakváltozási tenzorok. Az utóbbi két egyenlet összegét képezve az

$$\underbrace{\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_3}_{\boldsymbol{A}} = \frac{1+\nu}{E}\underbrace{(\boldsymbol{T}_1 + \boldsymbol{T}_3)}_{\boldsymbol{T}} - \frac{\nu}{E}\underbrace{(\sigma_1 + \sigma_3)}_{=0}\boldsymbol{E},$$

vagy ami ugyanaz az

$$\boldsymbol{A} = \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{T} \tag{4.26}$$

eredmény adódik. Ez a pusztán logikai úton kapott egyenlet a csavarással kapcsolatos anyagegyenlet tenzoriális alakja és mint ilyen független kell, hogy legyen a választott KR-től. Ugyanakkor pedig meg kell egyeznie a kísérleti eredmények alapján felírt (4.17) anyagegyenlettel. A (4.17) és (4.26) egyenletek egybevetése szerint csak akkor lehetséges egyezés, ha

$$\boxed{E = 2G\,(1+\nu)\ .} \tag{4.27}$$

Másként fogalmazva a húzókisérlet és a vékonyfalú cső csavarási kísérlete kapcsán bevezetett három anyagjellemző az E, ν és a G közül bármelyik kifejezhető a másik kettővel. A mondottak egyben azt is jelentik, hogy homogén izotróp test esetén kettő a független anyagállandók száma a lineárisan rugalmas viselkedés tartományában. Megjegyezzük, hogy a csavarókísérlet eredményei szerint a mérési pontosság megszabta hibán belüli a G-re vonatkozó mérési eredmények egyezése a húzókisérlet mérési eredményeként kapott E és ν-vel számított G-vel.

4.1.6. A csavart vékonyfalú cső alakváltozási energiája. Tegyük fel, hogy a 4.1. ábrán vázolt csőről van szó, amelyre Φ_l a jobboldali végkeresztmetszet szögelfordulása a helytállónak vett baloldali végkeresztmetszethez képest. A csőben felhalmozódó alakváltozási energia, amint erre a 2.4.2. szakaszban rámutattunk, megegyezik a külső erők munkájával. Mivel a baloldali véglap nem fordul el a külső erőrendszert alkotó M_c csavarónyomatékok közül csak a jobboldali véglapon működő végez munkát. Ez a munka a 3.2.6. szakasz gondolatmenetének figyelembevételével a (3.23) képlet baloldalának mintájára az

$$\boxed{U = W_K = \frac{1}{2} M_c \varPhi_l} \tag{4.28}$$

alakban írható fel – N_1-nek M_c, míg λ_1-nek $\varPhi_l$ felel meg. A 4.1. ábra alapján, tekintettel a (4.7), (4.16) és $(4.13)_1$ képletekre

$$\varPhi_l = \frac{l}{R_o}\chi = \frac{l}{R_o}\frac{\tau_{\varphi z}}{G} = \frac{M_c l}{R_o^2 A_k G} = \frac{M_c l}{I_p G}\,, \qquad I_p = R_o^2 A_k \tag{4.29}$$

a véglap szögelfordulása, ahol az I_p a vékony körgyűrű un. poláris másodrendű nyomatéka. Megjegyezzük, hogy az utóbbi mennyiséggel a

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_c}{R_o A_k} = \frac{M_c}{I_p} R_o \tag{4.30}$$

alakot ölti a nyírófeszültség számításának (4.13) alatti formulája.

A véglap $\varPhi_l$ szögelfordulásának helyettesítésével

$$U = W_K = \frac{1}{2} M_c \varPhi_l = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{R_o^2 A_k G} = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{I_p G} \tag{4.31}$$

a teljes alakváltozási energia. Az alakváltozási energiasűrűség számításához tovább alakítjuk a fenti képletet. Eszerint

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{R_o^2 A_k G} = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{M_c}{R_o A_k}}_{\tau_{\varphi z}}\,\underbrace{\frac{M_c}{R_o A_k G}}_{\gamma_{\varphi z}=\tau_{\varphi z}/G}\,\underbrace{l A_k}_{V}$$

ahol a V a vékonyfalú cső térfogata. Következésképp

$$\boxed{u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\tau_{\varphi z}\gamma_{\varphi z}} \tag{4.32}$$

a fajlagos alakváltozási energia értéke. Vegyük észre, hogy ez a képlet a tiszta nyírás során felhalmozódott alakváltozási energiasűrűséget adja függetlenül attól, hogy mi hozza létre a tiszta nyírást.

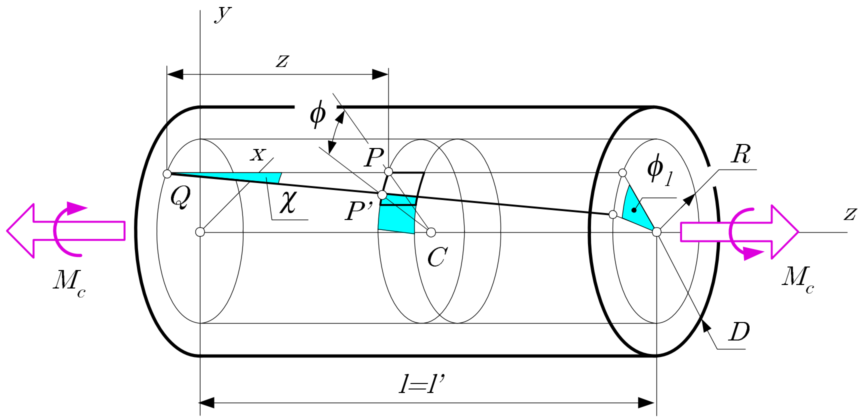
4.2. Kör- és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarása

4.2.1. Elmozdulási és alakváltozási állapot. Számos olyan mérnöki alkalmazás van, amelyben csavarásra igénybevett kör-, vagy körgyűrű keresztmetszetű rudak kapnak vagy mozgásközvetítő, vagypedig teljesítményközvetítő szerepet. Az előző szakaszban sikerült tisztázni a nyírófeszültségekkel kapcsolatos Hook törvényt és ezzel összefüggésben a vékonyfalú körgyűrű keresztmetszetű rúd mechanikai állapotát. Mivel a gondolatmenet alapvető feltevése volt a rúd vékonyfalú volta, a kapott megoldások is csak akkor alkalmazhatók, ha teljesül ez a feltevés.

A jelen 4.2. szakasz célja, hogy általánosabb viszonyok között vizsgálja a csavarási feladatot. A rúd vagy tömör, vagy körgyűrű keresztmetszetű. Az utóbbi esetben azonban nincs korlátozó feltevés a rúd falvastagságára nézve.

A gondolatmenet kifejtése során a tömör körkeresztmetszetű prizmatikus rudat tekintünk majd. Látni fogjuk azonban, hogy ez a feltevés nem lényegi, és az eredményül kapott összefüggések értelemszerűen vonatkoznak körgyűrű keresztmetszetű prizmatikus rudakra is.

A viszonyokat a 4.15. ábra szemlélteti. Bár az ábra nem tüntet fel támaszokat feltételezzük – ugyanúgy, mint azt a vékonyfalú cső esetén tettük – , hogy az l hosszúságú és d átmérőjű rúd $z=0$ keresztmetszete helyben marad. A rudat terhelő M_c csavarónyomaték értékét pedig az korlátozza, hogy csak rugalmas alakváltozást engedünk meg. Az ábra a megfigyelések ismertetése és értelmezése érdekében feltünteti a rúd R sugarú belső felületét is. Alkalmazkodva a rúd geometriájához a HKR-t részesítjük előnybe, adott esetben azonban az xyz kartéziuszi KR-ben is írunk fel egyenleteket.



4.15. ábra.

A rúd elmozdulásállapotát illető megfigyeléseink, a lényeget tekintve, megegyeznek a vékonyfalú cső csavarási feladata kapcsán végzett megfigyeléseinkkel. Ezek szerint

1. Az egyes keresztmetszetek merev lapként fordulnak el a z tengely körül és megmaradnak saját síkjukban az elfordulás során.
2. A keresztmetszetek Φ szögelfordulása egyenesen arányos a keresztmetszet z koordinátájával. Ez azt jelenti, hogy most is fennáll vékonyfalú cső csavarása kapcsán már felírt (4.1) egyenlet: Következőleg $\Phi = \vartheta z$, ahol ϑ a fajlagos elcsavarodási szög.

Az elmozdulásmező meghatározása fentiek alapján a (4.2) képletre vezető gondolatmenet megismétlését igényli. Csak annyi a különbség, hogy a tömör rúd R sugarú belső hengerfelülete veszi át a vékonyfalú cső R_o sugarú középfelületének szerepét. Vegyük észre, hogy most változó az R sugár, míg a vékonyfalú cső esetén állandó volt az R-nek megfelelő R_o. Mivel kicsik az elmozdulások és alakváltozások a P pont mozgását adó PP' közötti

$$\Phi R = \vartheta z R = \chi z \tag{4.33}$$

ív jó közelítéssel a P ponthoz tartozó $\mathbf{r}_{PP'}$ elmozdulásvektor hossza. Ha visszaidézzük a 4.2. ábrát, de az előzőeknek megfelelően R-et gondolunk R_o helyébe, akkor nyilvánvaló az ábráról, hogy $\mathbf{e}_\varphi$ irányú vektornak vehető az $\mathbf{u} = \mathbf{r}_{PP'}$ elmozdulásvektor. A most is érvényes (4.1) képletet figyelembevéve

$$\mathbf{u} = \Phi R\mathbf{e}_\varphi = \vartheta z R \underbrace{\mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_R} = \vartheta z \mathbf{e}_z \times \underbrace{R\mathbf{e}_R}_{\mathbf{R}} = \vartheta z \mathbf{e}_z \times \mathbf{R} \tag{4.34}$$

a tömör cső elmozdulásmezeje. A (4.34) egyenlet jelentőségét az adja, hogy segítségével deriválásokkal állítható elő az $\boldsymbol{U}$ derivált tenzor. A (2.14) és (2.99) képletek felhasználásával

$$\boldsymbol{U} = \mathbf{u} \circ \nabla = (\vartheta z R \mathbf{e}_\varphi) \circ \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z \right)}_{\nabla \text{ HKR-ben}}$$

A további lépések során vegyük figyelembe, hogy az $\mathbf{e}_\varphi$ a φ polárszög függvénye. A (2.98a) képletek szerint

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{e}_\varphi}{\mathrm{d}\varphi} = -\mathbf{e}_R \,.$$

Az utóbbi összefüggés kihasználásával

$$\boldsymbol{U} = \mathbf{u} \circ \nabla = \underbrace{\left[\vartheta z R \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial R} \right]}_{\vartheta z \mathbf{e}_\varphi} \circ \mathbf{e}_R + \underbrace{\left[\vartheta z R \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \varphi} \right]}_{-\vartheta z R \mathbf{e}_R} \circ \mathbf{e}_\varphi + \underbrace{\left[\vartheta z R \mathbf{e}_\varphi \frac{\partial}{\partial z} \right]}_{\vartheta R \mathbf{e}_\varphi} \circ \mathbf{e}_z$$

azaz

$$\boldsymbol{U} = \underbrace{\vartheta z \mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{u}_R} \circ \mathbf{e}_R + \underbrace{(-\vartheta z \mathbf{e}_R)}_{\mathbf{u}_\varphi} \circ \mathbf{e}_\varphi + \underbrace{\vartheta R \mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{u}_z} \circ \mathbf{e}_z$$

a derivált tenzor. A kapott eredmény alapján

$$\underline{\mathbf{U}} = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{u}_R & \mathbf{u}_\varphi & \mathbf{u}_z \end{array} \right] = \begin{bmatrix} 0 & -\vartheta z & 0 \\ \vartheta z & 0 & \vartheta R \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

a derivált tenzor mátrixa, a (2.36) valamint a (4.3) képletek alapján pedig

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\mathbf{U}}+\underline{\mathbf{U}}^T\right) = \left[\ \underline{\boldsymbol{\alpha}}_R \quad \underline{\boldsymbol{\alpha}}_\varphi \quad \underline{\boldsymbol{\alpha}}_z\ \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{R\varphi} & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\varphi R} & \varepsilon_\varphi & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\vartheta R}{2} \\ 0 & \frac{\vartheta R}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

az alakváltozási tenzor mátrixa. Ez az eredmény azt jelenti, hogy

$$\varepsilon_R = \varepsilon_\varphi = \varepsilon_z = \gamma_{\varphi R} = \gamma_{R\varphi} = \gamma_{zR} = \gamma_{Rz} = 0\,,$$

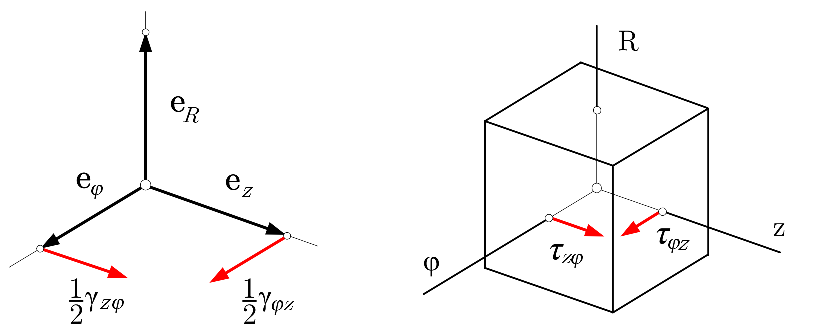
míg az alakváltozási tenzor egyedüli nem zérus eleme a $\gamma_{\varphi z} = \gamma_{z\varphi}$ fajlagos szögváltozás az R lineáris függvénye

$$\boxed{\gamma_{\varphi z} = \gamma = R\vartheta\,.} \tag{4.37}$$

Később látni fogjuk, hogy a ϑ fajlagos elcsavarodási szöget egyértelműen meghatározza az M_c csavarónyomaték értéke. Diádikus alakban

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}_\varphi \circ \mathbf{e}_\varphi + \boldsymbol{\alpha}_z \circ \mathbf{e}_z = \frac{1}{2}\vartheta R \mathbf{e}_R \circ \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{2}\vartheta R \mathbf{e}_\varphi \circ \mathbf{e}_z$$

az alakváltozási tenzor. A 4.16. ábra baloldala az $R\varphi z$ HKR-ben megrajzolt elemi triéderen szemlélteti az alakváltozási tenzort.



4.16. ábra.

4.2.2. Feszültségi és energetikai állapot. Mivel a (4.36) alakváltozási tenzor tiszta nyíráshoz tartozó alakváltozási állapot ír le a feszültségi tenzor mátrixa a (4.17) Hook törvényből számítható

$$\underline{\mathbf{T}} = \left[\ \underline{\boldsymbol{\rho}}_R \quad \underline{\boldsymbol{\rho}}_\varphi \quad \underline{\boldsymbol{\rho}}_z\ \right] = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ \tau_{\varphi R} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix} = 2G\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G\vartheta R \\ 0 & G\vartheta R & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.38}$$

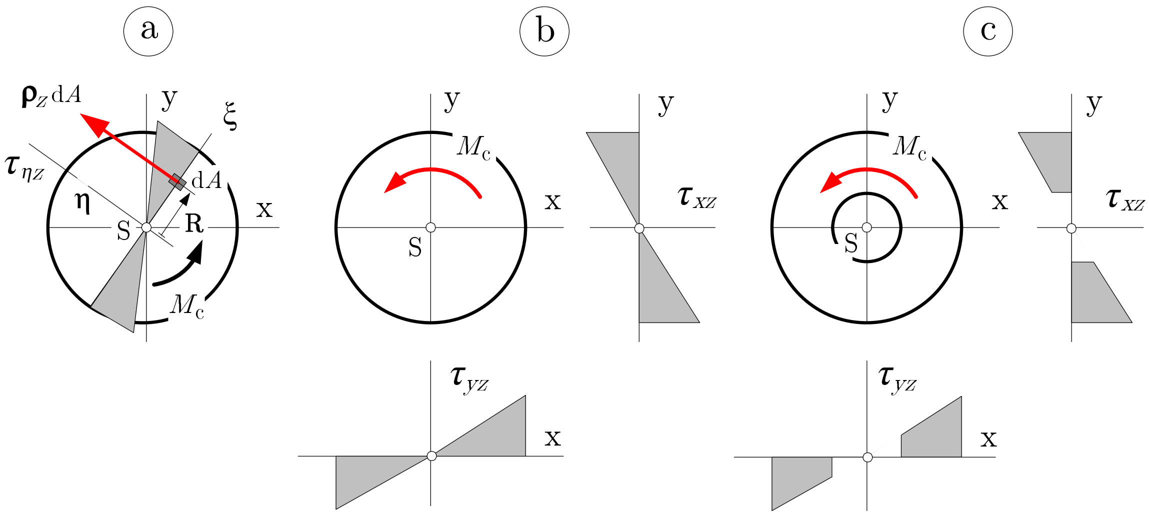
Kiolvasható a fenti egyenletből, hogy

$$\sigma_R = \sigma_\varphi = \sigma_z = \tau_{\varphi R} = \tau_{R\varphi} = \tau_{zR} = \tau_{Rz} = 0\,.$$

A feszültségi tenzor egyedüli nem zérus eleme a $\tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi}$ nyírófeszültség az R lineáris függvénye

$$\boxed{\tau_{\varphi z} = \tau = GR\vartheta\,.} \tag{4.39}$$

A 4.16. ábra jobboldala az $R\varphi z$ HKR-ben megrajzolt elemi kockán szemlélteti a feszültségi tenzort. A 4.17.(a) ábra a tömör rúd egy keresztmetszetében a súlyponthoz kötött $\xi\eta$ KR-ben



4.17. ábra.

(a ξ tengely egybeesik az R tengellyel, következőleg az η irány a ξ tengely minden pontjában párhuzamos a φ iránnyal) szemlélteti a ξ tengely keresztmetszetre eső pontjaiban ébredő $\tau_{\xi z}=\tau_{\varphi z}$ feszültségeket. Az (a) ábrarészlet, a későbbiek kedvéért, feltünteti a dA felületelemen ébredő

$$\boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A = \underbrace{\tau_{\varphi z}\mathbf{e}_\varphi}_{\boldsymbol{\tau}_z} dA = GR\vartheta\mathbf{e}_\varphi \mathrm{d}A \tag{4.40}$$

elemi erőt. Mivel a $\boldsymbol{\rho}_z = \tau_{\varphi z}\mathbf{e}_\varphi$ feszültségeloszlás egyenértékű kell, hogy legyen a keresztmetszet M_c csavaróigénybevételével a nyírófeszültségek ugyanolyan módon – most az óramutató járásával ellentétesen – forgatják a keresztmetszetet a súlyponton átmenő z tengely körül, mint az M_c csavarónyomaték. A 4.17.(b) ábrarészlet ugyancsak tömör keresztmetszetre, de nem magán a keresztmetszeten, hanem külön megrajzolt KR-ekben, szemlélteti a nyírófeszültségek eloszlását az x és y tengelyek mentén. A 4.17.(c) ábra körgyűrűalakú keresztmetszetre teszi ugyanezt.

Mivel a rúd bármely keresztmetszetében a keresztmetszeten ébredő

$$\boldsymbol{\rho}_z = \tau_z = \tau_{\varphi z}\mathbf{e}_\varphi = GR\vartheta\mathbf{e}_\varphi$$

nyírófeszültségek egyenértékűek a keresztmetszet M_c csavaróigénybevételével

(a) zérus kell, hogy legyen az $\mathbf{F}_S$ feszültségi eredő,
(b) a feszültségi eredő erőpárra nézve pedig fenn kell állnia az $\mathbf{M}_S = M_c\mathbf{e}_z$ egyenletnek.

Az (a) esetben a (2.89) és a (4.40) összefüggések és a A 4.17.(a) ábra alapján írható, hogy

$$\mathbf{F}_S = \int_A \boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A = \int_A GR\vartheta \underbrace{\mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{e}_z\times\mathbf{e}_R} \mathrm{d}A = G\vartheta\mathbf{e}_z \times \int_A \underbrace{R\mathbf{e}_R}_{\mathbf{R}} \mathrm{d}A = G\vartheta\mathbf{e}_z \times \underbrace{\int_A \mathbf{R}\mathrm{d}A}_{\mathbf{S}_S} = G\vartheta\mathbf{e}_z \times \mathbf{S}_S\,.$$

Itt $\mathbf{S}_S$ a keresztmetszet saját súlypontjára vett statikai nyomatéka, ez pedig nyilvánvalóan zérus, azaz $\mathbf{S}_S = 0$. Következőleg valóban zérus az $\mathbf{F}_S$ feszültségi eredő.

Az (b) esetben a (2.90) és a (4.40) összefüggések valamint a 4.17.(a) ábra alapján

$$\mathbf{M}_S = \int_A \mathbf{R}\times\boldsymbol{\rho}_z \mathrm{d}A = \int_A R\mathbf{e}_R \times GR\vartheta\mathbf{e}_\varphi \mathrm{d}A = G\vartheta \int_A R^2 \underbrace{\mathbf{e}_R \times \mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{e}_z} \mathrm{d}A = \mathbf{e}_z G\vartheta \int_A R^2 \mathrm{d}A = M_c\mathbf{e}_z\,. \tag{4.41}$$

Tekintettel az utóbbi képletre a

$$\boxed{I_p = \int_A R^2 \mathrm{d}A} \tag{4.42}$$

összefüggés értelmezi kör-, illetve körgyűrű alakú keresztmetszetre az I_p *poláris másodrendű nyomatékot*. A poláris másodrendű nyomaték értelmezésének felhasználásával a (4.41) egyenletből az

$$\boxed{M_c = G\vartheta I_p\,, \quad \text{vagy ami ugyanaz a} \quad \vartheta = \frac{M_c}{I_pG}} \tag{4.43}$$

eredmény következik. Az utóbbi összefüggés szerint a ϑ fajlagos elcsavarodási szög egyenesen arányos az M_c csavarónyomatékkal, és fordítottan arányos az I_p poláris másodrendű nyomatékkal, valamint a G nyírási rugalmassági modulussal. A fajlagos elcsavarodási szög fenti képletével a (4.37) egyenletből

$$\gamma_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_pG}R \tag{4.44}$$

a fajlagos szögtorzulás, a (4.39) egyenletből pedig

$$\boxed{\tau_{\varphi z} = G\gamma_{\varphi z} = \frac{M_c}{I_p}R} \tag{4.45}$$

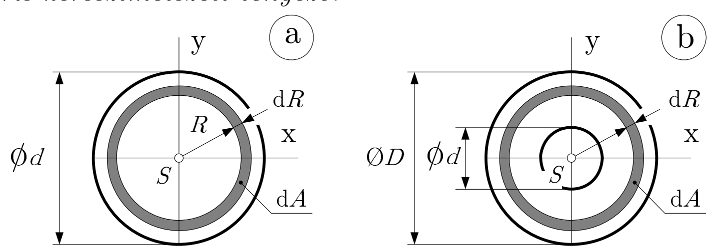
a nyírófeszültség értéke. Ha az M_c csavarónyomatékot előjelhelyesen helyettesítjük, akkor a fenti képletek előjelhelyes eredményt adnak az $R\varphi z$ HKR-ben a $\gamma_{\varphi z}$ szögtorzulásra és a $\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültségre nézve. Az is kiolvasható a (4.45) összefüggésből, hogy a $\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültség abszolutértéke a keresztmetszet kerületén éri el a

$$\boxed{\tau_{\max} = |\tau_{\varphi z}|_{\max} = \frac{|M_c|}{I_p}\frac{D}{2} = \frac{|M_c|}{K_p}} \tag{4.46}$$

maximumot, ahol

$$\boxed{K_p = \frac{I_p}{R_{\max}}} \tag{4.47}$$

az úgynevezett *poláris keresztmetszeti tényező*.



4.18. ábra.

Legyen d a körkeresztmetszetű rúd átmérője. Legyenek továbbá d és D a körgyűrűkeresztmetszetű rúd belső és külső átmérői. Szimmetriaokokból $\mathrm{d}A = 2R\pi dR$ a felületelem. Körkeresztmetszetű rúdra a (4.42) és a (4.47) képletek, valamint a 4.18.(a) ábra alapján

$$I_p = \int_A R^2 \mathrm{d}A = 2\pi \int_0^{d/2} R^3 \mathrm{d}R = 2\pi \left[\frac{R^4}{4}\right]_0^{d/2}\,,$$

azaz

$$\boxed{I_p = \frac{d^4\pi}{32} \qquad \text{és} \qquad K_p = \frac{d^3\pi}{16}} \tag{4.48}$$

a poláris másodrendű nyomaték, valamint a poláris keresztmetszeti tényező. Ugyanilyen gondolatmenettel kapjuk a 4.18.(b) ábra alapján, hogy

$$I_p = 2\pi \int_{d/2}^{D/2} R^3 \mathrm{d}R = 2\pi \left[\frac{R^4}{4}\right]_{d/2}^{D/2}\,,$$

ahonnan

$$\boxed{I_p = \frac{\left(D^4 - d^4\right)\pi}{32} \qquad \text{és} \qquad K_p = \frac{\left(D^4 - d^4\right)\pi}{16D}} \tag{4.49}$$

a poláris másodrendű nyomaték illetve a poláris keresztmetszeti tényező.

A (4.33) összefüggésből $z = l$-re megkapjuk a rúd jobboldali véglapjának a rúd baloldali véglapjához viszonyított szögelfordulását:

$$\varPhi_l = \vartheta l$$

Innen, a fajlagos szögelfordulás $(4.33)_2$ alatti értékének helyettesítésével

$$\boxed{\varPhi_l = \frac{M_c l}{I_p G}} \tag{4.50}$$

a két véglap egymáshoz viszonyított relatív elfordulása.

Az l hosszúságú rúdszakaszban felhalmozódott alakváltozási energia kétféleképpen is számítható. Vehetjük egyrészről a rúdszakaszra ható külső erők munkáját, hiszen az a rugalmas alakváltozás tartományában mindig megegyezik a felhalmozódott alakváltozási energiával. Másrészről számíthatjuk a fajlagos alakváltozási energia rúdszakasz térfogatára vonatkozó integrálját.

Az első esetben a vékonyfalú cső alakváltozási energiájával kapcsolatos és a (4.31) képletre vezető gondolatmenettel azonnal írhatjuk, hogy

$$\boxed{U = W_K = \frac{1}{2} M_c \varPhi_l = \frac{1}{2} \frac{M_c^2 l}{I_p G}\,.} \tag{4.51}$$

A második esetre nézve a fejezet végén bemutatott 4.4. Mintapélda mutatja be a fentivel azonos eredményre vezető számítást.

Érdemes azt is megfigyelni, hogy fennáll a

$$\frac{\partial U}{\partial M_c} = \frac{M_c l}{I_p G} = \varPhi_l\,. \tag{4.52}$$

egyenlet Ez az összefüggés a húzott, illetve nyomott rudakkal kapcsolatos (3.25) képlet analogonja. Az összefüggés szerint a rúd véglapjának $\varPhi_l$ szögelfordulása az alakváltozási energia rúd véglapján működő nyomaték szerinti parciális deriváltja.

4.2.3. Ellenőrzés, méretezés. A jelen szakasz csavarásra igénybevett kör és körgyűrűkeresztmetszetű rudak ellenőrzésével illetve méretezésével foglalkozik. Jelölje a tönkremenetelt okozó és pozitív előjelűnek tekintett nyírófeszültséget τ_{jell}. Ez a mennyiség a rúd anyagától függően vagy a τ_F folyáshatárral, vagypedig a τ_B nyírószilárdsággal vehető egyenlőnek. Az első választás szívós anyagok (lágy fémek, alacsony széntartalmú acélok) esetén célszerű a jelentős maradó alakváltozások elkerülése érdekében. Rideg anyagok esetén általában nem előzi meg jelentős alakváltozás a törést. Itt tehát a második választás a szokásos.

A megengedett nyírófeszültséget a

$$\boxed{\tau_{meg} = \frac{\tau_{\text{jell}}}{n}} \tag{4.53}$$

összefüggés értelmezi, ahol az n a 3.2.7. szakaszból már ismert előírt biztonsági tényező.

Ellenőrzés esetén a keresztmetszeten fellépő nyírófeszültség (4.46) képlettel értelmezett maximumát számítjuk ki először és ezt hasonlítjuk össze a megengedett nyírófeszültséggel. Megfelel a csavarásra igénybevett kör-, vagy körgyűrűkeresztmetszetű rúd, ha fennáll a

$$\boxed{\tau_{\max} = \frac{|M_c|}{K_p} \le \tau_{\text{meg}} = \frac{\tau_{\text{jell}}}{n}} \tag{4.54}$$

egyenlőtlenség. Méretezés esetén adott az M_c csavarónyomaték, valamint a rúd anyaga és első lépésben keressük azt a minimálisan szükséges $K_{p\,sz}$ keresztmetszeti tényezőt, amelyhez előírt n biztonsági tényező tartozik. A keresztmetszeti tényező $K_{p\,sz}$ alsó korlátja a (4.54) egyenlőtlenségből következik:

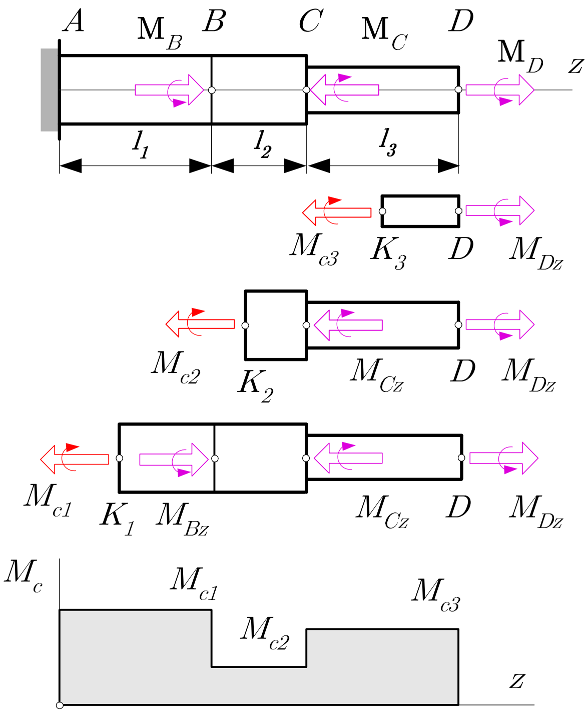
$$\boxed{K_p \ge K_{p\,sz} = \frac{|M_c|}{\tau_{\text{meg}}}\,.} \tag{4.55}$$

A $K_{p\,sz}$ alsó korlát ismeretében – esetleg más szempontokat is figyelembe véve – megválasztható(k) a keresztmetszet átmérője, illetve átmérői.

4.3. Változó keresztmetszetű rúd

4.3.1. Szakaszonként állandó keresztmetszet. A 4.19. ábra a szakaszonként állandó keresztmetszetű AD rudat, a rúd terheléseit – ezek z tengely irányú nyomatékok, amelyek a rúd B és C keresztmetszetein illetve a rúd D véglapján működnek –, valamint a rúd K_3D, K_2D és K_1D jelű részeit, továbbá a felsorolt rúdrészeken működő külső és belső erőket, végül pedig a csavarónyomatéki ábrát szemlélteti. Feltételezzük, hogy az 1, 2 és 3 jelű rúdszakaszokon belül mindenütt állandóak a prizmatikus kör-; és körgyűrűkeresztmetszetű rudak csavarási feladatával kapcsolatos képletekben szereplő és a rúdra jellemző mennyiségek, továbbá a csavarónyomaték értéke is, azaz I_{pi}, G_i, l_i és M_{ci}. Leolvasható az ábráról – mivel az $M_{Cz} < 0$ – az is, hogy

$$M_{c1} = M_{Bz} + M_{Cz} + M_{Dz},$$
$$M_{c2} = M_{Cz} + M_{Dz}, \qquad M_{c3} = M_{Dz}\,.$$



4.19. ábra.

Ha eltekintünk a hirtelen keresztmetszetváltozások feszültségi és alakváltozási állapotra gyakorolt hatásától, ez ugyanis csak lokális zavarást okoz, akkor az összes eddigi eredményt, azaz a (4.45), (4.50) és (4.51) képleteket egyaránt érvényesnek tekinthetjük az egyes szakaszokon belül. Következőleg

$$\boxed{\tau_{\varphi zi} = \frac{M_{ci}}{I_{pi}} R} \tag{4.56}$$

a nyírófeszültség képlete az i-ik szakaszra nézve (i=1,2,3). A rúd D keresztmetszetének elfordulása az A keresztmetszethez képest pedig úgy kapható meg, hogy összegezzük az egyes rúdszakaszok jobboldali végének a tekintett rúdszakasz kezdetéhez viszonyított Φ_i szögelfordulásait:

$$\boxed{\Phi_{DA} = \Phi_l = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{M_{ci} l_i}{I_{pi} G_i}\,.} \tag{4.57}$$

A rúdban felhalmozódott teljes alakváltozási energia ugyanilyen módon az egyes rúdszakaszokban felhalmozódott alakváltozási energia összegeként adódik:

$$\boxed{U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \frac{M_{ci}^2 l_i}{I_{pi} G_i}\,.} \tag{4.58}$$

Mivel

$$\frac{\partial M_{ci}}{\partial M_{Dz}} = 1; \qquad i = 1,2,3$$

a (4.58) képletből a (4.52) egyenlet általánosítását jelentő

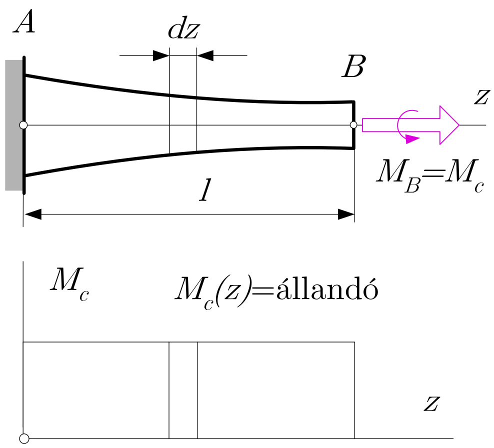
$$\frac{\partial U}{\partial M_{Dz}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{M_{ci} l_i}{I_{pi} G_i} \frac{\partial M_{ci}}{\partial M_{Dz}} = \sum_{i=1}^{3} \frac{M_{ci} l_i}{I_{pi} G_i} = \Phi_{DA} = \Phi_l$$

összefüggés következik.

A szakaszonként állandó keresztmetszetű rúd esetén azon alapul az ellenőrzés illetve méretezés, hogy minden egyes rúdszakaszra nézve fenn kell állnia a

$$\tau_{\max\ i} = \frac{|M_{ci}|}{K_{pi}} \leq \tau_{\text{meg}\, i} \tag{4.59}$$

relációnak, ahol $\tau_{\max\ i}$ a megengedett nyírófeszültség a rúd i-ik szakaszán.



4.20. ábra.

4.3.2. Folytonosan változó keresztmetszet. Ha folytonosan de csak igen kismértékben változik a kör-, illetve körgyűrű keresztmetszet területe – a 4.20. ábra ezt az esetet szemlélteti –, akkor jó közelítéssel fennáll, hogy

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_c(z)}{I_p(z)} R \tag{4.60}$$

a nyírófeszültség, a többi feszültségkoordináta pedig elhanyagolhatóan kicsiny. A rúd véglapjának szögelfordulását a dz hosszúságú elemi rúdszakasz két véglapja dΦ relatív szögelfordulásának integrálja adja. Maga a dΦ relatív szögelfordulás a (4.50) képlettel számítható, ha az M_c helyére $M_c(z)$-t – magán az ábrán állandó az $M_c(z)$ –, l helyére dz-t és az I_pG szorzat helyére pedig $I_p(z)G(z)$-t írunk. Következésképp:

$$\Phi = \int_0^l \underbrace{\frac{M_c(z)}{I_p(z)G(z)}\,\mathrm{d}z}_{\mathrm{d}\Phi}\,. \tag{4.61}$$

Hasonló megfontolással kapjuk (4.51)-ból, hogy

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M_c^2(z)}{I_p(z)G(z)}\,\mathrm{d}z \tag{4.62}$$

a rúdban felhalmozott alakváltozási energia. Ami pedig a fenti képletek érvényességét illeti érdemes ismételten hangsúlyozni, hogy azok csak akkor alkalmazhatók ha igen kismértékben változik az A keresztmetszet a z függvényében.

4.4. Statikailag határozatlan feladatok

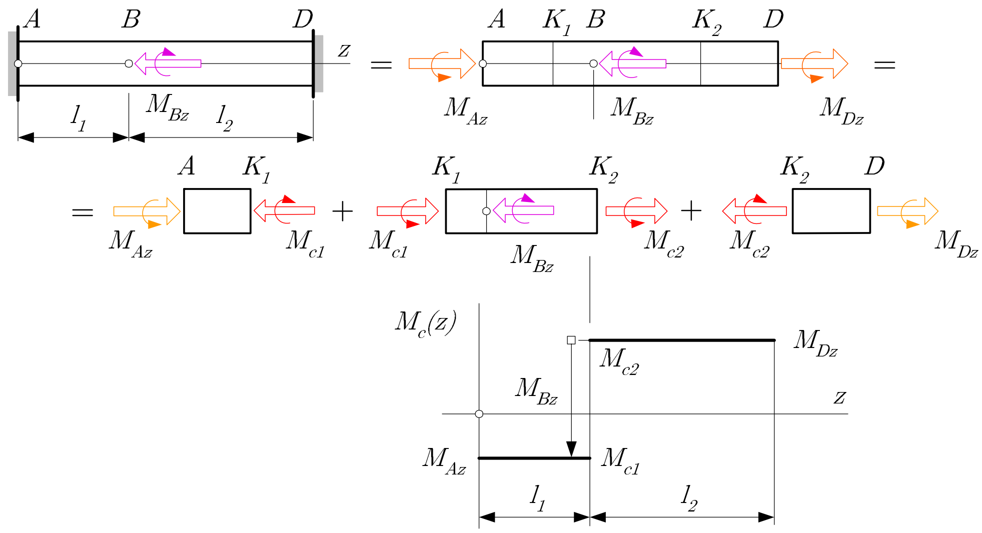
Csavarásra igénybevett kör-, és körgyűrűkeresztmetszetű rudak esetén úgy vesszük, hogy a nyomatékvektorok a rúd tengelyvonala mentén működnek, azaz egy egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésre az ismeretlen támasztónyomaték(ok) meghatározására. Ha a rúd valamelyik végét befogjuk, akkor csak egy ismeretlen támasztónyomatékkal kell számolnunk, azaz a feladat statikailag határozott. Ha azonban a rúd mindkét vége befogott akkor két támasztónyomatékot kell meghatározni. Ez egyben azt is jelenti, hogy statikailag határozatlan a feladat, hiszen egy egyensúlyi egyenlet áll rendelkezésre a két ismeretlen meghatározására. Következésképp további egyenletre van szükség a feladat határozottá tételéhez. Ezt a pótlólagos egyenletet abból a feltételből kapjuk, hogy a második támasz révén valójában meggátoljuk, hogy a rúd befogott végei egymáshoz képest elforduljanak.

Mindez jól követhetően jelenik meg a 4.21. ábrán vázolt AD rúd esetén. A rúd két vége befogott. A terhelést a tengelyvonal B pontjában működő $M_{Bz} < 0$ nyomaték jelenti. Az ábra feltünteti

- a támaszairól levett rudat és a reá ható M_{Bz} terhelést, továbbá az ismeretlen M_{Az}, M_{Dz} támasztónyomatékokat,
- a rúd AK_1, K_1K_2 és K_2D részeit – K_1 és K_2 az AB, illetve BD szakaszokon belül található rúdkeresztmetszetek –, valamint a rajtuk működő külső és belső erőket, és végül
- az $M_c(z)$ csavarónyomatéki ábrát.

Mivel a rúd egyensúlyban van fenn kell állnia a

$$M_{Az} + M_{Bz} + M_{Cz} = 0 \tag{4.63}$$



4.21. ábra.

nyomatéki egyenletnek. A rúd D keresztmetszetének zérus az A keresztmetszethez viszonyított szögelfordulása. Visszaidézve a (4.57) képletet írhatjuk tehát, hogy

$$\Phi_{DA}\, I_p G = \Phi_l\, I_p G = M_{c1} l_1 + M_{c2} l_2 = 0\,,$$

ahol az AK_1 illetve K_2D jelű rúdszakaszok egyensúlya alapján $M_{c1}{=}-M_{Az}$ és $M_{c2}{=}M_{Dz}$. Következésképp

$$M_{Dz} = \frac{l_1}{l_2} M_{Az}\,. \tag{4.64}$$

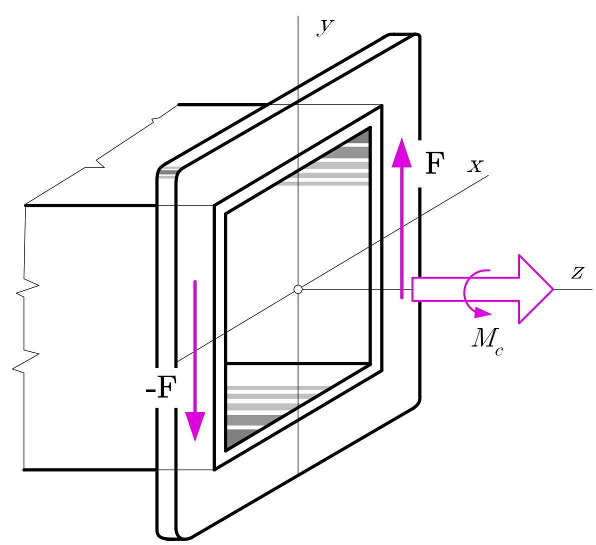
Az utóbbi formula (4.63)-ba történő helyettesítésével M_{Az}-t, majd az M_{Az}-re vonatkozó eredményt (4.64)-be írva M_{Dz}-t kapjuk

$$M_{Az} = -\frac{l_2}{l_1+l_2} M_{Bz}\,, \qquad M_{Dz} = -\frac{l_1}{l_1+l_2} M_{Bz}\,. \tag{4.65}$$

Ezzel megoldottuk a feladatot.

4.5. Vékonyfalú, zárt szelvényű prizmatikus rudak szabad csavarása

A vizsgálat tárgyát képező rúd állandó keresztmetszetű, zárt szelvényű és vékonyfalú. A 4.22. ábra példaként szemlélteti egy ilyen téglalapkeresztmetszetű rúd egyik, terhelt végét. A rúd szemléltetett vége peremezett. Nyilvánvaló az ábráról, hogy a peremen kifejtett **F**, −**F** erőpár csavarásra veszi igénybe a rudat. A vonatkozó csavarónyomatékot M_c jelöli.

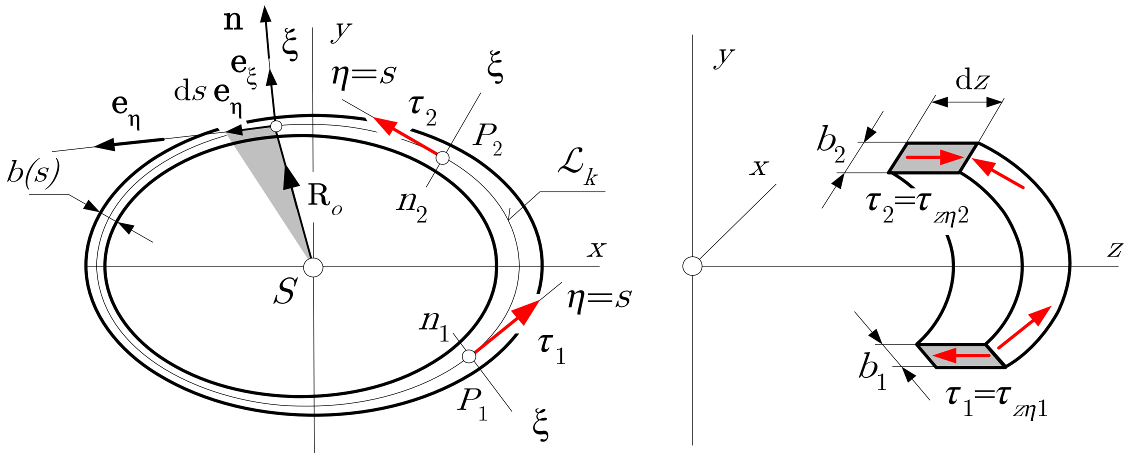


4.22. ábra.

A csavart rúd hossztengelye, összhangban az eddigiekkel, egybeesik a KR z tengelyével. A rúd keresztmetszetei pedig az xy koordinátasíkkal párhuzamos síkokban fekszenek.

Ha nem kör-, vagy körgyűrű keresztmetszetű rudat csavarunk, akkor a megfigyelések szerint a rúd keresztmetszeteit alkotó anyagi pontok a rúd palástjának alkotói irányában, azaz a z irányban is elmozdulnak. Ez azt jelenti hogy nem marad síkfelület a terhelés hatására alakváltozott keresztmetszet. Egy adott keresztmetszet pontjainak z irányú elmozdulását a keresztmetszet *öblösödésének* vagy *vetemedésének* nevezzük.

Mivel az erőpárt alkotó erők a a rúd peremének síkjában működnek nincs gátolva a rúd keresztmetszeteinek z irányú elmozdulása. Ezzel összefüggésben *szabad csavarásról* beszélünk ha nincs meggátolva a keresztmetszetek pontjainak a rúd hossztengelye menti elmozdulása. Ha, ezzel szemben valamilyen módon, pl. a támaszok révén, meg van gátolva a rúd keresztmetszeteinek z irányú mozgása, akkor *gátolt csavarásról* beszélünk. A továbbiakban feltételezzük, hogy a feladat szabad csavarási feladat.



4.23. ábra.

A 4.23. ábra baloldali része egy vékonyfalú prizmatikus rúd keresztmetszetét szemlélteti. A rúdszelvény úgy épül fel, hogy a szelvény középvonalára, ezt vékony vonallal rajzoltuk meg, merőlegesen mindkét irányban felmérjük a b vastagság felét. Maga a vastagság a szelvény $\mathcal{L}_k$ középvonala mentén mért s ívkoordináta függvénye: $b = b\,(s)$. A keresztmetszet középvonalának minden egyes pontjában értelmezhető egy jobbsodratú $\xi\eta\zeta$ $(\xi s\zeta)$ lokális KR. A ξ tengely a középvonal érintője, melynek pozitív iránya egybeesik az s ívkoordináta pozitív irányával; az utóbbi irányban haladva a középvonalon balkéz felől esik a középvonal által határolt síkbeli tartomány. Az η tengely a középvonal külső normálisa, a ζ tengely pedig párhuzamos a z tengellyel. A középvonal pontjainak $\mathbf{R}_o = \mathbf{R}_o(s)$ a helyvektora. Legyen $\mathbf{n}$ a középvonal külső normális egységvektora. Nyilvánvaló az eddigiek alapján, hogy

$$\mathbf{e}_\xi = \mathbf{n}\,, \qquad \mathbf{e}_\eta = \frac{\mathrm{d}\mathbf{R}_o(s)}{\mathrm{d}s} \qquad \text{és} \qquad \mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_\xi \times \mathbf{e}_\eta\,.$$

Az alábbiakban megkíséreljük tisztázni a rúd feszültségi állapotát. Ehhez a kérdéshez kapcsolódóan az alábbi feltevésekkel élünk:

1. A $b(s)$ falvastagság csak lassan és kis mértékben változik az s függvényében.
2. Mivel szabad csavarási feladatról van szó csak nyírófeszültség ébred a keresztmetszeten. Következésképp $\rho_z = \tau_z$.
3. A kialakuló feszültségállapot független a z koordinátától.
4. A nyírófeszültségnek nincs ξ irányú összetevője és állandó a falvastagság mentén. Ezért mindig megadható a
$$\tau_z = \tau_{\eta z}(s)\mathbf{e}_\eta(s) \tag{4.66}$$
alakban.

Az utóbbi feltevés azon alapul, hogy csak érintőirányú feszültség ébredhet a keresztmetszet peremén, továbbá, hogy kicsi és csak mérsékelten változik $b(s)$ falvastagság.

A 4.23. ábra jobboldali része egy a csőből kimetszett hasábot szemléltet. A hasáb két z tengellyel párhuzamos és az ábrán halványszürke színben megrajzolt határfelületét úgy kapjuk meg, hogy a baloldali ábrarészlet n_1 és n_2 jelű egyenesszakaszain áthaladó – a két egyenesszakasz mindegyike merőleges a cső középvonalára – és a z tengellyel párhuzamos síkokat veszünk metszősíknak. A hasáb z tengelyre merőleges határfelületei a cső két egymástól dz távolságra fekvő keresztmetszetének részei. A hasábot szemléltető ábra, összhangban a nyírófeszültségek dualitásával, feltünteti a hasábon működő feszültségeket is. Mivel a hasáb egyensúlyban van zérus a z irányú erők összege:

$$-b_1\tau_{z\eta 1}\mathrm{d}z + b_2\tau_{z\eta 2}\mathrm{d}z = 0\,.$$

Ebből az egyenletből, figyelembe azt a körülményt, hogy az n_1 és n_2 bárhol lehet a középvonalon, a

$$\tau_{\eta z}(s)\,b(s) = \text{állandó} = Q \tag{4.67}$$

összefüggés következik. A cső $b(s)$ falvastagságának és a falvastagság menti $\tau_{\eta z}(s)$ nyírófeszültségnek Q szorzatát *nyírófolyamnak* szokás nevezni. A (4.67) képlet szerint állandó a Q nyírófolyam a vékonyfalú, zárt keresztmetszetű cső szabad csavarási feladata esetén.

A nyírófolyam állandóságából következik az a természetes követelmény, hogy zérus értékű a keresztmetszeten ébredő belső erőrendszer, azaz a τ_z nyírófeszültségek eredője Valóban, a (3.13), (4.66) és (4.67) képletek alapján egyszerű átalakításokkal adódik, hogy

$$\mathbf{F}_S=\int_A \rho_z\,\mathrm{d}A=\int_A \tau_z \underbrace{\mathrm{d}A}_{b(s)\,\mathrm{d}s}=\oint_{\mathcal{L}_k}\mathbf{e}_\eta(s)\underbrace{\tau_{\eta z}(s)b(s)}_{Q}\,\mathrm{d}s=Q\oint_{\mathcal{L}_k}\underbrace{\mathbf{e}_\eta(s)\,\mathrm{d}s}_{\mathrm{d}\mathbf{R}_o}=Q\int_{P_1}^{P_1}\mathrm{d}\mathbf{R}_o=Q\,\mathbf{R}_o\Big|_{P_1}^{P_1}=0\,.$$

A nyírófeszültség és a csavarónyomaték közötti kapcsolatot abból a feltételből kapjuk meg, hogy megegyezik a τ_z nyírófeszültségeloszlás nyomatéka az S pontra a terhelésből adódó $M_c\mathbf{e}_z$ csavarónyomatékkal. A számítások során vegyük figyelembe az alábbiakat:

1. A $\tau_z\,b(s)$ elemi eredő mindig a keresztmetszet középvonalán működik.
2. Mivel az $\mathbf{R}_o(s)$ és $\mathrm{d}\mathbf{R}_o$ vektorok vektoriális szorzata merőleges a két vektorra, a szorzat értéke pedig a két vektor által kifeszített parallelogramma területe fennáll az $\mathbf{R}_o(s)\times\mathbf{e}_\eta(s)\mathrm{d}s=\mathbf{R}_o(s)\times$ $\times\,\mathrm{d}\mathbf{R}_o=2\mathrm{d}A_o\mathbf{e}_z$ összefüggés, ahol $\mathrm{d}A_o$ a $\mathbf{R}_o(s)$ és $\mathrm{d}\mathbf{R}_o=\mathbf{e}_\eta(s)\mathrm{d}s$ vektorok által kifeszített halványszürke háromszög területe.

A (3.13), (4.66) és (4.67) összefüggések, valamint a fentiek alapján írható, hogy

$$\mathbf{M}_S=\boxed{M_c}\,\mathbf{e}_z=\int_A \mathbf{R}\times\rho_z\,\mathrm{d}A=\int_A \mathbf{R}_o(s)\times\tau_z\,b(s)\,\mathrm{d}s=\oint_{\mathcal{L}_k}\mathbf{R}_o(s)\times\mathbf{e}_\eta(s)\underbrace{\tau_{\eta z}(s)b(s)}_{Q}\,\mathrm{d}s=$$

$$=Q\int_{A_o}2\mathrm{d}A_o\mathbf{e}_z=\boxed{2\tau_{\eta z}(s)b(s)A_o}\,\mathbf{e}_z\,,$$

ahol az A_o a keresztmetszet középvonala által határolt terület. Az utóbbi képlet bekeretezett részeinek egyenlősége alapján

$$\boxed{\tau_{\eta z}(s)=\frac{M_c}{2b(s)A_o}}\tag{4.68}$$

a nyírófeszültség értéke. Vegyük észre, hogy a vékonyfalú cső csavarási feladata kapcsán levezetett $(4.13)_1$ összefüggés a fenti képlet speciális esete. Valóban elemi lépésekkel, a $(4.13)_2$ képlet helyettesítésével azt kapjuk a $(4.13)_1$ összefüggésből, hogy

$$\tau_{\varphi z}=\frac{M_c}{R_oA_k}=\frac{M_c}{R_o2\pi bR_o}=\frac{M_c}{2b\underbrace{R_o^2\pi}_{A_o}}=\frac{M_c}{2bA_o}=\tau_{\eta z}\,.$$

Legyen l a vizsgálat tárgyát képező cső hossza. Jelölje továbbá Φ_l a cső végkeresztmetszetének a cső kezdeti keresztmetszetéhez viszonyított elfordulását az M_c csavarónyomaték hatására.

Tekintettel a (4.32) és (4.68) összefüggésekre

$$u=\frac{1}{2}\frac{\tau_{\eta z}^2}{G}=\frac{1}{2}\frac{M_c^2}{4Gb^2(s)A_o^2}\tag{4.69}$$

a fajlagos alakváltozási energia értéke. A csőben felhalmozódó teljes alakváltozási energia a fajlagos alakváltozási energia integrálja a cső térfogatán:

$$U=\int_V u\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_V\frac{M_c^2}{4Gb^2(s)A_o^2}\underbrace{\mathrm{d}V}_{\mathrm{d}A\mathrm{d}z}=\frac{1}{2}\frac{M_c^2}{4GA_o^2}\int_A\frac{1}{b^2(s)}\underbrace{\mathrm{d}A}_{b(s)\mathrm{d}s}\underbrace{\int_l \mathrm{d}z}_{l}=\frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{G\boxed{\dfrac{4A_o^2}{\oint_{\mathcal{L}_k}\frac{ds}{b(s)}}}}$$

Az

$$\boxed{I_c=\frac{4A_o^2}{\displaystyle\oint_{\mathcal{L}_k}\frac{ds}{b(s)}}}\tag{4.70}$$

jelölés bevezetésével ugyanolyan alakban írható fel a teljes alakváltozási energia mint a kör-, és körgyűrűkeresztmetszetű rúd esetén:

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{I_c G}} \tag{4.71}$$

A képletben álló I_c az I_p poláris másodrendű nyomaték analogonja a vékonyfalú, zárt szelvényű cső szabad csavarási feladata esetén. Az M_c csavarónyomaték által végzett munka most is a (4.28) képletből számítható. A (4.28) és (4.71) felhasználásával írható

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_c^2}{I_c G} = \frac{1}{2}M_c \varPhi_l = W_K$$

egyenletből rendre

$$\boxed{\varPhi_l = \frac{M_c l}{I_c G} \qquad \text{és} \qquad \vartheta = \frac{\varPhi_l}{l} = \frac{M_c}{I_c G}} \tag{4.72}$$

a végkeresztmetszetek egymáshoz viszonyított relatív szögelfordulása és a fajlagos elcsavarodási szög. A (4.68) és (4.70) összefüggéseket *Bredt* féle képleteknek nevezi a szakirodalom.

4.6. Mintafeladatok

4.1. A vékonyfalú rúd csavarási feladatával kapcsolatos (4.8) képlet szerint állandó az alakváltozási tenzor mátrixa HKR-ben. Következik-e a mátrix állandó voltából a tenzor állandósága is?

A válasz nem, hiszen az alakváltozási tenzor

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}_R \circ \mathbf{e}_R + \boldsymbol{\alpha}_\varphi \circ \mathbf{e}_\varphi + \boldsymbol{\alpha}_z \circ \mathbf{e}_z = \frac{1}{2}\chi \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{2}\chi \mathbf{e}_\varphi \circ \mathbf{e}_z$$

diádikus előállításában $\mathbf{e}_\varphi$ a φ polárszögtől függ, azaz nem állandó.

4.2. Határozza meg számítással a vékonyfalú csőben ébredő feszültségi állapot főirányait!

A $(4.15)_1$ és (4.30) képletek szerint

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \underline{\boldsymbol{\rho}}_R & \underline{\boldsymbol{\rho}}_\varphi & \underline{\boldsymbol{\rho}}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_R & \tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ \tau_{\varphi R} & \sigma_\varphi & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix}; \qquad \tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = \frac{M_c}{I_p} R_o$$

a feszültségi tenzor mátrixa a vékonyfalú cső esetén alkalmazott $R\varphi z$ HKR-ben. A továbbiakban követhetők az 1.4. Mintafeladat lépései feltéve, hogy a $\underline{\mathbf{W}}$ helyére $\underline{\mathbf{T}}$-t, a λ helyére pedig σ_n-t gondolunk. Megjegyezzük, hogy az R irány nyilvánvalóan főirány, hiszen $\tau_{\varphi R} = \tau_{zR} = 0$. A (2.59) alapján írható

$$P_3(\lambda) = -\det(\underline{\mathbf{T}} - \sigma_n \underline{\mathbf{E}}) = -\begin{vmatrix} -\sigma_n & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_n & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & -\sigma_n \end{vmatrix} = \sigma_n(\sigma_n - \tau_{\varphi z})(\sigma_n + \tau_{\varphi z}) = 0$$

egyenletből

$$\sigma_1 = \tau_{\varphi z}, \qquad \sigma_2 = \sigma_R = 0 \qquad \text{és} \qquad \sigma_3 = -\tau_{\varphi z}$$

a három nagyság szerint rendezett főfeszültség, ha $M_c > 0$. Az $\mathbf{n}_1 = n_{R1}\mathbf{e}_R + n_{\varphi 1}\mathbf{e}_\varphi + n_{z1}\mathbf{e}_z$ meghatározásához az

$$\begin{bmatrix} -\sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_1 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{\varphi z} & -\sigma_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{R1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tau_{\varphi z} & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_{\varphi z} & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{\varphi z} & -\tau_{\varphi z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{R1} \\ n_{\varphi 1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

vagy ami ugyanaz az

$$\tau_{\varphi z} n_{R1} = 0\,, \qquad \tau_{\varphi z}(n_{z1} - n_{\varphi 1}) = 0 \qquad \text{és} \qquad \tau_{\varphi z}(n_{\varphi 1} - n_{z1}) = 0$$

egyenletrendszert kell megoldani. Mivel $\tau_{\varphi z} \neq 0$ és a második két egyenlet nem független egy az $|\mathbf{n}_1| = 1$ normálási feltételnek is eleget tevő megoldás az

$$n_{R1} = 0\,, \quad n_{\varphi 1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad n_{z1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,, \quad \text{azaz az} \quad \mathbf{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z)$$

alakban írható fel. Megjegyezzük, hogy az $n_{R1} = 0$ eredmény azonnal következik abból is, hogy az R irány a 2 jelű főirány, és így

$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_R\,,$$

következésképp a másik két főirányt adó $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_3$ egységvektoroknak nem lehet R irányú összetevője. A 3 jelű főirányt az

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z\right) \times \mathbf{e}_R = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_z\right)$$

egységvektor adja. Ezek az eredmények megegyeznek a 4.1.5. szakasz – a részleteket illetően lásd a 4.13. ábrát – második feladatával kapcsolatos eredményekkel.

Ha $M_c < 0$, akkor

$$\sigma_1 = -\tau_{\varphi z}, \qquad \sigma_2 = \sigma_R = 0 \qquad \text{és} \qquad \sigma_3 = \tau_{\varphi z}\,,$$

a főfeszültségek, továbbá

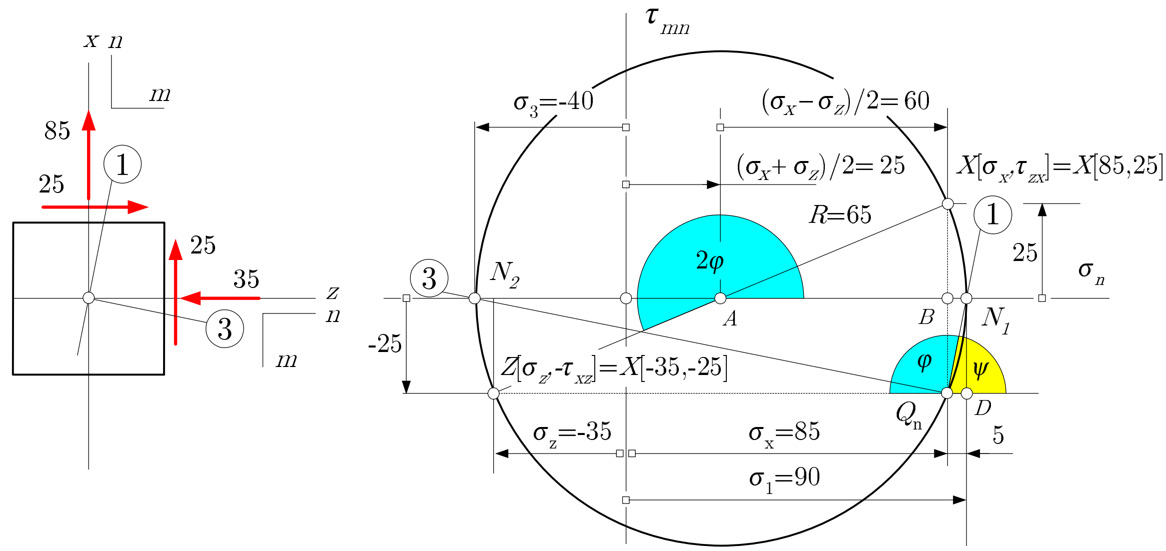
$$\mathbf{n}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{e}_\varphi - \mathbf{e}_z\right), \qquad mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_R \qquad \text{és} \qquad \mathbf{n}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z\right)\;.$$

a főirányokat adó egységvektorok.

4.3. Adott a feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR-ben:

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 85 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 \\ 25 & 0 & -35 \end{bmatrix} \left[\mathrm{N/mm^2}\right]$$

Határozza meg a részleges Mohr féle kördiagram segítségével a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzorhoz tartozó főfeszültségeket és főirányokat.



4.24. ábra.

Vegyük észre, hogy az y irány főirány, a $\sigma_y = -10$ feszültség pedig főfeszültség. Szószerint követhetők tehát a megoldás 4.1.4. pontban ismertetett lépései. Magát a megoldást csak vázlatosan mutatjuk be, mivel a 4.24. ábra önmagáért beszél.

A pqr KR-nek most a zxy KR felel meg. Leolvasható a feszültségállapotot szemléltető elemi kocka y tengely felől vett nézeti képéről, hogy a körátmérőt a $Z[\sigma_n, \tau_{mn}] = Z[\sigma_z, -\tau_{xz}] = Z[-35, -25]$ és $X[\sigma_n, \tau_{mn}] = X[\sigma_x, \tau_{zx}] = X[85{,}25]$ pontok határozzák meg. A ZX szakasz és a vízszintes tengely metszése a kör közepét adja: $\sigma_A = 25\ \mathrm{N/mm^2}$. Ennek ismeretében az ABX derékszögű háromszögre felírt Pythagoras tételből $R = 65\ \mathrm{N/mm^2}$ a kör sugara, amivel $\sigma_1 = 90\ \mathrm{N/mm^2}$ és $\sigma_3 = -40\ \mathrm{N/mm^2}$ a hiányzó főfeszültségek. ($\sigma_2 = \sigma_y = -10$; $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

Az ábra feltünteti a Q_n pontot, valamint az 1 jelű főtengely és a z tengely szögét – az 1 jelű főtengelytől óramutató járásával ellentétesen haladunk a z tengelyig.

Az is leolvasható az ábráról, hogy az 1 jelű főiránynak

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1 = \sin\psi\,\mathbf{e}_x + \cos\psi\,\mathbf{e}_z$$

az egységvektora, ahol a Q_nDN_1 derékszögű háromszög adataival

$$\mathrm{tg}\psi = 5\,, \qquad \cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}} = \frac{1}{\sqrt{26}} \qquad \text{és} \qquad \sin\psi = \frac{\mathrm{tg}\psi}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\psi}} = \frac{5}{\sqrt{26}}\,.$$

Következőleg

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\,(5\,\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_z)\ , \qquad \mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_y \qquad \text{és} \qquad \mathbf{n}_3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}}\,(-\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_z)$$

a főtengelyek KR-ének egységvektorai.

4.4. Igazolja a fajlagos alakváltozási energia rúd térfogatán vett integrálásával a csavart kör-, illetve körgyűrű keresztmetszetű rúd alakváltozási energiájával kapcsolatos (4.51) képlet helyességét.

Tiszta nyírás esetén a (4.32) képlet adja az alakváltozási energiasűrűség értékét. A (4.16) Hooke törvény, valamint a nyírófeszültséget a csavarónyomaték függvényében adó (4.45) összefüggések helyettesítésével

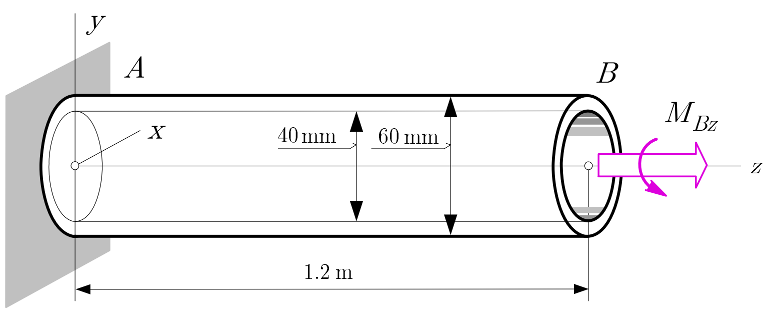
$$u = \frac{1}{2}\tau_{\varphi z}\gamma_{\varphi z} = \frac{1}{2G}\tau_{\varphi z}^2 = \frac{1}{2G}\frac{M_c^2}{I_p^2}R^2$$

a fajlagos alakváltozási energia. A teljes alakváltozási energiát adó integrál átalakítását az alábbiak részletezik:

$$U = \int_V u\,\mathrm{d}V = \int \frac{1}{2G}\frac{M_c^2}{I_p^2}R^2\underbrace{\mathrm{d}V}_{\mathrm{d}A\,\mathrm{d}z} = \frac{1}{2G}\frac{M_c^2}{I_p^2}\underbrace{\int_A R^2\mathrm{d}A}_{I_p}\underbrace{\int_l \mathrm{d}z}_{l} = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{I_p G}\ .$$

Az átalakítások során figyelembe vettük, hogy a G, az M_c és az I_p mindegyike állandó. A kapott eredmény valóban megegyezik a (4.51) képlettel.

4.5. Az ábrán vázolt baloldalon befogott 1.2 m hosszú körgyűrűkeresztmetszetű rúdnak $d = 40\,\mathrm{mm}$ a belső és $D = 60\,\mathrm{mm}$ a külső átmérője. (a) Mekkora lehet a rudat csavarásra terhelő M_{Bz} nyomaték maximuma, ha a nyírófeszültség nem haladhatja meg a $|\tau_{\varphi z}|_{\max} = 72\,\mathrm{MPa}$ értéket? (b) Mekkora a nyírófeszültség minimuma, ha az előző érték annak maximuma? (c) Mekkora a véglap szögelfordulása, ha a rúd lágyacélból készült, amelyre $G = 80\,\mathrm{GPa}$?



4.25. ábra.

(a) Visszaidézve a (4.45) és (4.49) képleteket írhatjuk, hogy

$$M_c = \frac{2I_p\,|\tau_{\varphi z}|_{\max}}{D}\ , \tag{4.73}$$

ahol

$$I_p = \frac{(D^4 - d^4)\pi}{32} = \frac{(60^4 - 40^4)\pi}{32} = 1.021 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4\ .$$

Az utóbbi érték, valamint $|\tau_{\varphi z}|_{\max}$ (4.73) képletbe történő helyettesítésével

$$M_c = \frac{2I_p\,|\tau_{\varphi z}|_{\max}}{D} = \frac{2 \times 1.021 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4 \times 72\,\mathrm{N/mm}^2}{60\,\mathrm{mm}} = 2.4504 \times 10^6\,\mathrm{Nmm}\ .$$

(b) A $\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültség az $R = d/2$ sugárnál, ez a belső palást sugara, minimális. Mivel a nyírófeszültség homogén lineáris függvénye a sugárnak kapjuk, hogy

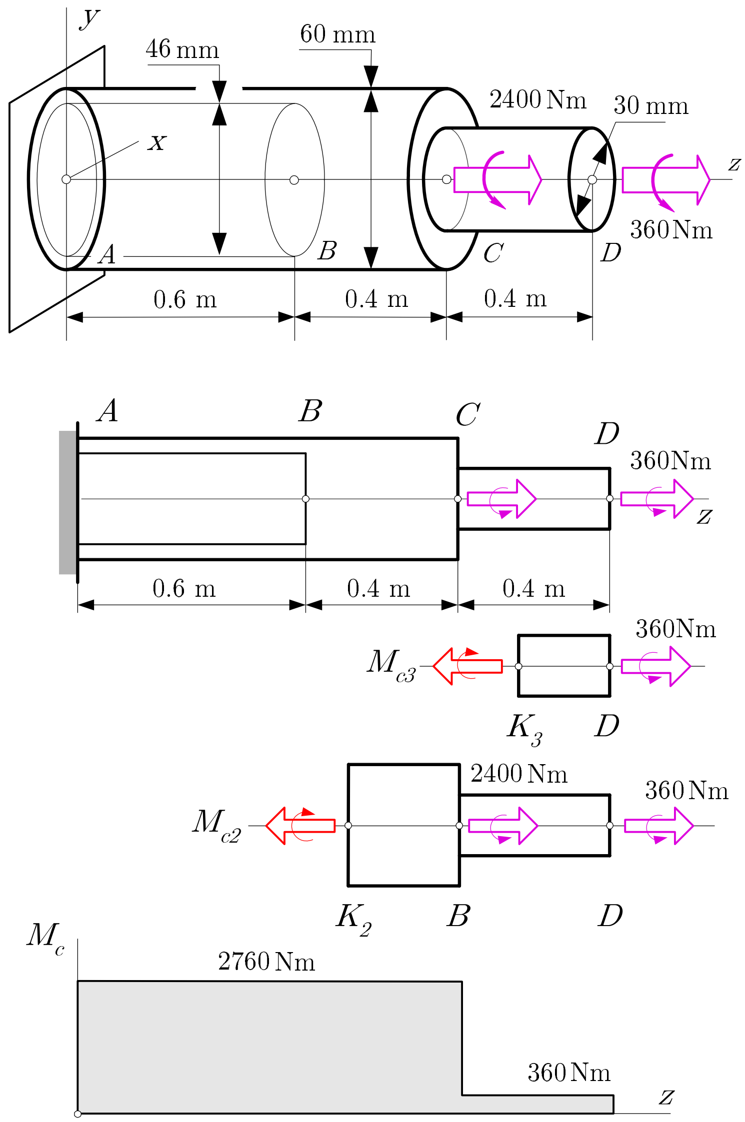
$$|\tau_{\varphi z}|_{\min} = \frac{d}{D}\,|\tau_{\varphi z}|_{\max} = \frac{40\,\mathrm{mm}}{60\,\mathrm{mm}} \times 72\,\mathrm{N/mm}^2 = 48\,\mathrm{N/mm}^2\ .$$

(c) A véglap szögelfordulása a (4.50) képletbe történő helyettesítéssel adódik:

$$\Phi_l = \frac{M_c l}{I_p G} = \frac{2.4504 \times 10^6\,\mathrm{Nmm} \times 1.2 \times 10^3\,\mathrm{mm}}{1.021 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4 \times 80 \times 10^3\,\mathrm{N/mm}^2} = 0.036\ \text{radián}\ .$$

Ezzel megoldottuk a feladatot.

4.6. A 4.26. ábrán vázolt és baloldali végén befogott tengely acélból készült ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{GPa}$). A tengely befogott végébe 46 mm átmérőjű lyukat fúrtak. A lyuknak 0.6 m a mélysége. Határozza meg a D keresztmetszet szögfelfordulását, ha a tengelyt az ábrán feltüntetett csavarónyomatékok terhelik. Feltételezzük, hogy minden egyes tengelyszakasz tiszta csavarásra van igénybevéve.



4.26. ábra.

Az AB, BC és CD keresztmetszetpárok közötti szakaszok rendre az 1, 2 és 3 jelű szakaszok. Ezek mindegyike állandó keresztmetszetű, és amint az lentebb kiderül ezeken a szakaszokon belül állandó a csavarónyomaték (csavaróigénybevétel) értéke.

A 4.26. ábra az axonometrikus ábrarészlet után rendre szemlélteti a tengely elölnézeti képét, a K_3D és K_2D tengelyszakaszokat valamint a rájuk ható külső és belső erőket (csavarónyomatékokat). Mivel nincs külső terhelés az AC szakaszon belül, azonnal következik a K_3D és K_2D tengelyszakaszok egyensúlyából, hogy

$$M_{c1} = M_{c2} = 2760\,\text{NM}$$

és

$$M_{c3} = 360\,\text{NM}\,.$$

A kapott értékekkel megrajzolt $M_c(z)$ függvény (a csavarónyomatéki ábra) a teljes ábra legalján látható.

A továbbiakban szükség lesz az 1, 2 és 3 jelű szakaszok keresztmetszeteinek poláris másodrendű nyomatékaira. A (4.48), (4.49) képletek és az ábra adatainak felhasználásával kapjuk, hogy

$$I_{p1} = \frac{\left(D_1^4 - d_1^4\right)\pi}{32} = \\ = \frac{\left((60\,\text{mm})^4 - (46\,\text{mm})^4\right)\pi}{32} = \\ = 8.328 \times 10^5\,\text{mm}^4\,,$$

$$I_{p2} = \frac{d_2^4\pi}{32} = \frac{(60\,\text{mm})^4\pi}{32} = \\ 1.272 \times 10^6\,\text{mm}^4\,,$$

és hogy

$$I_{p3} = \frac{d_3^4\pi}{32} = \frac{(30\,\text{mm})^4\pi}{32} = 79522\,\text{mm}^4\,.$$

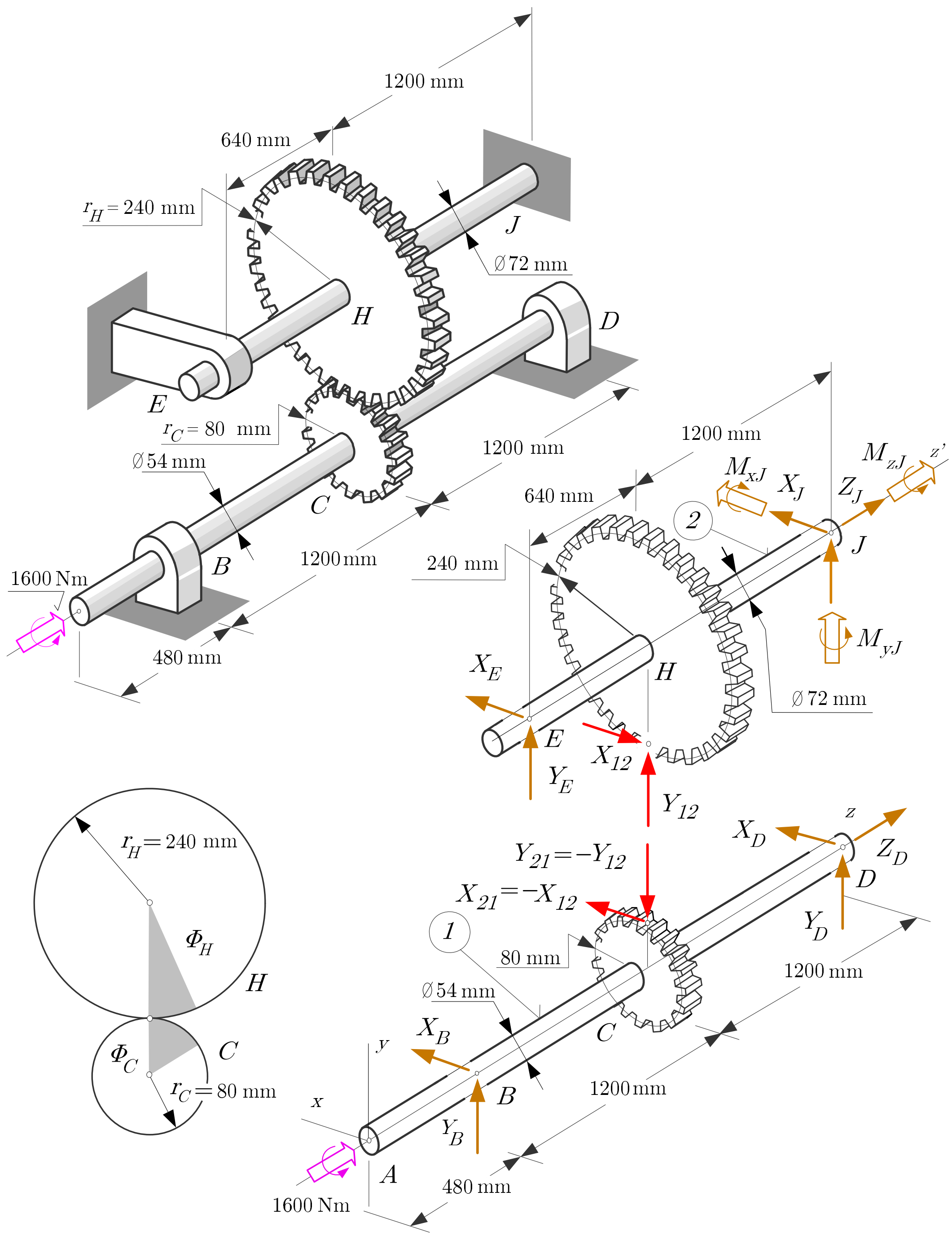
A tengely véglapjának szögelfordulását az AB, BC és CD tengelyszakaszok B, C és D keresztmetszeteinek a kezdő A, B és C keresztmetszetekhez viszonyított szögelfordulásainak összege adja. A (4.57) képlet felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\varPhi_{DA} = \varPhi_l = \varPhi_1 + \varPhi_2 + \varPhi_3 = \sum_{i=1}^{3} \frac{M_{ci} l_i}{I_{pi} G_i} =$$

$$= \frac{2760 \times 10^3\text{Nmm}\ 600\,\text{mm}}{8.328 \times 10^5\,\text{mm}^4\ 80 \times 10^3\text{N/mm}^2} + \frac{2760 \times 10^3\text{Nmm}\ 400\,\text{mm}}{1.272 \times 10^6\,\text{mm}^4\ 80 \times 10^3\text{N/mm}^2} +$$

$$+ \frac{360 \times 10^3\text{Nmm}\ 400\,\text{mm}}{79522\,\text{mm}^4\ 80 \times 10^3\text{N/mm}^2} = 2.486 \times 10^{-2} + 1.085 \times 10^{-2} + 2.264 \times 10 \times 10^{-2} = 0.05835\,.$$

4.7. A 4.27. ábra két merevnek tekintett fogaskerekek révén egymáshoz kapcsolódó acéltengelyt ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{GPa}$) szemléltet. Határozza meg (a) az A keresztmetszet szögelfordulását a rúd hossztengelye körül, valamint (b) a maximális nyírófeszültséget a tengelyekben feltéve, hogy csak a csavarás hatását vesszük figyelembe.



4.27. ábra.

Az ábra külön-külön is feltünteti a két tengelyt, valamint a rájuk ható külső és belső erőket, továbbá a C és H fogaskerekek középköreit. A támasztóerők és támasztónyomatékok megrajzolása során azt tételeztük fel, hogy a B, E támaszok görgős támaszként viselkednek (nem gátolják az elfordulást és a z irányú mozgást), a D támasz csuklóként viselkedik (meggátolja a D pont elmozdulását, de ugyanott a forgást nem), mig a J támasz befogás, amely minden mozgást meggátol. Mivel a kitűzött feladat megoldása szemszögéből csak az $X_{21} = -X_{12}$ belső erőknek lesz szerepe a többi ismeretlen támasztóerő és támasztónyomaték meghatározásával ehelyütt nem foglalkozunk.

Az 1 jelű rúd tengelyére számított nyomatékok egyensúlyát az

$$m_z = 1600\,\mathrm{Nm} - 80\,\mathrm{mm}\,X_{21} = 0$$

egyenlet fejezi ki, ahonnan

$$X_{21} = 20\,\mathrm{kN}\,.$$

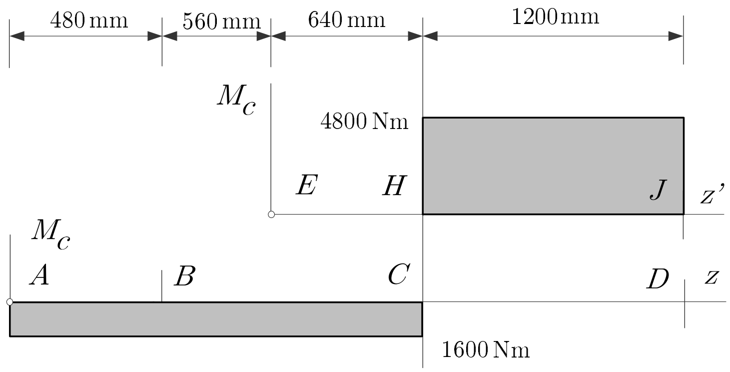
Mivel $X_{12} = -X_{21} = -20\,\mathrm{kN}$ a 2 jelű rúd tengelyére számított nyomatékok egyensúlyából

$$m_{z'} = M_{zJ} - 240\,\mathrm{mm}\,20\,\mathrm{kN} = 0\,,$$

vagyis

$$M_{zJ} = 4800\,\mathrm{Nm}\,.$$

A kapott eredmények szerint, ez leolvasható a 4.28. csavarónyomatéki ábrákról is, az 1 jelű rúd AC szakaszán $M_{c1} = -1600\,\mathrm{Nm}$, a 2 jelű rúd HJ szakaszán pedig $M_{c2} = 4800\,\mathrm{Nm}$ a csavarónyomaték értéke.



4.28. ábra.

A továbbiakban szükség lesz az egyes tengelyek poláris másodrendű nyomatékaira. A (4.48) alatti képlet felhasználásával

$$I_{p1} = \frac{D_1^4\pi}{32} = \frac{(54\,\mathrm{mm})^4\pi}{32} = 8.3479\times10^5\mathrm{mm}^4\,, \qquad I_{p2} = \frac{D_2^4\pi}{32} = \frac{(72\,\mathrm{mm})^4\pi}{32} = 2.6383\times10^6\mathrm{mm}^4\,.$$

Tekintettel a (4.50) összefüggésre a H jelű fogaskerék ϕ_H szögelfordulásának, vagy ami ugyanaz a 2 jelű rúd H keresztmetszete J keresztmetszethez viszonyított szögelfordulásának

$$\Phi_H = \Phi_{HJ} = -\Phi_{JH} = -\frac{M_{c2}\,l_{HJ}}{I_{p2}G} = -\frac{4800\,\mathrm{Nm}\times1200\,\mathrm{mm}}{2.6383\times10^6\,\mathrm{mm}^4\times80\times10^3\mathrm{N/mm}^2} =$$
$$= -2.729\times10^{-2}\,\mathrm{rad} = -1.564^o$$

az értéke. Mivel a két fogaskerék középkörén azonos ívek tartoznak a fogaskerekek szögelfordulásaihoz fennáll a

$$\Phi_H\,r_H = -\Phi_C\,r_C\,, \qquad \text{azaz a} \qquad \Phi_C = -\Phi_H\,\frac{r_H}{r_C} = -3\,\Phi_H$$

egyenlet. Az A keresztmetszet C keresztmetszethez viszonyított szögelfordulását ugyanúgy számítjuk, mint a H jelű fogaskerék szögelfordulását:

$$\Phi_{AC} = -\Phi_{CA} = -\frac{M_{c1}\,l_{AC}}{I_{p1}G} = -\frac{-1600\,\mathrm{Nm}\times1680\,\mathrm{mm}}{8.3479\times10^5\,\mathrm{mm}^4\times80\times10^3\mathrm{N/mm}^2} = 4.025\times10^{-2}\,\mathrm{rad} = 2.306^{\,o}$$

Az A keresztmetszet teljes szögelfordulását a

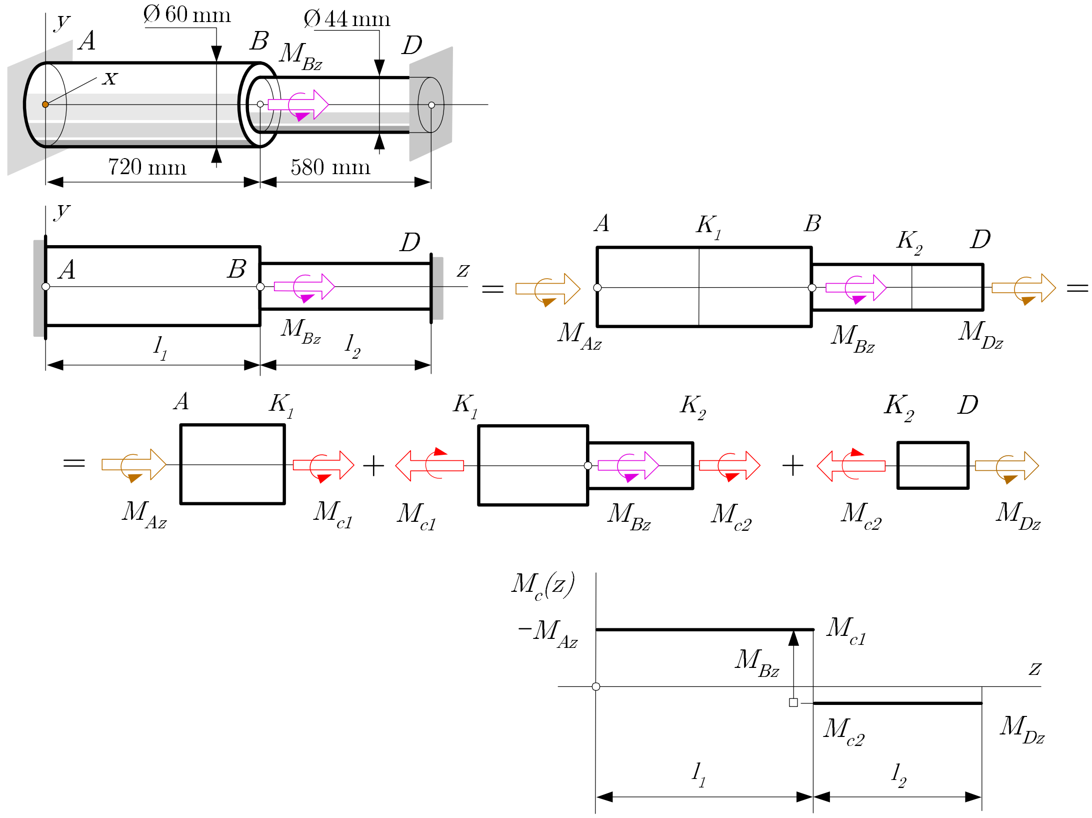
$$\Phi_A = \Phi_{AC} + \Phi_C = \Phi_{AC} - 3\,\Phi_H = 2.306^{\,o} + 3\times1.564^o = 6.998^o$$

összeg adja.

Felhasználva a (4.46) összefüggést az alábbiak szerint számíthatjuk a maximális nyírófeszültséget az 1 és 2 jelű rudakban:

$$\tau_{\max1} = \frac{|M_{c1}|}{I_{p1}}\frac{D_1}{2} = \frac{1600\,\mathrm{Nm}}{8.3479\times10^5\,\mathrm{mm}^4}\times27\,\mathrm{mm} = 51.7\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$
$$\tau_{\max2} = \frac{|M_{c2}|}{I_{p2}}\frac{D_2}{2} = \frac{4800\,\mathrm{Nm}}{2.6383\times10^6\,\mathrm{mm}^4}\times36\,\mathrm{mm} = 65.5\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}^2}$$

4.8. A 4.29. ábrán vázolt tengely 1 jelű AB szakasza acélból ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{MPa}$), 2 jelű BD szakasza peidg bronzból ($G_{\text{bronz}} = 40\,\text{MPa}$) készült. A tengelyt az $M_{Bz} = 1200\,\text{Nm}$ nyomaték terheli. Határozza meg a csavarásból adódó nyírófeszültség maximumát mind az (a) AB, mind pedig a (b) BD szakaszon belül, ha nem vesszük figyelembe a keresztmetszetváltozás hatását a feszültségképre.



4.29. ábra.

Az rúd axonometrikus képe alatti ábrarészlet – pozitívnak véve az ismeretlen mennyiségeket – feltünteti

– a rúd elölnézeti képét,
– a támaszairól levett rudat annak M_{Bz} terhelésével, valamint a rúdon működő egyelőre ismeretlen M_{Az}, M_{Dz} támasztónyomatékokat,
– a rúd AK_1, K_1K_2 és K_2D jelű részeit – K_1 és K_2 az AB, illetve BD szakaszokon belül található rúdkeresztmetszetek –, továbbá a rajtuk ható külső és belső erőket, és végül
– az $M_c(z)$ csavarónyomatéki ábra vázlatát.

Érdemes ehelyütt felhívni a figyelmet arra a körülményre, hogy az előjelek tekintetében a végeredmény figyelembevételével jelleghelyesen rajzoltuk meg a csavarónyomatéki ábrát. Ez a körülmény azonban nem játszik szerepet a számításokban.

Mivel a rúd egyensúlyban van fenn kell állnia a

$$M_{Az} + M_{Bz} + M_{Cz} = 0$$

az egyensúlyi egyenletnek. Az A és D keresztmetszet befogott volta miatt pedig zérus az egymáshoz viszonyított szögelfordulásuk. Írhatjuk tehát a (4.57) képlet alapján, valamint az AK_1, K_2D rúdszalkaszok egyensúlyából következő $M_{c1} = -M_{Az}$, $M_{c2} = -M_{Dz}$ képletek figyelembevételével, hogy

$$\Phi_{AD} = \frac{M_{c1}\, l_1}{I_{p1}\, G_1} + \frac{M_{c2}\, l_2}{I_{p2}\, G_2} = -\frac{M_{Az}\, l_1}{I_{p1}\, G_1} + \frac{M_{Dz}\, l_2}{I_{p2}\, G_2} = 0\,.$$

Az utóbbi két egyenletből egyszerű számításokkal kapjuk a

$$M_{Az} = -\frac{I_{p1}\, G_1\, l_2}{I_{p1}\, G_1\, l_2 + I_{p2}\, G_2\, l_1}\, M_{Bz} \quad \text{és} \quad M_{Dz} = -\frac{I_{p2}\, G_2\, l_1}{I_{p1}\, G_1\, l_2 + I_{p2}\, G_2\, l_1}\, M_{Bz}$$

eredményeket. Vegyük észre, hogy állandó keresztmetszetű homgén rúdra a fenti képletek a (4.65) alatti megoldásokra egyszerűsödnek.

Az $M_{c1} = -M_{Az}$ és $M_{c2} = M_{Bz}$ nyomatékok számításához szükség van az 1 és 2 jelű rúdszakaszok keresztmetszeteinek másodrendű nyomatékaira. A (4.48) képlet alapján kapjuk, hogy

$$I_{p1} = \frac{D_1^4 \pi}{32} = \frac{(60\,\mathrm{mm})^4 \pi}{32} = 1.272\,3 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4 \qquad \text{és} \qquad I_{p2} = \frac{D_2^4 \pi}{32} = \frac{(44\mathrm{mm})^4 \pi}{32} = 3.679\,7 \times 10^5\,\mathrm{mm}^4 .$$

A másodrendű nyomatékokkal, valamint a feladat többi adataival

$$I_{p1}\,G_1\,l_2 = 1.272\,3 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4 \times 8 \times 10^4\,\mathrm{MPa} \times 580\,\mathrm{mm} = 5.903\,5 \times 10^{13}\mathrm{Nmm}^3 ,$$
$$I_{p2}\,G_2\,l_1 = 3.679\,7 \times 10^5\,\mathrm{mm}^4 \times 4 \times 10^4\,\mathrm{MPa} \times 720\,\mathrm{mm} = 1.059\,8 \times 10^{13}\mathrm{Nmm}^3 ,$$
$$I_{p1}\,G_1\,l_2 + I_{p2}\,G_2\,l_1 = 5.903\,5 \times 10^{13} + 1.059\,8 \times 10^{13}\,\mathrm{Nmm}^3 = 6.963\,3 \times 10^{13}\mathrm{Nmm}^3 ,$$

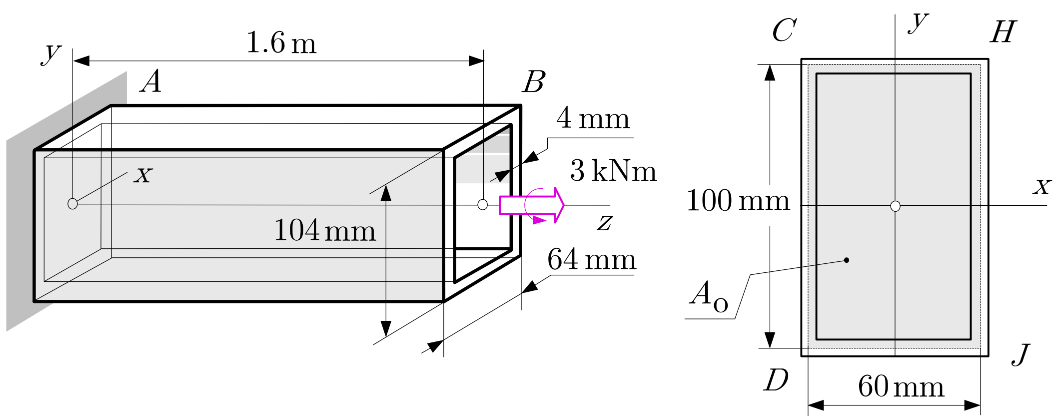
azaz

$$M_{Az} = -M_{c1} = -\frac{I_{p1}\,G_1\,l_2}{I_{p1}\,G_1\,l_2 + I_{p2}\,G_2\,l_1}\,M_{Bz} = -\frac{5.9035}{6.9633} \times 1200\,\mathrm{Nm} = -1017.4\,\mathrm{Nm} ,$$
$$M_{Dz} = M_{c2} = -\frac{I_{p2}\,G_2\,l_1}{I_{p1}\,G_1\,l_2 + I_{p2}\,G_2\,l_1}\,M_{Bz} = -\frac{1.0598}{6.9633} \times 1200\,\mathrm{Nm} = -182.6\,\mathrm{Nm} .$$

A támasztónyomatékok birtokában a (4.46) képlet segítségével számíthatjuk a nyírófeszültségek maximumait:

$$\tau_{\max 1} = \frac{|M_{c1}|}{I_{p1}}\frac{D_1}{2} = \frac{1017.4 \times 10^3\mathrm{Nmm}}{1.272\,3 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4} \times 30\,\mathrm{mm} \simeq 24\,\mathrm{MPa} ,$$
$$\tau_{\max 2} = \frac{|M_{c2}|}{I_{p2}}\frac{D_2}{2} = \frac{182.6 \times 10^3\mathrm{Nmm}}{3.679\,7 \times 10^5\,\mathrm{mm}^4} \times 2\,\mathrm{mm} \simeq 11\,\mathrm{MPa} .$$

4.9. A 4.30. ábra vékonyfalú zárt szelvényű húzott acélrudat szemléltet ($G_{\text{acél}} = 80\,\mathrm{GPa}$). A rudat csavarónyomaték terheli. (a) Számítsa ki a négy fal mindegyikében a nyírófeszültséget! (b) Határozza meg az I_c másodrendű nyomaték értékét, majd ennek ismeretében a B keresztmetszet A keresztmetszethez viszonyított Φ_{AB} szögelfordulását, illetve (c) a csavarónyomaték munkáját (a rúdban felhalmozódó alakváltozási energiát)!



4.30. ábra.

Az ábra baloldala külön is feltünteti a rúd keresztmetszetét. Leolvasható erről az ábrarészletről – lásd a szaggatott vonallal határolt és halványszürkén kiemelt téglalapot –, hogy

$$A_o = 6 \times 10^3\,\mathrm{mm}^2$$

a keresztmetszet középvonala által határolt terület. Mivel állandó a rúd falvastagsága következik, hogy ugyanaz a keresztmetszet középvonala mentén, azaz mind a négy oldalfalban, a nyírófeszültség. A (4.68) képlet és az ábra adatai alapján kapjuk, hogy

$$\tau_{\eta z}(s) = \frac{M_c}{2b(s)A_o} = \frac{3\,\mathrm{kNM}}{2 \times 4\,\mathrm{mm} \times 6 \times 10^3\,\mathrm{mm}^2} = 62.5\,\mathrm{MPa}$$

a nyírófeszültség értéke.

Az I_c másodrendű nyomaték, ismét felhasználva az ábra adatait, a (4.70) képlet segítségével számítható:

$$I_c = \frac{4A_o^2}{\displaystyle\oint_{\mathcal{L}_k} \frac{ds}{b(s)}} = \frac{4 \times \left(6 \times 10^3\,\mathrm{mm}^2\right)^2}{\frac{1}{4\,\mathrm{mm}} \times [2 \times 100\,\mathrm{mm} + 2 \times 60\mathrm{mm}]} = 1.8 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4\,.$$

Az I_c birtokában a (4.72) képlet szerint

$$\Phi_{AB} = \frac{M_c l}{I_c G} = \frac{3\,\mathrm{kNM} \times 1.6\,\mathrm{m}}{1.8 \times 10^6\,\mathrm{mm}^4 \times 80 \times 10^3 \mathrm{N/mm}^2} = 3.333 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad}$$

a B keresztmetszet szögelfordulása.

A (4.71) és a (4.72) képletekkel

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_c^2 l}{I_c G} = \frac{1}{2} M_c \Phi_{AB} = \frac{1}{2} \times 3\,\mathrm{kNM} \times 3.333 \times 10^{-2}\,\mathrm{rad} = 50000.0\,\mathrm{Nmm}$$

az M_c csavarónyomaték munkája (a rúdban felhalmozódott alakváltozási energia).

Gyakorlatok

4.1. Adott a feszültségi tenzor mátrixa az xyz KR-ben:

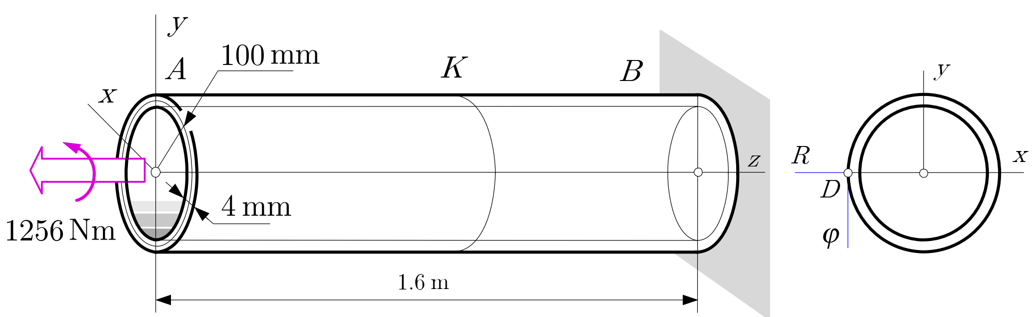
$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 90 & 80 & 0 \\ 80 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left[\mathrm{N/mm}^2\right]$$

Határozza meg a részleges Mohr féle kördiagram segítségével a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzorhoz tartozó főfeszültségeket és főirányokat. (A megoldás során a 4.3. Mintafeladat gondolatmenetét kövesse.)

4.2. Határozza meg az 1.8. Gyakorlatban adott feszültségi tenzor esetén – v.ö.: 22. o. – a részleges Mohr-féle kördiagram segítségével a feszültségi tenzorhoz tartozó főfeszültségeket és főirányokat! (A megoldás során most is a 4.3. Mintafeladat gondolatmenetét kövesse.)

4.3. Írja föl csavart kör- és körgyűrű keresztmetszetű prizmatikus rúd esetén az elmozdulásmezőt, az alakváltozási tenzort és a feszültségi tenzort az xyz kartéziuszi KR-ben – a (4.34) képletből érdemes kiindulni.

4.4. A 4.31. ábrán vázolt vékonyfalú csövet az M_c=1256Nm csavarónyomaték terheli. Az ábra feltünteti a cső egy K kereszt



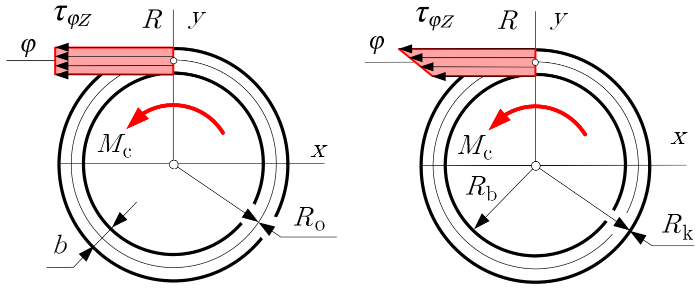
4.31. ábra.

képleteit alkalmazza!] (a) Számítsa ki a K keresztmetszet D pontjában a τ_{yz} feszültség értékét ($\pi \approx \approx 3.14$)! (b) Írja fel a $\boldsymbol{T}_D$ feszültségi tenzor mátrixát az xyz kartéziuszi és az $R\varphi z$ henger KR-ben és szemléltesse a D pont feszültségi állapotát az elemi kockán! (c) Számítsa ki a D pontbeli alakváltozási tenzor mátrixát mindkét KR-ben, ha a cső bronzból készült ($G_{\text{bronz}} = 40$ GPa)! (d) Számítsa ki az A keresztmetszet szögelfordulását a befogott B keresztmetszethez viszonyítva! (e) Mekkora a csőben felhalmozódott alakváltozási energia?

4.5. Oldja meg az előző feladatot vastag falúnak tekintve a csövet. Hány százaléka az előző feladat (a) kérdésének megválaszolása során kapott τ_{yz} feszültség abszolut értéke a pontos megoldásból adódó $\tau_{\max}$-nak?

4.6. Mekkora legyen a 4.31 ábrán vázolt cső belső átmérője változatlan külső átmérő mellett, ha 22.25 kNm a csavarónyomaték értéke és $\tau_{\text{meg}} = 50\,\mathrm{MPa}$?

4.7. A 4.32. ábra körgyűrűkeresztmetszetű rúd esetén szemlélteti a rúd egy keresztmetszetében az M_c csavarónyomaték hatására kialakuló feszültségeloszlást az y tengely mentén $y>0$ esetén, ha a rúd vékonyfalú és a vonatkozó (4.13) közelítő, illetve ha a pontos (4.43) megoldást használjuk.



4.32. ábra.

(a) Mutassa meg felhasználva az ábra adatait, hogy a pontos megoldásból számított $\tau_{\max}$ és a közelítő megoldásból számított $|\tau_{\varphi z}| = \tau$ eleget tesz a

$$\frac{\tau_{\max}}{\tau} = \frac{1 + \dfrac{b}{2R_o}}{1 + \left(\dfrac{b}{2R_o}\right)^2}$$

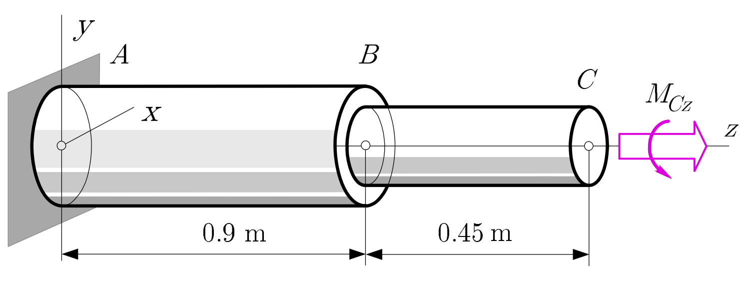
összefüggésnek! (b) Igazolja, kihasználva a fenti összefüggést, hogy a $b/2R_o < 0.112$ reláció fennállása esetén kisebb mint 5% a pontos megoldáshoz viszonyított hiba!

4.8. Jelölje a csavart kőrgyűrűkeresztmetszetű rúd külső átmérőjét R_k, belső átmérőjét pedig R_b. Határozza meg az előző feladatból vett $\tau_{\max}/\tau$ hányados értékét az $R_b/R_k = 1.0$, 0.95, 0.9, 0.85, 0.8, 0.75, és 0.5 viszonyszámokra.

4.9. Mekkora az átmérője a 6.4 m hosszú csavart acélrúdnak, ha a véglapja egy teljes fordulatot végez és a maximális nyírófeszültség nem haladhatja meg a 125.6 MPa értéket ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{MPa}$; $\pi \approx 3.14$).

4.10. Melegvíz kút fúrásakor a fúrófej a 900 m mélységet érte el. Újraindításkor azt figyelték meg, hogy a 200 mm külső átmérőjű acél fúrócső egy teljes fordulatot végez mielőtt a fúrófej újra munkához kezdene. Mekkora a fúrócsőben a csavarásból adódó nyírófeszültség maximuma? ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{MPa}$.)

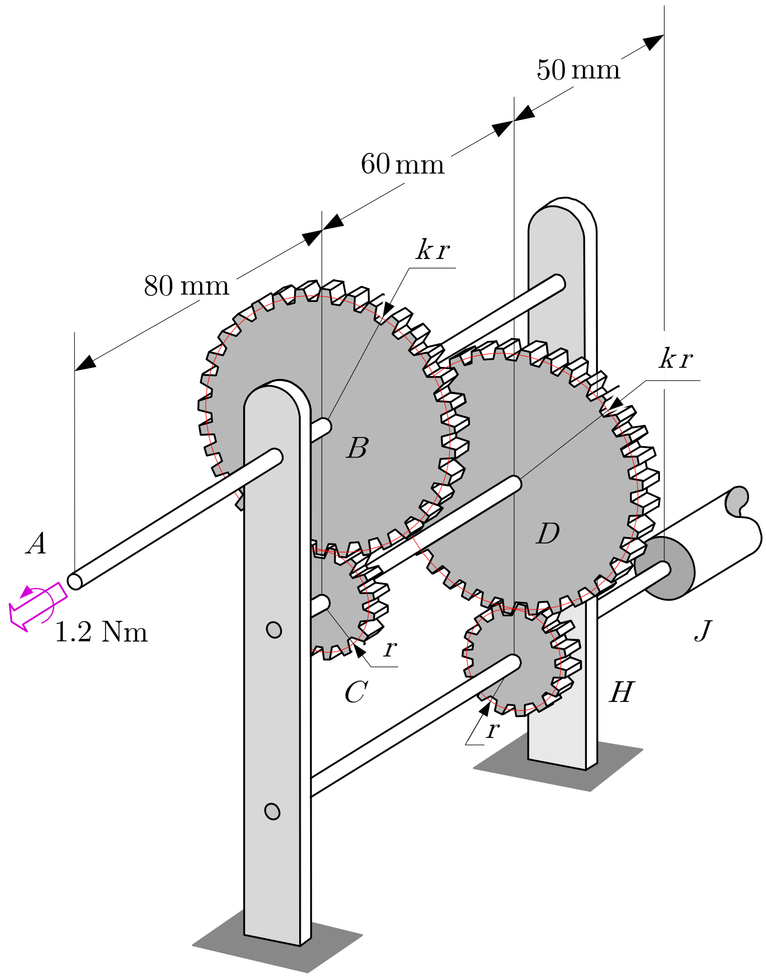
4.11. A 4.33. ábrán vázolt rúd AB szakaszán 36 MPa, BC szakaszán pedig 90 MPa a megengedett nyírófeszültség. Az AB szakasznak 92 mm a BC szakasznak pedig 70 mm az átmérője. Mekkora lehet a rudat terhelő M_{Cz} csavarónyomaték maximuma, ha nem vesszük figyelembe a keresztmetszetváltozás feszültséggyüjtő hatását?



4.33. ábra.

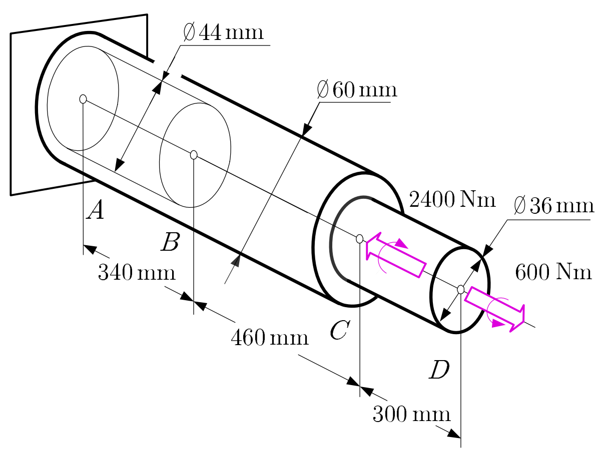
4.12. A 4.33. ábrán vázolt rúd AB szakasza bronzból ($G_{\text{bronz}} = 40\,\text{GPa}$), BC szakasza pedig acélból ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{MPa}$) készült. A megengedett nyírófeszültség értéke ugyanakkora mindkét szakaszon, mint az előző feladatban. A rudat az $M_{Cz} = 6\,\text{kNm}$ csavarónyomaték terheli. Határozza meg (a) az AB és BC szakaszok átmérőit, majd (b) a C keresztmetszet szögelfordulását, és végül (c) a rúdban felhalmozódott alakváltozási energiát.

4.13. Az AB tengely valamely műszer mért jellel arányos elfordulását közvetíti egy fogaskerekekből és tengelyekből álló és alkalmas áttételt biztosító jelátalakító révén, amely négy merevnek tekintett fogaskerékből és 5 mm átmérőjű tengelyekből áll. Két fogaskeréknek r, a másik két fogaskeréknek pedig kr a sugara. Mekkora az A keresztmetszet szögelfordulása, ha a jelfogadó oldal megakad, azaz nem tud elfordulni a J keresztmetszet. ($G = 80$ GPa, $k = 2$.)



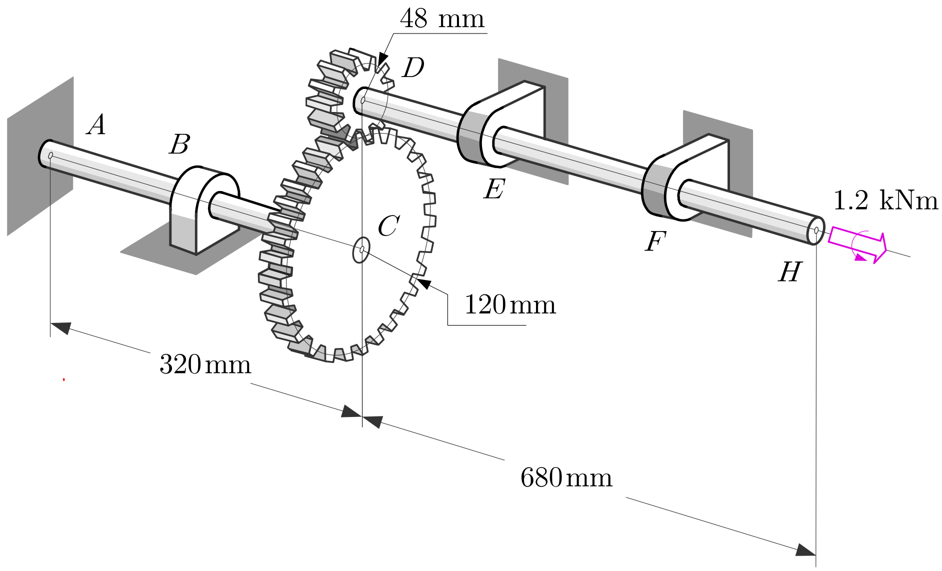
4.34. ábra.

4.14. A 4.35. ábrán vázolt tengelyszerű alkatrész AC szakasza bronzból ($G_{\mathrm{bronz}} = 39$ GPa), CD szakasza pedig alumíniumból készült ($G_{\mathrm{al}} = 26$ GPa). Az AB szakaszban 44 mm átmérőjű furat van. Határozza meg az ábra adataival (a) a maximális nyírófeszültséget, (b) a véglap szögelfordulását és (c) az alakváltozási energiát!



4.35. ábra.

4.15. A 4.36. ábrán vázolt és egymáshoz merevnek vett fogaskerekekkel kapcsolódó két acéltengely ($G_{\text{acél}} = 80\,\text{GPa}$) azonos átmérőjű kell, hogy legyen. További követelmény, hogy a nyírófeszültség maximumának ki kell elégítenie a $\tau_{\max} \leq 64\,\text{MPa}$ relációt és hogy a H keresztmetszet rúd tengelye körüli szögelfordulása nem nagyobb, mint 1.5^o. Határozza meg a tengelyek közös átmérőjét, ha csak a csavarás hatását vesszük figyelembe!

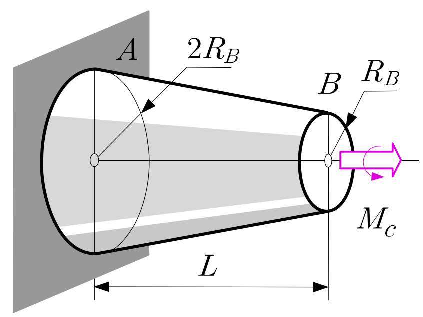


4.36. ábra.

4.16. Mutassa meg, hogy a 4.37. ábrán vázolt kúpos tengely esetén

$$\Phi_{AB} = \frac{7}{12\pi}\frac{M_c\,L}{G\,R_B^4}$$

a B keresztmetszet A keresztmetszethez viszonyított szögelfordulása. (Az igazolás a (4.61) képlet értelemszerű alkalmazásán alapul.)



4.37. ábra.

4.17. A 4.38. ábrán vázolt kúpalakú héj vékony ($b/R_B < 0.1$). Mutassa meg, hogy ez esetben

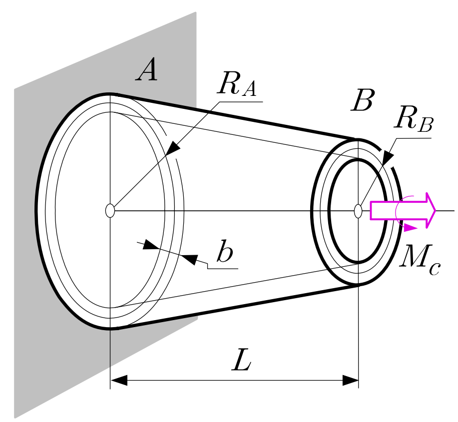
$$\Phi_{AB} = \frac{M_c}{4\pi G}\frac{L}{b}\frac{R_A + R_B}{R_A^2 R_B^2}$$

a B keresztmetszet A keresztmetszethez viszonyított szögelfordulása.

4.18. Igazolja, hogy a 4.38. ábrán vázolt kúpalakú héj esetén

$$\Phi_{AB} = \frac{M_c}{6\pi G}\frac{L}{R_A - R_B}\frac{1}{b^3}\ln\frac{1+\left(\frac{b/2}{R_B}\right)^2}{1+\left(\frac{b/2}{R_A}\right)^2}$$

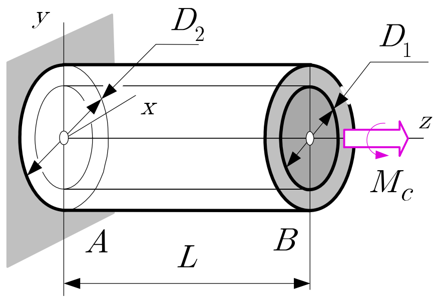
a B keresztmetszet A keresztmetszethez viszonyított szögelfordulása, ha vastag a héj.



4.38. ábra.

4.19. Oldja meg a 4.8. Mintafeladatot, ha a rúd teljes egészében (a) acélból illetve (b) bronzból készült. Mi a változás lényege a befogás helyén ébredő támasztónyomatékok (csavarónyomatékok) tekintetében?

4.20. Tételezze fel, hogy 4.14. Gyakorlatban vizsgált és a 4.35. ábrán vázolt tengelyszerű alkatrész D keresztmetszete is befogott. Mekkora a maximális nyírófeszültség, ha az alkatrészt a D keresztmetszeteben működő és az ábrán is feltüntetett 2400 Nm nyomaték terheli.



4.39. ábra.

4.21. A 4.39. ábra heterogén anyagú tengelyt szemléltet. Ennek, ha $0 \le R < D_1/2$ akkor G_1 és ν_1, ha $D_1/2 < R \le D_2/2$ akkor pedig G_2 és ν_2 az anyagjellemzői. A két különböző anyag közös felületén, azaz a $D_1/2$ sugarú hengeren azonos a φ irányú elmozdulás. Mutassa meg, hogy

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_{c1}}{I_{p1}} R \quad \text{ha} \quad 0 \le R < D_1/2$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{M_{c2}}{I_{p2}} R \quad \text{ha} \quad D_1/2 < R \le D_2/2$$

ahol I_{p1} és I_{p2} rendre a D_1 átmérőjű kör illetve a D_1 belső-, és D_2 külső átmérőjű körgyűrű poláris másodrendű nyomatéka, és

$$\vartheta = \frac{M_c}{I_{p1}G_1 + I_{p2}G_2}$$

a fajlagos szögelfordulás, amellyel

$$M_{ci} = \vartheta G_i I_{pi} = \frac{I_{pi}G_i}{I_{p1}G_1 + I_{p2}G_2} M_c\,, \qquad i = 1{,}2\,.$$

(Abból a körülményből érdemes kiindulni, hogy a heterogén tengely elmozdulásmezeje úgyanúgy számítható mint homogén esetben, azaz érvényesek a (4.34), (4.36) és (4.37) összefüggések.)

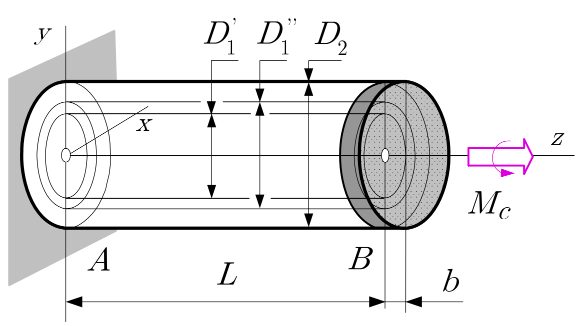
4.22. Mutassa meg, hogy az előző feladatban vizsgált tengely esetén

$$\Phi_{AB} = \frac{M_c\,L}{I_{p1}G_1 + I_{p2}G_2}\,, \qquad U = \frac{1}{2}\,\frac{M_c^2\,L}{I_{p1}G_1 + I_{p2}G_2}$$

a B keresztmetszet A keresztmetszethez viszonyított szögelfordulása és a tengelyben felhalmozódó rugalmas energia.

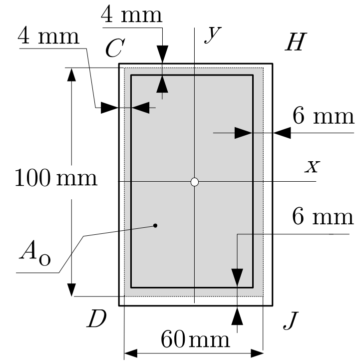
4.23. Általánosítsa a 4.21. és 4.22. Gyakorlatok eredményeit három, vagy több különböző rétegből felépülő tengely esetére.

4.24. A 4.40. ábrán vázolt alkatrész az aluminiumból készült $D_1 = D_1' = 52$ mm átmérőjű tömör tengelyből, valamint a $D_1'' = 60$ mm belső-, illetve $D_2'' = 80$ mm külső átmérőjű bronz csőből áll. Az alkatrész baloldala befogott, jobboldalát pedig egy b vastagságú merev tárcsa zárja le – a tárcsa vastagságának nem lesz szerepe a számításokban –, amely mereven csatlakozik a tengelyhez és a csőhöz (együtt fordul el ezekkel). Az alkatrésznek $L = 800$ mm a hossza, $G_{\mathrm{al}} = G_1 = 26$ GPa, $G_{\mathrm{bronz}} = G_2 = 40$ GPa. Mekkora M_c nyomaték terhelheti az alkatrészt, ha 60 MPa az aluminium és 84 MPa a bronz esetén megengedett nyírófeszültség? Mekkora az így meghatározott nyomaték munkája? (Vegyük észre, hogy értelemszerűen alkalmazhatók a 4.21. és 4.22. Gyakorlatok eredményei a megoldás során.)



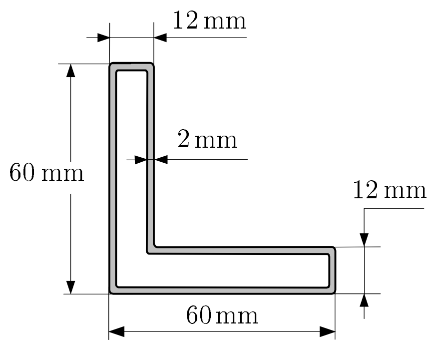
4.40. ábra.

4.25. Válaszolja meg a 4.8. mintafeladat valamennyi kérdését, ha a keresztmetszet CD és CH oldallapjainak 4 mm, a keresztmetszet DJ és HJ jelű oldallapjainak pedig 6 mm a vastagsága – ezt a keresztmetszetet a 4.41. ábra szemlélteti.

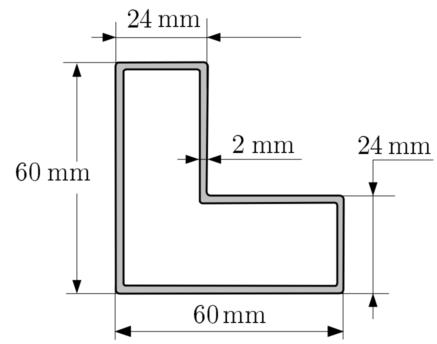


4.41. ábra.

4.26. A 4.42. ábra egy 1.4 m hosszú vékonyfalú aluminium rúd keresztmetszetét mutatja. Mekkora a rúdban ébredő nyírófeszültség, ha 20 Nm csavarónyomaték terheli a rudat. Számítsa ki továbbá (a) a rúd csavarómerevségét, (b) a rúd egyik végének a másikhoz viszonyított szögelfordulását, valamint (c) a rúdban tárolt alakváltozási energiát. ($G_{\text{al}} = 26$ GPa.)

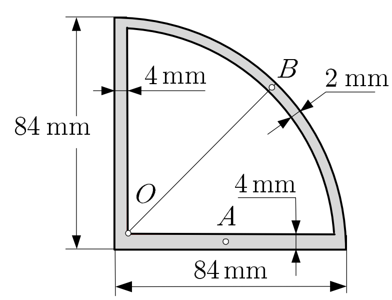


4.42. ábra.



4.43. ábra.

4.27. A 4.43. ábra egy 1.8 m hosszú vékonyfalú acélrúd keresztmetszetét mutatja. Mekkora csavarónyomaték terhelheti a rudat, ha nem haladhartja meg a rúdban ébredő nyírófeszültség a 4 MPa értéket. Számítsa ki (a) a rúd csavarómerevségét, valamint (b) a rúd egyik végének a másikhoz viszonyított szögelfordulását a legnagyobb megengedhető nyomaték esetén. ($G_{\text{acél}} = 80$ GPa.)



4.44. ábra.

4.28. A 4.44. ábra egy 1.8 m hosszú vékonyfalú aluminium rúd keresztmetszetét mutatja. Mekkora a nyírófeszültség, az A és B pontokban, ha 80 Nm csavarónyomaték terheli a rudat. Számítsa ki továbbá (a) a rúd csavarómerevségét, (b) a rúd egyik végének a másikhoz viszonyított szögelfordulását, valamint (c) a rúdban tárolt alakváltozási energiát. ($G_{\text{al}} = 26$ GPa, a köríveknek az O pont a középpontja.)

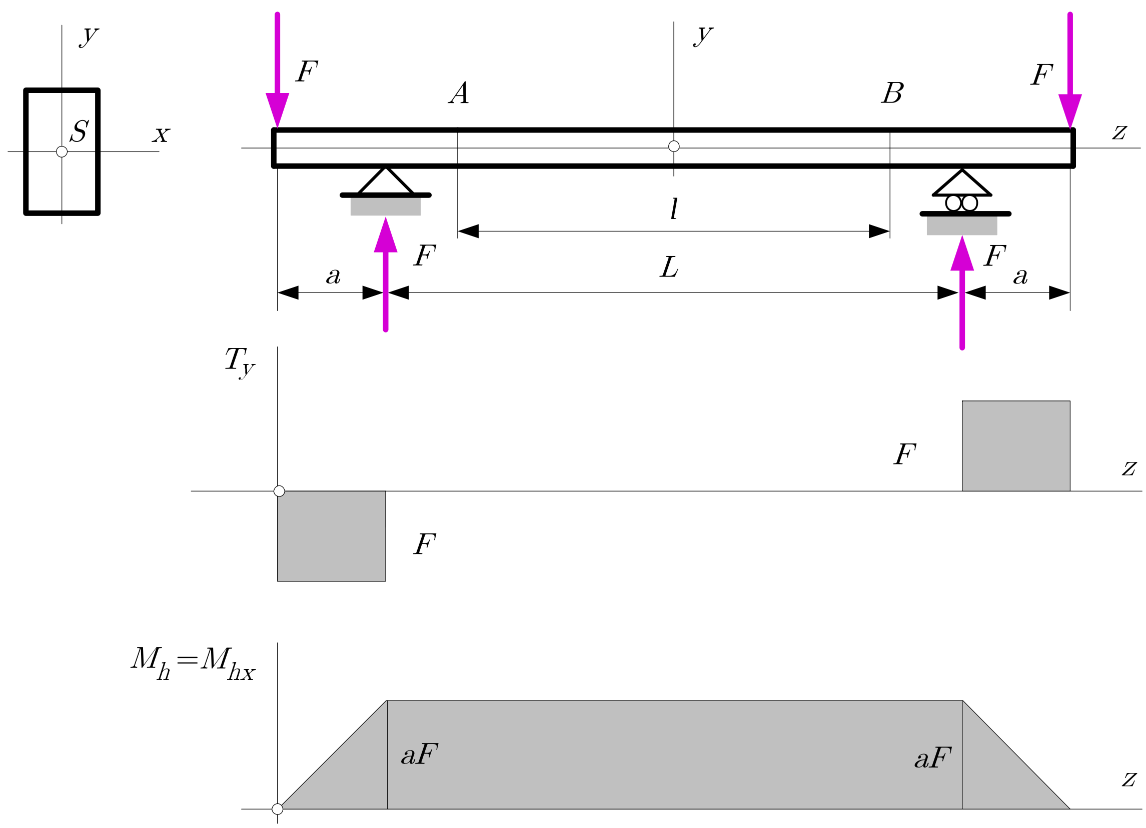
5. FEJEZET

A szilárdságtan alapkísérletei III. Tiszta hajlítás

5.1. Egyenes prizmatikus rúd tiszta egyenes hajlítása

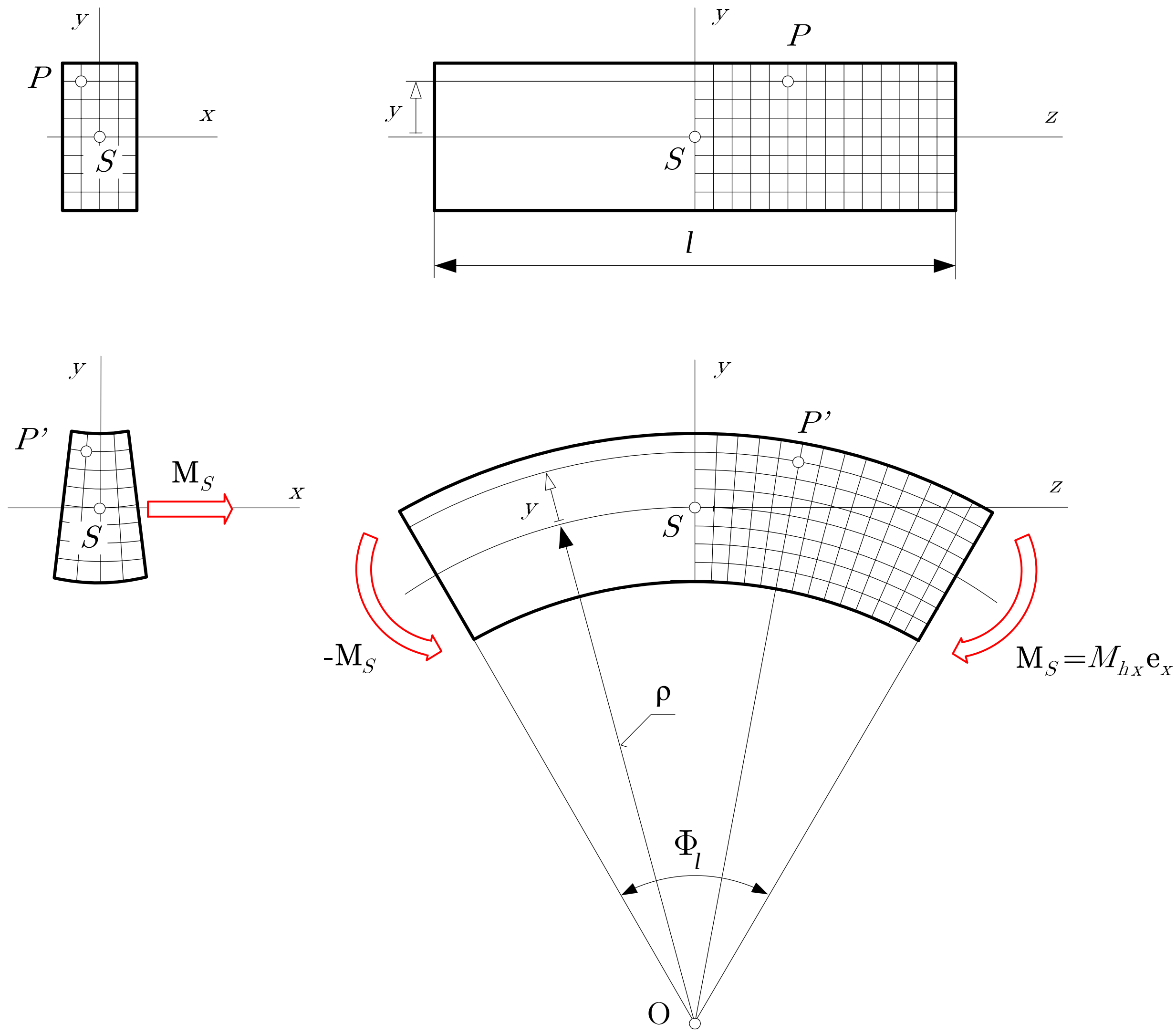
5.1.1. Bevezető megjegyzések. Tiszta hajlításról beszélünk, ha a rúd egy adott szakasza csak hajlításra van igénybe véve. Másként fogalmazva, ha az adott szakaszon belül a rúd minden egyes keresztmetszetének egyetlen, a keresztmetszet síkjában fekvő hajlítónyomaték az igénybevétele. A jelen 5.1. szakasz célja tiszta egyenes hajlításnak[1] kitett prizmatikus rúd alakváltozási és feszültségi állapotának a tisztázása. A kezdetben feltételezzük, hogy a rúdnak van szimmetriasíkja, amely egybeesik a KR yz síkjával. Magát a KR-t a megszokott módon veszünk fel, azaz a vízszintes z tengely a rúd hossztengelye, az y tengely pedig felfelé mutat. A tiszta hajlítás feladatával összefüggésben szó esik a keresztmetszetek másodrendű nyomatékairól is.

5.1.2. Tiszta egyenes hajlításra igénybevett rúd szilárdságtani állapota. Az 5.1. ábra egy téglalapkeresztmetszetű rudat, a rúd terhelését, valamint a rúd T_y nyíróerő és M_{hx} nyomatéki ábráját szemlélteti. Leolvasható az igénybevételi ábrákról, hogy a rúd két támasz közötti szakaszának tiszta hajlítás az igénybevétele. Tegyük fel, hogy a rúd A és B keresztmetszetei



5.1. ábra.

[1] Az egyenes jelző jelentését az (5.16) képletet követő második bekezdésben – v.ö.: 130. o. – tisztázzuk.



5.2. ábra.

elegendő távolságra vannak a támaszoktól ahhoz, hogy ne legyen hatással a két támasz – összhangban a Saint Venant elvvel – az AB rúdszakasz szilárdságtani állapotára.

A továbbiakban az AB rúdszakasz a vizsgálatok tárgya.

A vizsgálatok megkönnyítése érdekében az xy, xz és yz koordinátasíkokkal párhuzamos síksorok segítségével elemi kockákra bontjuk fel gondolatban az AB rúdszakaszt. Az 5.2. ábra a rúdszakasz jobboldalára nézve szemlélteti a tényleges viszonyokat érzékeltető erős nagyításban a felosztást mind az alakváltozás előtti, mind pedig az alakváltozás utáni állapotra nézve.

Az alakváltozási viszonyokat illetően az alábbiakat figyelhetjük meg:

1. A terhelés előtt z tengellyel párhuzamos anyagi vonalak (egyenesek) körívekké görbülnek. A terhelés előtt azonos y koordinátájú anyagi vonalaknak azonos a görbületi sugara az alakváltozás után. A felső anyagi vonalak megnyúlnak, az alulsó anyagi vonalak megrövidülnek, az alakváltozás előtt y=0 koordinátájú anyagi vonalak hossza azonban változatlan marad.
2. A terhelés előtt x tengellyel párhuzamos anyagi vonalak (egyenesek) is körívekké görbülnek. Figyeljük meg – baloldali ábrarészlet –, hogy a terhelés előtt azonos y koordinátájú anyagi vonalaknak is azonos a görbületi sugara az alakváltozás után. A felső anyagi vonalak megrövidülnek, az alulsó anyagi vonalak megnyúlnak, az alakváltozás előtt $y = 0$

koordinátájú anyagi vonalak hossza pedig változatlan marad. Az y tengellyel párhuzamos anyagi vonalak egyenesek maradnak az alakváltozás során, de elfordulnak. Az x és y tengelyekkel párhuzamos anyagi vonalak által alkotott háló ortogonális marad.

3. Az xy síkkal párhuzamos síkok olyan síkok maradnak, melyeknek az O ponton átmenő és az x tengellyel párhuzamos egyenes a közös tartóegyenese. Az ábra a véglapok és a P pont esetén feltünteti ezeket az élben látszó síkokat. Jól látszik az ábrán, hogy a keresztmetszetek úgy fordulnak el az x irány körül, hogy a körívekké görbült z irányú szálakra minden pontban merőlegesek maradnak.
4. Az eredetileg kockákból felépülő hálóból, összhangban a fentebb mondottakkal, új ortogonális háló jön létre.

Az alakváltozási viszonyok tekintetében abból a körülményből, hogy a háló ortogonális marad azonnal következik, hogy zérus értékűek a szögtorzulások:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0\,. \tag{5.1}$$

Ami a fajlagos nyúlásokat illeti a mérési megfigyelések szerint a z tengelyre merőleges (keresztirányú), $\varepsilon_k = \varepsilon_x = \varepsilon_y$ fajlagos nyúlások és a z tengellyel párhuzamos (hosszirányú) ε_z fajlagos nyúlás között az első alapkísérlet kapcsán már szereplő – v.ö.: (3.6) – összefüggés áll fenn:

$$\varepsilon_k = \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z \tag{5.2}$$

A fentiek szerint, ellentétben az első alapkísérlet során vizsgált húzás (nyomás) esetével, nem homogén az alakváltozási állapot, hanem függ a helytől az alakváltozási tenzor, hiszen pl. pozitív y esetén pozitív az ε_z, negatív y esetén pedig negatív az ε_z.

További megfigyelés, hogy valamely y koordinátájú a terhelés előtt a z-vel párhuzamos anyagi vonal (hosszirányú szál) minden egyes pontjában azonos az ε_z fajlagos nyúlás. A viszonyok tisztázása érdekében számítsuk ki ezt az értéket. Az alakváltozás után, amint az jól leolvasható az ábráról, $(\rho+y)\,\Phi_l$ az $y=0$ koordinátájú anyagi vonalak (hosszirányú szálak) mérete, ahol ρ az $y=0$ hosszirányú szálak görbületi sugara. Ezek alakváltozás előtti mérete

$$l = \rho\Phi_l\,, \tag{5.3}$$

hiszen nincs hosszváltozás, ha az $y=0$. Következésképp

$$\varepsilon_z = \frac{(\rho+y)\,\Phi_l - l}{l} = \frac{(\rho+y)\,\Phi_l - \rho\Phi_l}{\rho\Phi_l}\,,$$

ahonnan

$$\boxed{\varepsilon_z = \frac{1}{\rho}y = \kappa y\,.} \tag{5.4}$$

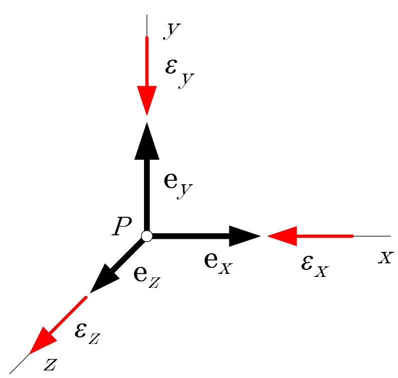
A képletben álló $\kappa = 1/\rho$ a görbület. Az (5.1), (5.2) és (5.4) összefüggések alapján

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \tag{5.5a}$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z = -\nu\frac{y}{\rho} = -\nu\kappa y\,, \quad \varepsilon_z = \frac{y}{\rho} = \kappa y \tag{5.5b}$$

az alakváltozási tenzor mátrixa. A teljesség kedvéért diadikus alakban is felírjuk az alakváltozási tenzort:

$$\boldsymbol{A} = \varepsilon_x \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \varepsilon_y \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y + \varepsilon_z \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_z\,. \tag{5.5c}$$



5.3. ábra.

Mivel valamennyi szögtorzulás zérus a rúd minden egyes pontjában párhuzamosak az alakváltozási tenzor főtengelyei a választott KR x, y és z koordináta tengelyeivel. Vegyük azt is észre, hogy a fajlagos nyúlások az y koordináta lineáris függvényei. Ebből a függvénykapcsolatból következik, hogy $y=0$ esetén, azaz az un. semleges rétegben, zérus az alakváltozási tenzor.

Az alakváltozási tenzort azzal a feltevéssel szemlélteti fentiek alapján az 5.3. ábra az elemi triéderen, hogy pozitív az y koordináta, azaz pozitív az ε_z is.

Nyilvánvaló, hogy a fajlagos nyúlások képleteiben szereplő ρ görbületi sugár az M_{hx} nyomaték függvénye, hiszen a nagyobb nyomaték jobban meggörbíti az AB rúdszakaszt. A függvénykapcsolat jellegét a feszültségek ismeretében tisztázzuk majd.

Ami a feszültségek számítását illeti abból kell kiindulni, hogy a (3.18) egyenlet szerint fennáll az

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1+\nu}{E}\underline{\mathbf{T}} - \nu\varepsilon_z\underline{\mathbf{E}}$$

összefüggés, ahonnan

$$\underline{\mathbf{T}} = \frac{E}{1+\nu}\underline{\mathbf{A}} + \frac{\nu E}{1+\nu}\varepsilon_z\underline{\mathbf{E}}\,.$$

Az utóbbi egyenletből, az (5.5a,b) képletek helyettesítésével, a

$$\underline{\mathbf{T}} = \frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix} -\nu\frac{y}{\rho} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\frac{y}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y}{\rho} \end{bmatrix} + \frac{\nu E}{1+\nu}\frac{y}{\rho}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1+\nu)\frac{y}{\rho} \end{bmatrix},$$

vagy ami ugyanaz, a

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E\frac{y}{\rho} \end{bmatrix} \tag{5.6}$$

eredmény következik. Skalár alakban írva

$$\boxed{\sigma_z = E\varepsilon_z = E\,\frac{y}{\rho} = E\,\kappa y} \tag{5.7a}$$

és

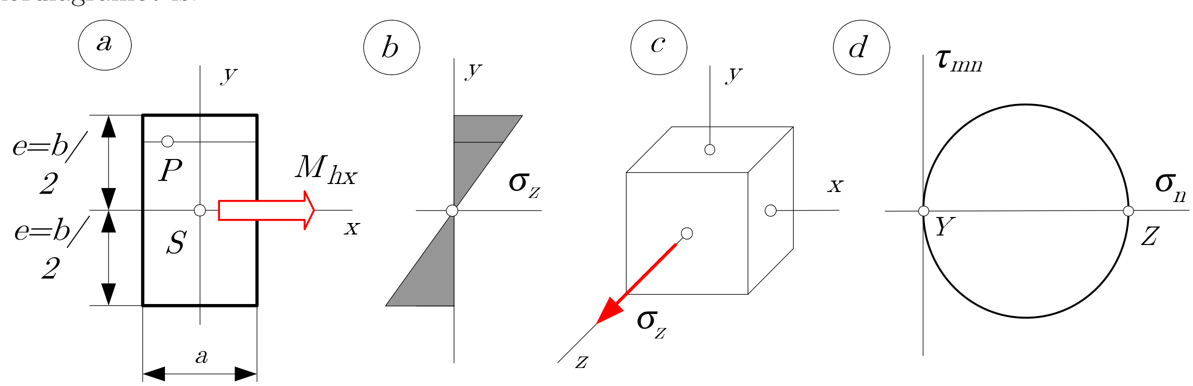
$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \tag{5.7b}$$

a feszültségek értéke. Diádokkal írva

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\rho}_z \circ \mathbf{e}_z = \underbrace{\sigma_z\mathbf{e}_z}_{\boldsymbol{\rho}_z} \circ \mathbf{e}_z \tag{5.8}$$

a feszültségi tenzor. Nyilvánvaló fentiek alapján, hogy a rúd bármely pontjában a feszültségi tenzor egy főiránykármasát adják az x, y és z koordináta-tengelyekkel párhuzamos egyenesek. Maga a feszültségi állapot egytengelyű.

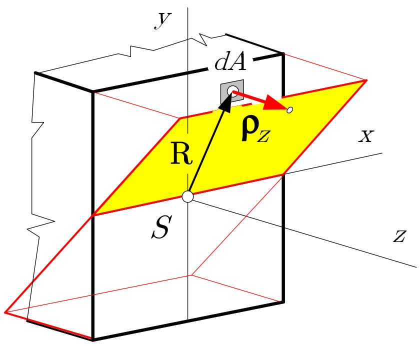
A tetszőleges P pont keresztmetszetét igénybevételével együtt az 5.4.(a) ábra, a $\sigma_z(x,y) = \sigma_z(y)$ lineáris feszültség eloszlást pedig az 5.4.(b) ábra szemlélteti. Az ábra feltünteti emellett a P pont feszültségi állapotát szemléltető elemi kockát, valamint a Mohr-féle részleges feszültségi kördiagramot is.



5.4. ábra.

Összhangban a fentiekkel a rúd bármely pozitív, azaz $\mathbf{e}_z$ normálisú keresztmetszetén

$$\boldsymbol{\rho}_z = \sigma_z\mathbf{e}_z = E\frac{y}{\rho}\mathbf{e}_z \tag{5.9}$$



5.5. ábra.

a feszültségvektor. A keresztmetszet azon egyenesét, ahol zérus értékű a feszültségvektor (ez a $\sigma_z(x,y)$ felület és a keresztmetszet síkjának metszésvonala) *semleges tengelynek*, vagy *zérusvonalnak* nevezzük. A jelen esetben ez az x tengellyel esik egybe.

Az 5.5. ábra a rúd egy A keresztmetszetén megoszló $\boldsymbol{\rho}_z$ belső erőrendszert és a zérusvonalat axonometrikus képen szemlélteti.

Mivel a keresztmetszeten megoszló $\boldsymbol{\rho}_z$ belső erőrendszer keresztmetszet S súlypontjába redukált $[\mathbf{F}_S, \mathbf{M}_S]$ redukált vektorkettőse egyetlen $M_{hx}\mathbf{e}_x$ erőpárral kell, hogy legyen egyenértékű fenn kell állnia az 5.5. ábra alapján írható

$$\mathbf{F}_S = \int_A \boldsymbol{\rho}_z \,\mathrm{d}A = 0\,, \qquad \mathbf{M}_S = \int_A \mathbf{R}\times\boldsymbol{\rho}_z \,\mathrm{d}A = M_{hx}\mathbf{e}_x \tag{5.10}$$

egyenleteknek. Az (5.9) képlet helyettesítésével az $(5.10)_1$ egyenletben álló integrálra, az eredőre, valóban a kívánt

$$\mathbf{F}_S = \int_A \boldsymbol{\rho}_z \,\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\underbrace{\int_A y\,\mathrm{d}A}_{S_x}\,\mathbf{e}_z = 0 \tag{5.11}$$

eredmény adódik, hiszen a megjelölt képletrész a keresztmetszet x súlyponti tengelyére vett S_x statikai nyomatéka és az azonosan zérus. Az $\mathbf{F}_S$ eredő zérus volta a magyarázata annak, hogy a keresztmetszetek geometriai középpontjait (súlypontjait) összekötő középvonal (a súlyponti szál) nem változtatja meg a hosszát a hajlítás során.

Az (5.9) képlet és a helyvektort adó $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ összefüggés helyettesítésével az $(5.10)_2$ egyenletben álló integrál, az eredő nyomaték, az alábbiak szerint alakítható tovább:

$$\mathbf{M}_S = \int_A \mathbf{R}\times\boldsymbol{\rho}_z \,\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\int_A (x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y)\times y\mathbf{e}_z \,\mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\left[\underbrace{\int_A y^2\,\mathrm{d}A}_{I_x}\mathbf{e}_x - \underbrace{\int_A xy\,\mathrm{d}A}_{I_{xy}}\mathbf{e}_y\right] \tag{5.12}$$

A fenti egyenletben megjelölt első képletrész az A keresztmetszet x súlyponti *tengelyre* számított (vett) *másodrendű nyomatékát* értelmezi:

$$\boxed{I_x = \int_A y^2\,\mathrm{d}A > 0\,.} \tag{5.13a}$$

Mivel az integrandusz mindig pozitív az x tengelyre számított másodrendű nyomaték is csak pozitív mennyiség lehet. Az (5.12) egyenlet második megjelölt képletrésze az A keresztmetszet $x-y$ súlyponti *tengelypárra* számított (vett) *másodrendű nyomatékát* – más elnevezés szerint a *vegyes másodrendű nyomatékot* – értelmezi:

$$\boxed{I_{xy} = \int_A xy\,\mathrm{d}A\,.} \tag{5.13b}$$

Ez a mennyiség pozitív, nulla és negatív egyaránt lehet. Vegyük észre, hogy a fentiekben definiált másodrendű nyomatékok csak a keresztmetszet geometriai jellemzőitől – annak alakjától és méreteitől – függenek. A jelen esetben, amint azt az 5.4. Mintafeladatban is megmutatjuk majd – lásd a 146. o. –, zérus a vegyes másodrendű nyomaték, mivel az y tengely szimmetriatengely. Ennek figyelembevételével vetve egybe az $(5.10)_2$ és az (5.12) képleteket kapjuk, hogy

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M_{hx}}{I_x E}\,.} \tag{5.14}$$

Az utóbbi egyenlet a keresett kapcsolat a κ görbület, a ρ görbületi sugár és az M_{hx} hajlítónyomaték között. A kapott eredmény (5.4) és (5.7a) képletekbe történő helyettesítésével az ε_z fajlagos nyúlás és a σ_z normálfeszültség az M_{hx} hajlítónyomatékkal fejezhető ki:

$$\boxed{\varepsilon_z = \frac{M_{hx}}{I_x E} y\,, \qquad \sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x} y\,.} \tag{5.15}$$

A most felírt összefüggéseknek az a jelentősége, hogy numerikus összefüggéseket adnak a rudat terhelő M_{hx} hajlítónyomaték, a rúd anyagára jellemző E rugalmassági modulus, a rúd keresztmetszetének geometriai adataitól függő I_x, a ρ görbületi sugár, az ε_z fajlagos nyúlás, valamint a σ_z feszültség között.

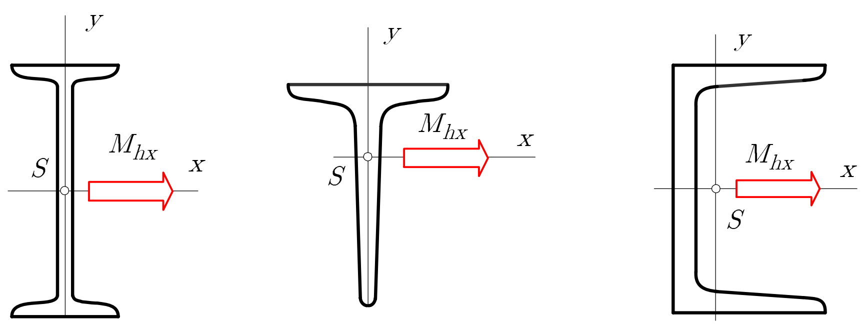
Bár nem mutatjuk meg formálisan, de az eddigi gondolatmenet és a vonatkozó képletek akkor is érvényesek maradnak, ha negatív az M_{hx} hajlítónyomaték.

Továbbmenve a kapott képletek a prizmatikus rudakra nézve akkor is igazak maradnak, ha

- ha a rúd nem téglalap keresztmetszetű,
- zérus értékű a vegyes másodrendű nyomaték, azaz fennáll az $I_{xy} = 0$ egyenlet (pl. az y vagy x tengely szimmetriatengely)
- $\mathbf{M}_S = M_{hx}\mathbf{e}_x$ a rúd igénybevétele (tiszta hajlítás esete forog fenn).

A későbbiekben igazoljuk, hogy nem szimmetrikus keresztmetszetek esetén is mindig található olyan súlyponthoz kötött egymásra kölcsönösen merőleges x, y tengelypár melyre nézve $I_{xy} = 0$. Ezeket a tengelyeket *tehetetlenségi főtengelyeknek* fogjuk nevezni.

Az 5.6. ábra olyan keresztmetszeteket szemléltet, melyekre nézve főtengelyek az x, y súlyponti tengelyek.



5.6. ábra.

A keresztmetszeten megoszló belső erőrendszer keresztmetszet S súlypontjára számított

$$\mathbf{M}_S = \underbrace{M_{hx}\mathbf{e}_x + M_{hy}\mathbf{e}_y}_{\mathbf{M}_{hS}} + M_c\mathbf{e}_z \tag{5.16}$$

nyomatékának a keresztmetszet síkjába eső és a fenti képletben külön is megjelölt $\mathbf{M}_{hS}$ része a hajlítónyomaték-vektor.

Egyenes hajlításról beszélünk akkor, ha a hajlítónyomaték vektor párhuzamos a keresztmetszet egyik súlyponti tehetetlenségi főtengelyével.

Ha nem párhuzamos a hajlítónyomaték vektor a keresztmetszet valamelyik súlyponti tehetetlenségi főtengelyével, akkor a hajlítást *ferde hajlításnak* nevezzük.

Nyilvánvaló az eddigiek alapján, hogy tiszta hajlítás esetén érvényesek és használhatók az (5.4), (5.5a,b), (5.6), (5.7a,b) (5.14) és (5.15) képletek, feltéve hogy a hajlítónyomaték $\mathbf{M}_{hS} = M_{hx}\mathbf{e}_x$ alakú, az x tengely tehetetlenségi főtengely a rúd pedig prizmatikus.

Az $(5.15)_2$ képlet szerint pozitív M_{hx} esetén a felső szélső szálban ébred a legnagyobb pozitív normálfeszültség (húzófeszültség) és az alsó szélső szálban kapjuk a legnagyobb abszolút értékű negatív normálfeszültséget (a legnagyobb nyomófeszültséget). Negatív M_{hx} esetén a viszonyok fordítottak, a felső szélső szálban negatív, az alsó szélső szálban pedig pozitív σ_z ébred.

Ha megszorozzuk a görbületet adó (5.14) képletet a rúd l hosszával és figyelembe vesszük az (5.3) összefüggést, akkor az AB rúdszakasz véglapjainak (szélső keresztmetszeteinek) egymáshoz viszonyított

$$\Phi_l = \frac{l}{\rho} = \frac{M_{hx} l}{I_x E} \tag{5.17}$$

szögelfordulását kapjuk.

A tiszta hajlításra igénybe vett AB rúdszakasz alakváltozási energiáját a (3.25) alapján felírt

$$u = \frac{1}{2}\frac{\sigma_z^2}{E}$$

fajlagos alakváltozási energia rúdszakasz V térfogatán vett integrálja adja, ha helyettesítjük a σ_z-t adó $(5.15)_2$ összefüggést:

$$U = \int_V u \,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_l \int_A \frac{\sigma_z^2}{E}\,\mathrm{d}A\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_l \frac{M_{hx}^2}{I_x^2 E}\int_A y^2 \mathrm{d}A\,\mathrm{d}z\,.$$

Az I_x (5.13a) alatti értelmezését is helyettesítve

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_l \frac{M_{hx}^2}{I_x E}\,\mathrm{d}z} \tag{5.18}$$

az eredmény. Tovább egyszerűsödik a fenti képlet, ha figyelembe vesszük, hogy állandó az M_{hx} hajlítónyomaték:

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_{hx}^2 l}{I_x E}\,. \tag{5.19}$$

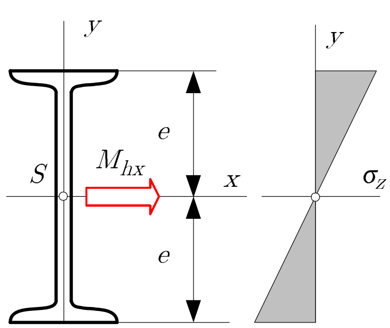
A fenti összefüggés egyúttal, összhangban a (2.96) és (5.17) képletekkel, az AB rúdszakaszra működő M_{hx} hajlítónyomaték W_K munkája a hajlítónyomaték hatására bekövetkező Φ_l szögelfordulás során:

$$U = W_K = \frac{1}{2} M_{hx}\Phi_l\,.$$

5.1.3. Ellenőrzés, méretezés. Az alábbiak a tiszta hajlításra igénybevett rúd feszültségcsúcsra történő ellenőrzésének és méretezésének kérdéseit tekintik át. A $\sigma_{\max}$ feszültséget a

$$\sigma_{\max} = \max|\sigma_z| \tag{5.20}$$

módon értelmezzük az A keresztmetszeten. Ha az anyag egyformán viselkedik húzásra és nyomásra, akkor azt fogjuk megkövetelni, hogy ez az érték előírt korlát alatt maradjon. Ha az anyag nem viselkedik egyformán a húzásra és nyomásra, akkor a húzófeszültségek és a nyomófeszültségek maximumai külön-külön előírt korlátok alatt kell, hogy legyenek. A jelen esetben ez a követelmény az úgynevezett feszültségcsúcsra történő ellenőrzés illetve méretezés alapja.



5.7. ábra.

Ha egyforma a szélső szálak távolsága az x tengelytől a húzott illetve nyomott oldalakon, – ezt az esetet az 5.7. ábra az 5.6. ábrán is megrajzolt x tengelyre szimmetrikus I szelvénnyel szemlélteti –, akkor

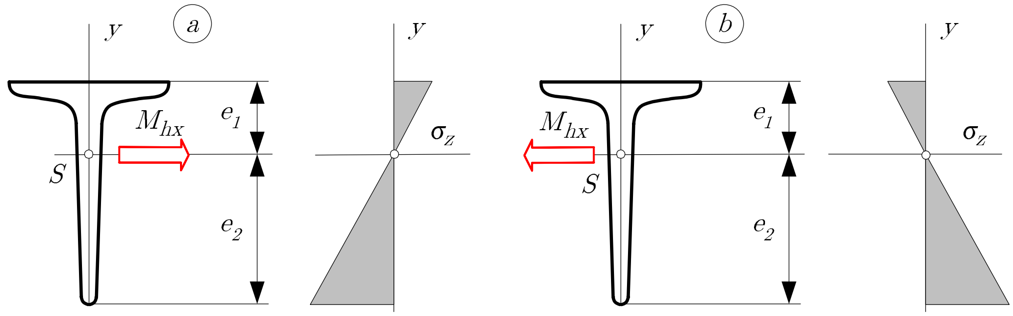
$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e = \frac{|M_{hx}|}{\frac{I_x}{e}} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}\,, \tag{5.21}$$

ahol

$$\boxed{K_x = \frac{I_x}{e}} \tag{5.22}$$

az x tengelyre vonatkozó *keresztmetszeti tényező.*

Ha nem egyforma a szélső szálak távolsága az x tengelytől a húzott illetve nyomott oldalakon, – ezt az esetet az 5.8. ábra az 5.6. ábrán is megrajzolt T szelvénnyel szemlélteti –, akkor két keresztmetszeti té-



5.8. ábra.

nyezőt érdemes bevezetni. Jelölje, összhangban az ábrával, e_1 és e_2 a szélső szálak x tengelytől mért távolságát. Az (5.22) képlet alapján a két keresztmetszeti tényezőt a

$$K_1 = \frac{I_x}{e_1}\,, \qquad \text{valamint a} \qquad K_2 = \frac{I_x}{e_1}$$

képletek értelmezik. A fenti adatokkal a

$$K_x = K_{\min} = \min(K_1, K_2)\ . \tag{5.23}$$

képlet értelmezi K_x-et.

Tegyük fel egyelőre, hogy *egyformán viselkedik az anyag a húzásra és nyomásra.*

Felhasználva a keresztmetszeti tényező fogalmát – ha azonos a szélső szálak x tengelytől mért távolsága, akkor az (5.22), ha nem azonos, akkor pedig az (5.23) képlettel kell dolgozni – írhatjuk, hogy

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x}\ . \tag{5.24}$$

Következőleg *ellenőrzés esetén* – hivatkozva ehelyütt a 3.2.7. szakaszra a σ_{jell} feszültség és az n előírt biztonsági tényező fogalmát illetően – a

$$\boxed{\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{K_x} \le \sigma_{\mathrm{meg}} = \frac{\sigma_{\mathrm{jell}}}{n}} \tag{5.25}$$

relációnak kell fennállnia.

Legyen

$$K_{\mathrm{sz}} = \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\mathrm{meg}}} \tag{5.26}$$

a *szükséges* keresztmetszeti tényező.

Következőleg *méretezés esetén* az (5.25) és az (5.26) összefüggések egybevetése alsó korlátot ad a keresztmetszeti tényezőre:

$$\boxed{K_x \ge K_{\mathrm{sz}} = \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\mathrm{meg}}}} \tag{5.27}$$

Érdemes hangsúlyozni, hogy ez a szükséges (minimális) keresztmetszeti tényező csak akkor határozza meg egyértelműen a keresztmetszet alakját, ha a választott alak csak egy geometriai paraméter (méret) függvénye (pl. körkeresztmetszet). Ha a választott alak több geometriai paraméter (méret) függvénye, akkor további szempontok is figyelembe vehetők a keresztmetszet méreteinek megválasztása során.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy *nem viselkedik egyformán az anyag a húzásra és nyomásra.*

Legyen $\sigma_{\mathrm{meg\ húzás}}$ és $\sigma_{\mathrm{meg\ nyomás}}$ rendre a húzó-, illetve nyomófeszültségre vonatkozó megengedett feszültség. Megjegyezzük, hogy a rideg anyagok – ilyen pl. az öntöttvas, vagypedig a beton – nyomásra lényegesen nagyobb feszültséget képesek maradó károsodás nélkül elviselni. Ebből adódóan ezen anyagok esetén fennáll a $\sigma_{\mathrm{meg\ húzás}} \le \sigma_{\mathrm{meg\ nyomás}}$ reláció.

Legyen továbbá $\sigma_{\mathrm{max\,húzás}}$ és $\sigma_{\mathrm{max\,nyomás}}$ rendre a maximális húzó-, illetve nyomófeszültség.

Ha azonos a szélső szálak x tengelytől mért távolsága, akkor megegyezik egymással ez a két érték, azaz fennáll a $\sigma_{\max\,\text{húzás}} = \sigma_{\max\,\text{nyomás}} = \sigma_{\max}$ reláció.

Ha nem azonos a két szélső szál x tengelytől mért távolsága, akkor a nyomaték előjelét is figyelembe véve – ez dönti ugyanis el melyik a húzott és melyik a nyomott oldal – kell számítani a $\sigma_{\max\,\text{húzás}}$ és $\sigma_{\max\,\text{nyomás}}$ feszültségek értékét. Így például ha pozitív az M_{hx}, azaz az 5.8.(a) ábrán vázolt esetben

$$\sigma_{\max\,\text{húzás}} = \frac{M_{hx}}{I_x}\,e_1 = \frac{M_{hx}}{K_1} \qquad \text{és} \qquad \sigma_{\max\,\text{nyomás}} = \frac{M_{hx}}{I_x}\,e_2 = \frac{M_{hx}}{K_2}\,. \tag{5.28a}$$

Ezzel szemben az 5.8.(b) ábrán vázolt esetben

$$\sigma_{\max\,\text{nyomás}} = \frac{|M_{hx}|}{I_x}\,e_1 = \frac{|M_{hx}|}{K_1} \qquad \text{és} \qquad \sigma_{\max\,\text{húzás}} = \frac{|M_{hx}|}{I_x}\,e_2 = \frac{|M_{hx}|}{K_2}\,. \tag{5.28b}$$

A fentiek alapján *ellenőrzés esetén* egyidejűleg kell teljesülnie a

$$\sigma_{\max\,\text{húzás}} \le \sigma_{\text{meg húzás}} \qquad \text{és a} \qquad \sigma_{\max\,\text{nyomás}} \le \sigma_{\text{meg nyomás}}\,. \tag{5.28c}$$

relációknak.

Legyen

$$K_{\text{sz húzás}} = \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\text{meg húzás}}} \qquad \text{és} \qquad K_{\text{sz nyomás}} = \frac{|M_{hx}|}{\sigma_{\text{meg nyomás}}} \tag{5.29}$$

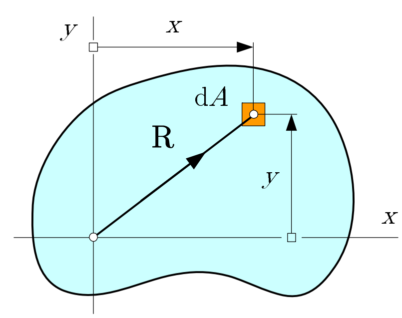
a maximális húzó, illetve nyomófeszültséghez tartozó *szükséges* keresztmetszeti tényező. Nyilvánvaló az eddigiek alapján, hogy *méretezés esetén* a fenti két keresztmetszeti tényező birtokában lehet csak helyesen megválasztani a keresztmetszet alakját és méreteit.

Az ellenőrzés és méretezés megismert összefüggései akkor is alkalmazhatók, ha változik a hajlítónyomaték a rúd hossza mentén, de elhanyagolható a hajlítónyomatékkal társuló nyíróerő, pontosabban a nyíróerő okozta nyírófeszültségek hatása. Amint azt az összetett igénybevételek kapcsán látni fogjuk akkor hanyagolhatók el a nyírófeszültségek, ha sokkal nagyobb a rúd hossza mint a keresztmetszet maximális mérete. Ilyenkor az ellenőrzést, illetve a méretezést arra a keresztmetszetre kell elvégezni, ahol a legnagyobb a hajlítónyomaték abszolút értéke. Ezt a keresztmetszetet veszélyes keresztmetszetnek szokás nevezni.

5.2. Síkidomok (keresztmetszetek) másodrendű nyomatékai

5.2.1. Bevezető megjegyzések. Az 5.1.2. alszakasz (5.13a,b) képletei olyan mennyiségeket, másodrendű nyomatékokat értelmeztek, melyek csak a tekintett rúdkeresztmetszet geometriájának függvényei és mint ilyenek függetlenek a rúd anyagától illetve terhelésétől. A jelen 5.2. szakaszban további másodrendű nyomatékokat értelmezünk és részletesen is megvizsgáljuk ezek tulajdonságait.

5.2.2. Másodrendű nyomatékok értelmezése. Az 5.9. ábra a tetszőleges alakú A síkidomot szemlélteti. Az xy koordináta-rendszer kezdőpontját (origóját) O jelöli. Ez a pont a sík egy tetszőleges végesben fekvő pontja, azaz nem szükséges feltétel, hogy az origó a síkidom egy belső pontja legyen. A $\mathrm{d}A$ felületelem középpontjának $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ a helyvektora.



5.9. ábra.

Az A síkidom x tengelyre számított I_x, illetve az y tengelyre számított I_y másodrendű nyomatékát, megismételve I_x tekintetében az (5.13a) képletet, az

$$\boxed{I_x = \int_A y^2\,\mathrm{d}A > 0 \qquad \text{és az} \qquad I_y = \int_A x^2\,\mathrm{d}A > 0} \tag{5.30a}$$

integrálok értelmezik. A vegyes másodrendű nyomatéknak pedig, megismételve az (5.13b) képletet, az

$$\boxed{I_{xy} = \int_A xy \,\mathrm{d}A} \tag{5.30b}$$

integrál az értelmezése.

Értelmezésükből következően a tengelyre számított I_x és I_y másodrendű nyomatékok pozitív mennyiségek. Az I_{xy} vegyes másodrendű nyomaték pozitív, zérus és negatív egyaránt lehet.

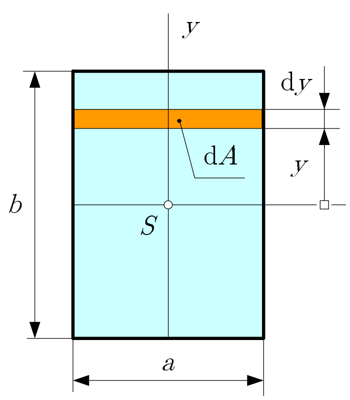
Szokás a fenti másodrendű nyomatékok mellett *poláris másodrendű nyomatékról* beszélni. Ezt a mennyiséget az

$$\boxed{I_p = I_O = \int_A \mathbf{R}^2 \,\mathrm{d}A = \int_A \left(x^2 + y^2\right) \,\mathrm{d}A} \tag{5.31}$$

integrál értelmezi. Az indexben álló p a poláris szó első betűje. Szokás helyette a vonatkoztatási pontot azonosító betűt, a jelen esetben ez O, is használni. Az is kiolvasható a fenti képletből, tekintettel az $(5.30\mathrm{a})_{1,2}$ képletekre, hogy az O pontra számított poláris másodrendű nyomaték az O ponton áthaladó x és y tengelyekre számított másodrendű nyomatékok összege:

$$I_p = I_O = I_x + I_y \tag{5.32}$$

Határozzuk meg példaként, a későbbi alkalmazásokat is szem előtt tartva téglalap alakú, illetve kör és körgyűrű keresztmetszet esetén a másodrendű nyomatékokat, valamint a keresztmetszeti tényezőket.



5.10. ábra.

Az 5.10. ábrán vázolt *téglalapalakú keresztmetszet* esetén az $(5.30\mathrm{a})_1$ képlet és az ábra alapján írható, hogy

$$I_x = \int_A y^2 \,\mathrm{d}A = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \underbrace{a\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}A} = a\frac{y^3}{3}\bigg|_{-b/2}^{b/2} ,$$

azaz, hogy

$$\boxed{I_x = \frac{ab^3}{12} \,.} \tag{5.33a}$$

Értelemszerű betűcserékkel kapjuk innen, hogy

$$\boxed{I_y = \frac{a^3 b}{12} \,.} \tag{5.33b}$$

A fenti két képlet és a poláris másodrendű nyomaték (5.32) alatti felbontása alapján

$$I_p = I_S = I_x + I_y = \frac{ab}{12}\left[a^2 + b^2\right] \,. \tag{5.34}$$

Végezetül az (5.22) és (5.33a,b) képletek felhasználásával számíthatók az x és y tengelyekre vonatkozó K_x és K_y keresztmetszeti tényezők:

$$\boxed{K_x = \frac{I_x}{b/2} = \frac{ab^2}{6} \,, \qquad K_y = \frac{I_y}{a/2} = \frac{a^2 b}{6} \,.} \tag{5.35}$$

Körkeresztmetszet esetén nyilvánvaló szimmetria okok miatt $I_x = I_y$. Visszaidézve, hogy a poláris másodrendű nyomatékot erre a keresztmetszetre a (4.48) képlet adja, továbbá felhasználva, a poláris másodrendű nyomaték és a tengelyre számított I_x és I_y. nyomatékok közötti (5.32) összefüggést írhatjuk, hogy

$$I_x + I_y = 2I_x = 2I_y = I_p = \frac{d^4\pi}{32} \,,$$

azaz, hogy

$$\boxed{I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{d^4\pi}{64} \,.} \tag{5.36}$$

Ismét felhasználva az (5.22) képletet kapjuk a vonatkozó keresztmetszeti tényezőket:

$$\boxed{K_x = K_y = \frac{I_x}{d/2} = \frac{d^3\pi}{32}\,.} \tag{5.37}$$

Körgyűrű alakú keresztmetszet esetén az I_p-t adó (4.49) összefüggés, az I_p felbontását adó (5.32) képlet, valamint a szimmetriát tükröző $I_x = I_y$ egyenlet figyelembe vételével írhatjuk, hogy

$$I_x + I_y = 2I_x = 2I_y = I_p = \frac{\left(D^4 - d^4\right)\pi}{32}\,.$$

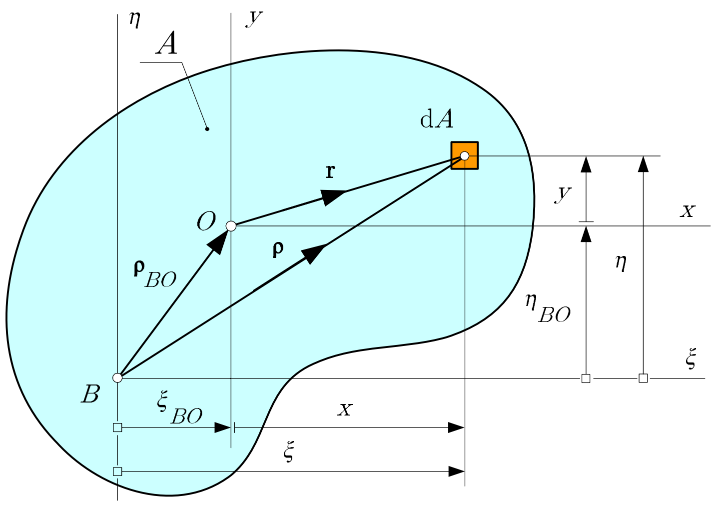
Következőleg

$$I_x = I_y = \frac{\left(D^4 - d^4\right)\pi}{64} \qquad \text{és} \qquad K_x = K_y = \frac{I_x}{D/2} = \frac{\left(D^4 - d^4\right)\pi}{32D}\,. \tag{5.38}$$

Mivel az x és y súlyponti tengelyek mindhárom esetben szimmetriatengelyek zérus értékű a vegyes másodrendű nyomaték:

$$I_{xy} = 0\,.$$

5.2.3. A koordinátarendszer eltolásának hatása. Steiner tétele. Az 5.11. ábrán vázolt A síkidom (keresztmetszet) esetén két egymással párhuzamos tengelypár által alkotott KR-ekben tekintjük a másodrendű nyomatékokat. Elsőként a B kezdőpontú görögbetűs $\xi\eta$ KR-ben



5.11. ábra.

tekintjük át a viszonyokat. Felhasználva a másodrendű nyomatékok (5.30a,b) alatti értelmezését az

$$I_\xi = \int_A \eta^2\,\mathrm{d}A\,, \qquad\qquad I_\eta = \int_A \xi^2\,\mathrm{d}A\,, \tag{5.39a}$$

valamint a

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta\,\mathrm{d}A \tag{5.39b}$$

képleteket kapjuk, ahol I_ξ és I_η a ξ és η tengelyekre számított másodrendű nyomaték, $I_{\xi\eta}$ pedig a ξ és η tengelypárra számított másodrendű nyomaték. A további átalakítások célja az I_ξ, I_η és $I_{\xi\eta}$, valamint az O kezdőpontú xy KR-ben számított I_x, I_y és I_{xy} másodrendű nyomatékok közötti kapcsolat tisztázása.

Ennek érdekében helyettesítsük az ábráról leolvasható

$$\xi = \xi_{BO} + x\,, \qquad \eta = \eta_{BO} + y$$

geometriai összefüggéseket az (5.39a,b) képletekbe. Az első esetben elemi átalakításokkal kapjuk, hogy

$$I_\xi = \int_A (\eta_{BO} + y)^2 \,\mathrm{d}A = \underbrace{\int_A y^2 \,\mathrm{d}A}_{I_x} + 2\eta_{BO} \underbrace{\int_A y \,\mathrm{d}A}_{S_x} + \eta_{BO}^2 \underbrace{\int_A \mathrm{d}A}_{A} . \tag{5.40a}$$

A második és harmadik esetben ugyanilyen módon kell eljárni:

$$I_\eta = \int_A (\xi_{BO} + x)^2 \,\mathrm{d}A = \underbrace{\int_A x^2 \,\mathrm{d}A}_{I_y} + 2\xi_{BO} \underbrace{\int_A x \,\mathrm{d}A}_{S_y} + \xi_{BO}^2 \underbrace{\int_A \mathrm{d}A}_{A} , \tag{5.40b}$$

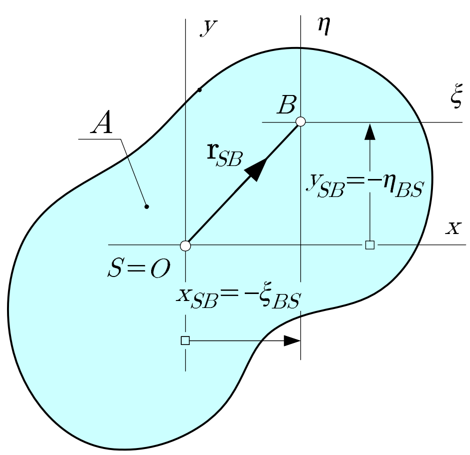
$$I_{\xi\eta} = \int_A (\xi_{BO} + x)(\eta_{BO} + y) \,\mathrm{d}A =$$

$$= \underbrace{\int_A xy \,\mathrm{d}A}_{I_{xy}} + \xi_{BO} \underbrace{\int_A y \,\mathrm{d}A}_{S_x} + \eta_{BO} \underbrace{\int_A x \,\mathrm{d}A}_{S_y} + \xi_{BO}\,\eta_{BO} \underbrace{\int_A \mathrm{d}A}_{A} . \tag{5.40c}$$

A fenti képletek megjelölt részei rendre a síkidom x és y tengelyekre, valamint az x-y tengelypárra számított I_x, I_y és I_{xy} másodrendű nyomatékait, a síkidom x és y tengelyekre számított S_x és S_y statikai nyomatékait, illetve a síkidom A területét adják. Következőleg írható, hogy

$$\boxed{\begin{aligned} I_\xi &= I_x + 2\eta_{BO} S_x + \eta_{BO}^2 A ,\\ I_\eta &= I_y + 2\xi_{BO} S_y + \xi_{BO}^2 A ,\\ I_{\xi\eta} &= I_{xy} + \xi_{BO} S_x + \eta_{BO} S_y + \xi_{BO}\,\eta_{BO}\, A. \end{aligned}} \tag{5.41}$$

Ez az eredmény Steiner tétel néven ismeretes.[2] A tételt szavakban a következő módon fogalmazhatjuk meg: Ha ismeretesek egy síkidom adott pontjához kötött (a jelen esetben az O ponthoz kötött) xy KR-ben az I_x, I_y és I_{xy} másodrendű nyomatékok, illetve az S_x és S_y statikai nyomatékok, akkor integrálás nélkül számíthatók a síkidom egy másik pontjához kötött (a jelen esetben az B ponthoz kötött) $\xi\eta$ KR-ben, ha egyébként rendre párhuzamosak a ξ, η és x, y koordinátatengelyek.



5.12. ábra.

Tovább egyszerűsödnek a Steiner tételt alkotó (5.41) képletek, ha egybeesik az O origó a síkidom (keresztmetszet) S geometriai középpontjával (súlypontjával). Ez esetben ugyanis zérus értékűek a síkidom x és y tengelyekre számított statikai nyomatékai:

$$S_x = S_y = 0 .$$

Ha emellett azt is figyelembe vesszük, hogy ez esetben

$$\xi_{BS} = -x_{SB} \qquad \text{és} \qquad \eta_{BS} = -y_{SB}$$

a Steiner tétel az

$$\boxed{\begin{aligned} I_\xi &= I_x + y_{SB}^2\, A ,\\ I_\eta &= I_y + x_{SB}^2\, A ,\\ I_{\xi\eta} &= I_{xy} + x_{SB}\, y_{SB}\, A \end{aligned}} \tag{5.42}$$

alakot ölti.

Kiolvasható az $(5.42)_1$ képletből, hogy adott súlyponti tengelyre (mondjuk az x tengelyre) számított másodrendű nyomaték ismeretében úgy számítható egy vele párhuzamos (mondjuk

[2]Jakob Steiner (1796-1863). Svájci születésű német geométer, a Berlini Tudományos Társaság tagja. Heidelbergben tanul. 1835-től élete végéig a berlini egyetem professzora. Szakterülete a projektív geometria és az izoperimetrikus geometriai problémák volt.

az ξ tengelyre) számított másodrendű nyomaték hogy hozzáadjuk az adott súlyponti tengelyre vonatkozó másodrendű nyomatékhoz a síkidom területének és a két tengely közötti távolság négyzetének szorzatát.

Az is következik az utóbbi mondatból, hogy az egymással párhuzamos tengelyekre számított másodrendű nyomatékok közül a súlyponti tengelyre számított másodrendű nyomaték a legkisebb.

Megjegyezzük, hogy az

$$\underline{\mathbf{I}}_S = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{bmatrix}, \qquad \underline{\mathbf{I}}_B = \begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\eta\xi} & I_\eta \end{bmatrix}, \tag{5.43a}$$

valamint az

$$\underline{\mathbf{I}}_{SB} = A \begin{bmatrix} y_{SB}^2 & -x_{SB}\, y_{SB} \\ -y_{SB}\, x_{SB} & x_{SB}^2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \eta_{BS}^2 & -\xi_{BS}\, \eta_{BS} \\ -\eta_{BS}\, \xi_{BS} & \xi_{BS}^2 \end{bmatrix}, \tag{5.43b}$$

mátrix jelölések bevezetésével az

$$\begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\eta\xi} & I_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{bmatrix} + A \begin{bmatrix} y_{SB}^2 & -y_{SB}\, x_{SB} \\ -x_{SB}\, y_{SB} & x_{SB}^2 \end{bmatrix}, \tag{5.44a}$$

vagy ami ugyanaz az

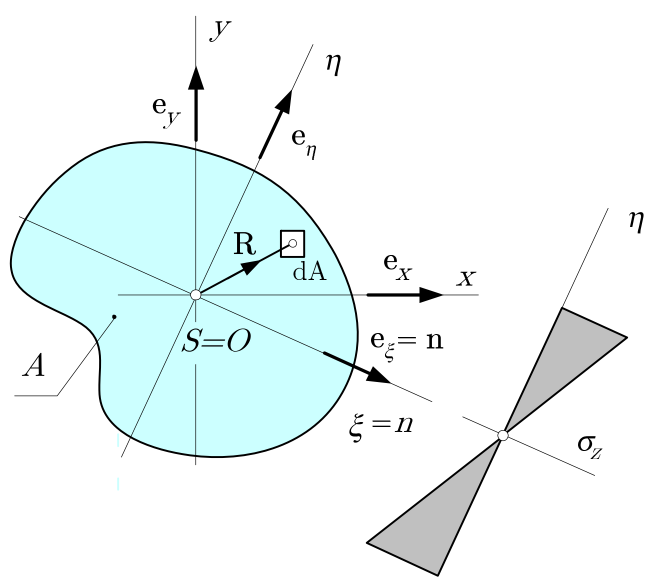
$$\boxed{\underline{\mathbf{I}}_B = \underline{\mathbf{I}}_S + \underline{\mathbf{I}}_{SB}} \tag{5.44b}$$

alakban írhatók fel a Steiner tétel (5.42) alatti skaláregyenletei. Megmutatjuk majd az 5.3.2. szakaszban – lásd az (5.56) képletre vezető gondolatmenetet –, hogy az $\underline{\mathbf{I}}_S$ mátrix az A keresztmetszet S súlypontjához tartozó $\boldsymbol{I}_S$ tehetetlenségi tenzor mátrixa az xy KR-ben.

Ugyanilyen módon adódik majd az is, hogy az $\underline{\mathbf{I}}_B$ mátrix az A keresztmetszet B pontjához tartozó $\boldsymbol{I}_B$ tehetetlenségi tenzor mátrixa a B kezdőpontú $\xi\eta$ KR-ben.

5.3. Prizmatikus rúd tiszta ferde hajlítása. Tehetetlenségi tenzor

5.3.1. Általánosítás. A továbbiakban azt a kérdést vizsgáljuk meg hogyan változnak a viszonyok, ha az $\mathbf{M}_S$ hajlítónyomaték vektor nem esik a keresztmetszet súlyponti tehetetlenségi főtengelyére, azaz *ferde hajlítás* esete áll fenn. Legyen az eddigieknek megfelelően a z tengely a rúd súlyponti hossztengelye, továbbá vegyük az 5.13. ábrán szemléltetett módon az xyz, valamint a $\xi\eta z$ KR-t. A vonatkozó egységvektorokat $\mathbf{e}_\xi$ és $\mathbf{e}_\eta$, illetve $\mathbf{e}_x$ és $\mathbf{e}_y$ jelöli. Az n irány



5.13. ábra.

essék egybe a ξ iránnyal, azaz $\mathbf{n}=\mathbf{e}_\xi$.

A gondolatmenet azon alapul, hogy a prizmatikus rúd tiszta ferde hajlítása esetén is fennállnak az alábbi, az egyenes hajlítás kapcsán rögzített megfigyelések:

1. Van olyan $\xi\eta z$ KR – az 5.13. ábra éppen ezt a KR-t szemlélteti–, amelyben
$$\underset{(\xi\eta z)}{\underline{\mathbf{A}}}=\begin{bmatrix}\varepsilon_\xi & 0 & 0\\ 0 & \varepsilon_\eta & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_z\end{bmatrix},\ \text{és}\ \ \varepsilon_\xi=\varepsilon_\eta=-\nu\varepsilon_z=-\nu\frac{\eta}{\rho}=-\nu\kappa\eta\,,\ \ \varepsilon_z=\frac{\eta}{\rho}=\kappa\eta \tag{5.45}$$
az alakváltozási tenzor mátrixa, illetve annak elemei. Az utóbbi képletekben ρ az alakváltozást szenvedett súlypontvonal görbületi sugara a $z\eta$ síkban, míg $\kappa=1/\rho$ a vonatkozó görbület.
2. Érvényes az egyszerű Hooke törvény, azaz
$$\sigma_z=E\,\varepsilon_z=E\,\frac{\eta}{\rho}=E\,\kappa\,\eta\,.$$
Nyilvánvaló, hogy az $\eta=0$ egyenes, azaz a ξ tengely a semleges tengely.

Leolvasható az 5.13. ábráról, hogy az $\mathbf{R}=\xi\mathbf{e}_\xi+\eta\mathbf{e}_\eta$ helyvektor a dA felületelemhez mutat. Az is nyilvánvaló, hogy
$$\mathbf{n}\times\mathbf{R}=\mathbf{n}\times(\xi\mathbf{e}_\xi+\eta\mathbf{e}_\eta)=\mathbf{e}_\xi\times(\xi\mathbf{e}_\xi+\eta\mathbf{e}_\eta)=\eta\mathbf{e}_z\,.$$
Az utóbbi két sorközi képlet egybevetése alapján
$$\boldsymbol{\rho}_z=\sigma_z\mathbf{e}_z=\frac{E}{\rho}\,\eta\,\mathbf{e}_z=\frac{E}{\rho}\,\mathbf{n}\times\mathbf{R}=E\kappa\,\mathbf{n}\times\mathbf{R} \tag{5.46}$$
a feszültségvektor értéke.

Mivel tiszta hajlításról van szó zérus kell legyen a keresztmetszeten megoszló $\boldsymbol{\rho}_z$ belső erőrendszer $\mathbf{F}_S$ eredője. Ez az eredmény egyszerű számítással adódik, ha felhasználjuk $\boldsymbol{\rho}_z$ (5.46) alatti előállítását és figyelembe vesszük, hogy zérus értékű az A keresztmetszet $S=O$ súlypontra vett $\mathbf{S}_O$ statikai nyomatéka:
$$\mathbf{F}_S=\int_A\boldsymbol{\rho}_z\,\mathrm{d}A=\int_A\frac{E}{\rho}\,\mathbf{n}\times\mathbf{R}\,\mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}\,\mathbf{n}\times\underbrace{\int_A\mathbf{R}\,\mathrm{d}A}_{\mathbf{S}_O=\mathbf{0}}=0\,. \tag{5.47}$$

A keresztmetszeten megoszló $\boldsymbol{\rho}_z$ belső erőrendszer keresztmetszet súlypontjára vett $\mathbf{M}_S$ nyomatékát adó
$$\mathbf{M}_S=\int_A\mathbf{R}\times\boldsymbol{\rho}_z\,\mathrm{d}A \tag{5.48}$$
képlet is hasonló gondolatmenettel, azaz a $\boldsymbol{\rho}_z$ feszültségvektor az (5.46) alatti képletének, valamint az $\mathbf{R}$ felbontásának helyettesítésével alakítható tovább:
$$\mathbf{M}_S=\int_A(\xi\mathbf{e}_\xi+\eta\mathbf{e}_\eta)\times\frac{E}{\rho}\,\eta\,\mathbf{e}_z\,\mathrm{d}A=\frac{E}{\rho}\Big[\underbrace{\int_A\eta^2\mathrm{d}A}_{I_\xi}\,\mathbf{e}_\xi-\underbrace{\int_A\eta\xi\,\mathrm{d}A}_{I_{\eta\xi}}\,\mathbf{e}_\eta\Big] \tag{5.49a}$$
azaz
$$\mathbf{M}_S=\frac{E}{\rho}\,\big[I_\xi\mathbf{e}_\xi-I_{\eta\xi}\mathbf{e}_\eta\big]=E\kappa\,\big[I_\xi\mathbf{e}_\xi-I_{\eta\xi}\mathbf{e}_\eta\big]\,. \tag{5.49b}$$
A fenti képletben álló
$$I_\xi=\int_A\eta^2\mathrm{d}A\,,\quad I_{\eta\xi}=\int_A\eta\xi\,\mathrm{d}A\qquad\text{integrálok, valamint az}\qquad I_\eta=\int_A\xi^2\mathrm{d}A \tag{5.50}$$
integrál rendre az A keresztmetszet ξ tengelyre, $\eta\xi$ tengelypárra, valamint az η tengelyre számított másodrendű nyomatékait adják. Az (5.49b) képlet részét alkotó
$$\mathbf{I}_\xi=\mathbf{I}_n=I_\xi\mathbf{e}_\xi-I_{\eta\xi}\mathbf{e}_\eta \tag{5.51}$$
vektor a ξ tengelyhez, illetve az $\mathbf{e}_\xi$ irányhoz (vagy ami ugyanez az n tengelyhez, illetve az $\mathbf{n}$ irányhoz) tartozó *tehetetlenségi vektor.*

Mivel általában $I_{\eta\xi} \neq 0$ az következik az (5.49b) képletből, hogy *az* $\mathbf{M}_S$ *nyomatékvektor általában nem párhuzamos a* ξ *semleges tengellyel.* Másként fogalmazva, ha az $I_{\eta\xi} \neq 0$, akkor valóban ferde hajlítás áll fenn.

Tovább alakítható céljainknak megfelelően az $\mathbf{M}_S$ (5.48) alatti képlete, ha $\boldsymbol{\rho}_z$ értékét az (5.46) jobboldalának utolsó része alapján helyettesítjük és azt is figyelembe vesszük az (5.49b) és az (5.51) egybevetése alapján, hogy az $\frac{E}{\rho}$-nak $\mathbf{I}_n$ az együtthatója:

$$\mathbf{M}_S = \frac{E}{\rho}\int_A \mathbf{R}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{R})\ \mathrm{d}A = \frac{E}{\rho}\,\mathbf{I}_n = E\,\kappa\,\mathbf{I}_n\,. \tag{5.52}$$

Az utóbbi képlet alapján

$$\mathbf{I}_n = \int_A \mathbf{R}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{R})\ \mathrm{d}A \tag{5.53}$$

a tehetetlenségi vektor értéke.

5.3.2. Az A keresztmetszet tehetetlenségi tenzorai. Az (5.53) összefüggés szerint homogén lineáris függvénye az $\mathbf{I}_n$ tehetetlenségi vektor az $\mathbf{n}$ vektornak. Visszaidézve a másodrendű tenzorok geometriai értelmezésével kapcsolatos és az 1.3. szakaszban részletezett ismereteket azt mondhatjuk, hogy az (5.53) összefüggés az $\mathbf{I}_n$-re képezi le az $\mathbf{n}$ vektort. Kihasználva, hogy a kifejtési tétel szerint $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$, ahol most $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$-nek $\mathbf{R}$, $\mathbf{b}$-nek pedig $\mathbf{n}$ felel meg, az (5.53) alatti összefüggésből a

$$\mathbf{I}_n = \int_A [(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R})\mathbf{n}-\mathbf{R}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})]\ \mathrm{d}A \tag{5.54}$$

eredmény következik. A további átalakítások célja az $\mathbf{n}$ vektor kiemelése. Vegyük figyelembe, hogy $\mathbf{n} = \boldsymbol{E}\cdot\mathbf{n}$ – itt $\boldsymbol{E}$ az egységtenzor – és hogy $\mathbf{R}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}) = \mathbf{R}\circ\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}$. Az utóbbi képletek kihasználásával kapjuk, hogy

$$\mathbf{I}_n = \underbrace{\int_A [(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R})\boldsymbol{E}-\mathbf{R}\circ\mathbf{R}]\ \mathrm{d}A}_{\boldsymbol{I}_S}\cdot\,\mathbf{n} = \boldsymbol{I}_S\cdot\mathbf{n}\,. \tag{5.55}$$

A fenti egyenlet megjelölt része az A keresztmetszet $\boldsymbol{I}_S$ *súlyponti tehetetlenségi tenzorát* értelmezi:

$$\boxed{\boldsymbol{I}_S = \int_A [(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R})\boldsymbol{E}-\mathbf{R}\circ\mathbf{R}]\ \mathrm{d}A} \tag{5.56}$$

Érdemes megjegyezni, hogy az (5.56) képlet a súlyponti tehetetlenségi tenzor koordinátarendszertől független alakja. Az (5.56) képlet alatti értelmezése szerint szimmetrikus a súlyponti tehetetlenségi tenzor, hiszen mind az $\boldsymbol{E}$ egységtenzor, mind pedig az $\mathbf{R}\circ\mathbf{R}$ diadikus szorzat szimmetrikus tenzorok.

Az xy koordinátarendszerben $\mathbf{R} = x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y$, míg $\boldsymbol{E} = \mathbf{e}_x\circ\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y\circ\mathbf{e}_y$. Következőleg

$$\begin{aligned}\boldsymbol{I}_S &= \int_A \big[(x^2+y^2)\,(\mathbf{e}_x\circ\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y\circ\mathbf{e}_y)-(x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y)\circ(x\mathbf{e}_x+y\mathbf{e}_y)\big]\ \mathrm{d}A = \\ &= \int_A \big[(y^2\mathbf{e}_x-xy\mathbf{e}_y)\circ\mathbf{e}_x+(-xy\mathbf{e}_x+x^2\mathbf{e}_y)\circ\mathbf{e}_y\big]\ \mathrm{d}A = \\ &= \big[\underbrace{\int_A y^2\,\mathrm{d}A}_{I_x}\mathbf{e}_x-\underbrace{\int_A yx\,\mathrm{d}A}_{I_{yx}}\mathbf{e}_y\big]\circ\mathbf{e}_x+\big[-\underbrace{\int_A xy\,\mathrm{d}A}_{I_{xy}}\mathbf{e}_x+\underbrace{\int_A y^2\,\mathrm{d}A}_{I_x}\mathbf{e}_y\big]\circ\mathbf{e}_y\,,\end{aligned}$$

azaz

$$\boldsymbol{I}_S = \underbrace{(I_x\mathbf{e}_x-I_{yx}\mathbf{e}_y)}_{\mathbf{I}_x}\circ\mathbf{e}_x+\underbrace{(-I_{xy}\mathbf{e}_x+I_y\mathbf{e}_y)}_{\mathbf{I}_y}\circ\mathbf{e}_y\,, \tag{5.57a}$$

vagyis

$$\boxed{\boldsymbol{I}_S = \mathbf{I}_x\circ\mathbf{e}_x+\mathbf{I}_y\circ\mathbf{e}_y\,,} \tag{5.57b}$$

ahol az $\mathbf{I}_x$ és $\mathbf{I}_y$ tehetetlenségi vektorok rendre az egymástól lineárisan független $\mathbf{e}_x$ és $\mathbf{e}_y$ egységvektorok képei az $\boldsymbol{I}_S$ tenzorhoz tartozó leképezésben. Az $\mathbf{I}_x$ és $\mathbf{I}_y$ tehetetlenségi vektorok ismeretében

$$\underset{(x,y)}{\underline{\mathbf{I}}_S} = \underline{\mathbf{I}}_S = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\mathbf{I}}_x & \underline{\mathbf{I}}_y \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{yx} & I_y \end{bmatrix} \tag{5.58}$$

a súlyponti tehetetlenségi tenzor mátrixa az xy KR-ben. Mivel a tenzor szimmetrikus az xy KR-ben felírt mátrixa is szimmetrikus.

Visszaidézve, hogy a súlyponti $\xi\eta$ koordinátarendszerben $\mathbf{R} = \xi\mathbf{e}_\xi + \eta\mathbf{e}_\eta$ a helyvektor és $\boldsymbol{E} = \mathbf{e}_\xi \circ \mathbf{e}_\xi + \mathbf{e}_\eta \circ \mathbf{e}_\eta$ az egységtenzor, majd szószerint megismételve az előző bekezdés lépéseit – felhasználva eközben az (5.50) alatti képleteket – azt kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{I}_S = \underbrace{(I_\xi \mathbf{e}_\xi - I_{y\xi}\mathbf{e}_\eta)}_{\mathbf{I}_\xi} \circ \mathbf{e}_\xi + \underbrace{(-I_{\xi\eta}\mathbf{e}_\xi + I_\eta \mathbf{e}_\eta)}_{\mathbf{I}_\eta} \circ \mathbf{e}_\eta \tag{5.59a}$$

a tehetetlenségi tenzor a súlyponti $\xi\eta$ KR-ben, ahol $\mathbf{I}_\xi$ és $\mathbf{I}_\eta$ a vonatkozó tehetetlenségi vektorok (az $\mathbf{e}_\xi$ és $\mathbf{e}_\eta$ egységvektorokhoz tartozó képvektorok). Következőleg

$$\boldsymbol{I}_S = \mathbf{I}_\xi \circ \mathbf{e}_\xi + \mathbf{I}_\eta \circ \mathbf{e}_\eta\,, \tag{5.59b}$$

a tenzor diadikus alakja és

$$\underset{(\xi,\eta)}{\underline{\mathbf{I}}_S} = \underline{\mathbf{I}}_S = \left[\begin{array}{c|c} \underline{\mathbf{I}}_\xi & \underline{\mathbf{I}}_\eta \end{array}\right] = \begin{bmatrix} I_\xi & -I_{\xi\eta} \\ -I_{\eta\xi} & I_\eta \end{bmatrix} \tag{5.60}$$

az $\boldsymbol{I}_S$ tenzor mátrixa a súlyponti $\xi\eta$ KR-ben.

Vegyük észre, hogy az (5.55) képlet szerint

$$\mathbf{I}_n = \boldsymbol{I}_S \cdot \mathbf{e}_n \qquad n = x, y \quad \text{és} \quad \mathbf{I}_\nu = \boldsymbol{I}_S \cdot \mathbf{e}_\nu \quad \nu = \xi, \eta \tag{5.61}$$

Következőleg

$$\boxed{\underset{(x,y)}{I_n} = \underset{(\xi,\eta)}{\mathbf{e}_n} \cdot \underset{(\xi,\eta)}{\boldsymbol{I}_S} \cdot \underset{(\xi,\eta)}{\mathbf{e}_n} \quad n = x, y \quad \text{és} \quad \underset{(\xi,\eta)}{I_\nu} = \underset{(x,y)}{\mathbf{e}_\nu} \cdot \underset{(x,y)}{\boldsymbol{I}_S} \cdot \underset{(x,y)}{\mathbf{e}_\nu} \quad \nu = \xi, \eta} \tag{5.62a}$$

továbbá

$$\boxed{\underset{(x,y)}{I_{mn}} = -\underset{(\xi,\eta)}{\mathbf{e}_m} \cdot \underset{(\xi,\eta)}{\boldsymbol{I}_S} \cdot \underset{(\xi,\eta)}{\mathbf{e}_n} \quad m, n = x, y \quad \text{és} \quad \underset{(\xi,\eta)}{I_{\mu\nu}} = -\underset{(x,y)}{\mathbf{e}_\mu} \cdot \underset{(x,y)}{\boldsymbol{I}_S} \cdot \underset{(x,y)}{\mathbf{e}_\nu}\,. \quad \mu, \nu = \xi, \eta} \tag{5.62b}$$

Az utóbbi eredmény szavakban a következőképp fogalmazható meg: Ha ismeretes az $\boldsymbol{I}_S$ tehetetlenségi tenzor és az $[\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y]$ $\{\mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_\eta\}$ egységvektorok [a $\xi\eta$] {az xy} KR-ben, akkor [az $(5.62\text{a,b})_1$] {az $(5.62\text{a,b})_2$} képletekkel számíthatók a tehetetlenségi tenzor mátrixának $[I_x, I_y$ és $I_{xy}]$ $\{I_\xi, I_\eta$ és $I_{\xi\eta}\}$ elemei [az xy] {a $\xi\eta$} KR-ben.

Megjegyezzük, hogy ez az eredmény a tenzorok transzformációjával kapcsolatos (1.83) képletek értelemszerű, azaz síkbeli viszonyokra vonatkozó alkalmazásával is felírható: a $\boldsymbol{W}$ helyére $\boldsymbol{I}_S$-t kell gondolni, el kell hagyni a z és ζ indexeket, illetve figyelembe kell, venni a nem diagonális elemekre vonatkozó előjelbeni eltérést.

Megjegyezzük végezetül, visszaidézve az 5.11. ábra jelöléseit és az (5.56) alatti definíciót, hogy az

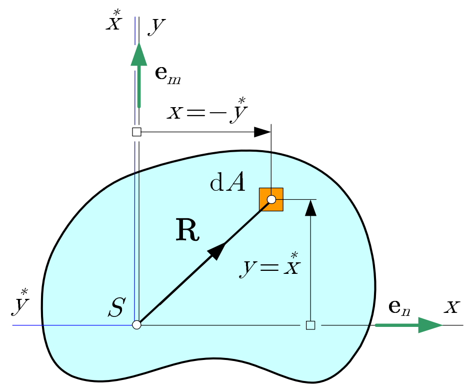
$$\boxed{\boldsymbol{I}_B = \int_A \left[(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\rho} \circ \boldsymbol{\rho}\right] \, \mathrm{d}A} \tag{5.63}$$

összefüggés értelmezi az A keresztmetszet tetszőleges B pontjához tartozó $\boldsymbol{I}_B$ tehetetlenségi tenzort.

5.3.3. A súlyponti tehetetlenségi tenzor főtengelyproblémája. Az 5.14. ábrán vázolt A keresztmetszet (síkidom) súlypontjához két KR-t az $nm = xy$, valamint az $nm = \overset{*}{x}\overset{*}{y}$ KR-eket kötjük. A második $\overset{*}{x}\overset{*}{y}$ KR az első xy KR óramutató járásával ellentétes irányba történő 90^o-os elforgatásával kapható meg. Következőleg

$$\int_A xy \,\mathrm{d}A = -\int_A \overset{*}{x}\overset{*}{y} \,\mathrm{d}A \,.$$

Ez az eredmény azt fejezi ki, hogy az $nm = xy$ KR 90^o-os elforgatásával az I_{nm} vegyes másodrendű nyomaték abszolút értéke változatlan marad, de az előjele megváltozik. Mivel a KR forgatása közben csak folytonosan változhat az I_{nm} értéke adódik a következtetés, hogy bármely A keresztmetszetnek (síkidomnak) van legalább két olyan egymásra kölcsönösen merőleges súlyponti nm tengelye, hogy az általuk meghatározott KR-ben



5.14. ábra.

$$I_{nm} = 0 \,.$$

Az ilyen tengelyeket súlyponti *tehetetlenségi főtengelyeknek*, a vonatkozó irányokat *főirányoknak*, a főtengelyek által kifeszített KR-t a *főtengelyek KR-ének*, a tengelyek egységvektorait pedig az $\mathbf{I}_S$ tehetetlenségi tenzor *sajátvektorainak* nevezzük. A főtengelyeket az $n=1$ és $m=2$ indexek azonosítják. A főtengelyekre számított másodrendű nyomatékokat rendre I_1 és I_2 jelöli. A számozást úgy választjuk meg, hogy teljesüljön az

$$I_1 \geq I_2$$

egyenlőtlenség. Mivel zérus az I_{12} vegyes másodrendű nyomaték, párhuzamosak a főirányokhoz tartozó tehetetlenségi vektorok a főirányokkal. Következésképp fennáll az

$$\mathbf{I}_i = \boldsymbol{I}_S \cdot \mathbf{e}_i = I_i \mathbf{e}_i \,, \qquad \mathbf{e}_i = \mathbf{n}_i \,, \qquad i = 1{,}2 \,. \tag{5.64}$$

egyenlet, ahol az $\mathbf{e}_i = \mathbf{n}_i$ vektorok a főtengelyek irányát adó egységvektorok. Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy jobbsodratú hármast alkot az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{e}_z$ vektorhármas. Ekkor $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_z$.

Legyen az egyelőre ismeretlen

$$\mathbf{n} = n_x \mathbf{e}_x + n_y \mathbf{e}_y \qquad |\mathbf{n}| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2} = 1 \tag{5.65}$$

vektor a keresett főirány irányvektora. A hozzá tartozó ugyancsak ismeretlen főmásodrendű nyomatékot I_n jelöli. Nyilvánvaló az (5.64) összefüggések alapján, hogy az $\mathbf{n}$ vektor és az I_n másodrendű nyomaték eleget kell, hogy tegyen az

$$\boldsymbol{I}_S \cdot \mathbf{n} = I_n \mathbf{n} \,,$$

vagy ami ugyanaz az

$$(\boldsymbol{I}_S - I_n \boldsymbol{E}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} \tag{5.66}$$

egyenletnek. Mátrixos alakra térve át a

$$\left\{ \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} - I_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

illetve a

$$\begin{bmatrix} I_x - I_n & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.67}$$

homogén lineáris egyenletrendszert kapjuk az n_x és n_y számítására. Triviálistól különböző megoldás csak akkor létezik, ha eltűnik az (5.66) egyenletrendszer determinánsa:

$$\begin{vmatrix} I_x - I_n & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y - I_n \end{vmatrix} = I_n^2 - \underbrace{(I_x + I_y)}_{I_I} I_n + \underbrace{I_x I_y - I_{xy}^2}_{I_{II}} = 0 \,, \tag{5.68a}$$

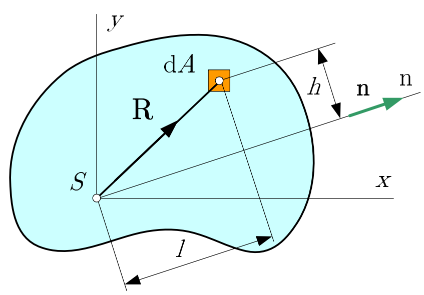
ahol

$$I_I = I_x + I_y \qquad \text{és} \qquad I_{II} = I_x I_y - I_{xy}^2 \tag{5.68b}$$

az $\boldsymbol{I}_S$ tenzor úgynevezett első és második skalárinvariánsa. Megjegyezzük, hogy valósak a másodfokú (5.68a) karakterisztikus egyenlet

$$I_n = I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x + I_y}{2}\right)^2 - I_x I_y + I_{xy}^2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \tag{5.69}$$

gyökei, hiszen pozitív a gyökjel alatt álló kifejezés értéke (pozitív az egyenlet diszkriminánsa).



5.15. ábra.

Nem nehéz belátni az 5.15. ábra, az ábráról leolvasható $\mathbf{n} \cdot \mathbf{R} = l$, $\mathbf{R}^2 - l^2 = h^2$ összefüggések és az (5.56) képlet alapján, hogy

$$\begin{aligned} I_n = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{I}_S \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \int_A [(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R})\mathbf{n} - \mathbf{R}(\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})] \, dA = \\ = \int_A \left[\mathbf{R}^2\mathbf{n}^2 - (\mathbf{R}\cdot\mathbf{n})^2\right] \, dA = \int_A \left[\mathbf{R}^2 - l^2\right] \, dA = \\ = \int_A h^2 \, dA > 0\,. \end{aligned} \tag{5.70}$$

A kapott eredmény szerint

(a) I_n valóban az n tengelyre számított másodrendű nyomaték,

(b) és mint ilyen szigorúan pozitív.

Következőleg az $I_{1,2}$ gyökök nemcsak valósak, hanem pozitív mennyiségek is.

Az I_1 gyök ismeretében az (5.68a) egyenletrendszer és az $|\mathbf{n}| = 1$ feltétel figyelembevételével adódóan vagy az

$$n_{x1}(I_x - I_1) - I_{xy} n_{y1} = 0\,, \qquad n_{x1}^2 + n_{y1}^2 = 1 \tag{5.71a}$$

egyenletek, vagypedig a

$$-n_{x1} I_{xy} + (I_y - I_1) n_{y1} = 0\,, \qquad n_{x1}^2 + n_{y1}^2 = 1 \tag{5.71b}$$

egyenletek megoldása – $(5.71a)_1$ és $(5.71b)_1$ nem független egymástól – adja az 1 jelű főirány $\mathbf{n}_1$ irányvektorának n_{x1} és n_{y1} koordinátáit. Ha már ismert az 1 jelű főirány $\mathbf{n}_1$ irányvektora, akkor a 2 jelű főirány $\mathbf{n}_2$ irányvektora az

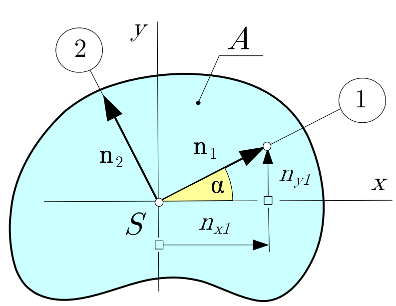
$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_1 \tag{5.72}$$

képletből számítható hiszen jobbsodratú vektorhármast alkot az $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ és $\mathbf{e}_z$ hármas.

A számítások során az I_2 gyök is használható. Mindössze annyi a változás, hogy I_2-t kell írni I_1 helyére az (5.71a,b) egyenletekben. A $\mathbf{n}_1$ irányvektor meghatározása pedig az $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{e}_z$ képlet jobboldalán álló vektorszorzat kiszámítását igényli.

Mivel zérus a vegyes másodrendű nyomaték a főtehetetlenségi tengelyek által kifeszített KR-ben, ugyanitt diagonális a tehetetlenségi tenzor mátrixa:

$$\underset{(1,2)}{\underline{\mathbf{I}}_S} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}. \tag{5.73}$$



5.16. ábra.

5.3.4. Az 1 jelű főtengely és az x tengely által bezárt szög számítása. Az 5.16 ábra a főtengelyek KR-ét szemlélteti. Az ábra és az $(5.71a,b)_1$ képletek egybevetése szerint

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{n_{y1}}{n_{x1}} = \frac{I_x - I_1}{I_{xy}} = \frac{I_{xy}}{I_y - I_1} \tag{5.74}$$

az egyes főtengely x tengellyel bezárt α szögének a tangense. Vegyük észre, hogy a fenti összefüggés csak akkor használható, ha ismeretesek a főtehetetlenségi nyomatékok.

Az α szög, amint az kiderül majd a továbbiakból, a főtehetetlenségi nyomatékok ismerete nélkül is meghatározható. Leolvasható ui. az 5.16 ábráról, hogy az xyz KR-ben

$$\mathbf{n}_1 = \cos\alpha\,\mathbf{e}_x + \sin\alpha\,\mathbf{e}_y\,, \quad \mathbf{n}_2 = -\sin\alpha\,\mathbf{e}_x + \cos\alpha\,\mathbf{e}_y \tag{5.75}$$

a két főtengely $(5.65)_2$ normálási feltételt is kielégítő irányvektora. Ha felhasználjuk az $(5.62\text{b})_2$ képletet – ebben a görögbetűs KR-nek a főtengelyek KR-e felel meg: μ az első, ν pedig a második főtengelyt jelenti – akkor írhatjuk, hogy

$$I_{12} = -\underset{(x,y)}{\mathbf{n}_1} \cdot \underset{(x,y)}{\boldsymbol{I}_S} \cdot \underset{(x,y)}{\mathbf{n}_2} = -\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} \\ -I_{xy} & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} =$$

$$= (I_x - I_y)\sin\alpha\,\cos\alpha + \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) I_{xy} = 0\,,$$

hiszen eltűnik a főtengelyek KR-ében a vegyes másodrendű nyomaték. Innen adódik a jól ismert $\sin\alpha\,\cos\alpha = \sin 2\alpha/2$ és $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ trigonometrikus egyenletek felhasználásával, hogy

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{xy}}{I_x - Iy}\,.} \tag{5.76}$$

5.3.5. Feszültségek számítása az igénybevételekkel ferde hajlítás esetén. Az (5.52) és (5.55) képletek egybevetéséből adódó

$$\mathbf{M}_S = \frac{E}{\rho}\,\boldsymbol{I}_S \cdot \mathbf{n} = E\kappa\,\boldsymbol{I}_S \cdot \mathbf{n} \tag{5.77}$$

egyenlet a keresztmetszetet terhelő $\mathbf{M}_S$ hajlítónyomaték és a semleges tengely irányát kijelölő $\mathbf{n}$ egységvektor közötti összefüggés. A továbbiakban az a célunk, hogy a fenti egyenletből az $\mathbf{M}_S$ nyomaték segítségével fejezzük ki a semleges tengely $\mathbf{n}$ irányvektorát. Ennek birtokában ugyanis közvetlenül az $\mathbf{M}_S$ nyomatékkal fejezhető ki az (5.46) összefüggés felhasználásával a $\boldsymbol{\rho}_z = \sigma_z \mathbf{e}_z$ feszültségvektor.

A számításokat külön-külön tekintjük majd az 1 és 2 jelű főtengelyek, illetve a z tengely által kifeszített KR-ben, majd pedig az xyz KR-ben. A főtengelyek KR-ének használata mellett az az érv szól, hogy egyszerűek az átalakítások. Az xyz KR-ben végzett átalakítások részeredményei pedig a vékonyszelvényű prizmatikus rudak nyírása kapcsán kerülnek majd felhasználásra a 8. Fejezetben.

1. A fentiekkel összhangban tételezzük fel, hogy az 1 és 2 jelű főtengelyek és a z tengely által kifeszített KR-ben vagyunk. Ebben a KR-ben

$$\begin{bmatrix} M_{h1} \\ -M_{h2} \end{bmatrix} = \frac{E}{\rho} \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = E\kappa \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} \tag{5.78}$$

az (5.77) egyenlet mátrix alakja. Itt $M_1 = M_{h1}$ és $M_2 = -M_{h2}$ rendre az $\mathbf{M}_S$ hajlítónyomaték két koordinátája, illetve a koordinátairányú hajlítónyomaték – M_2 és M_{h2} előjelben különbözik egymástól. Ha átszorozzuk a fenti egyenletet az $\boldsymbol{I}_S$ tenzor mátrixának

$$\begin{bmatrix} 1/I_1 & 0 \\ 0 & 1/I_2 \end{bmatrix}$$

alakú inverzével, akkor mátrixokkal írva az

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \frac{\rho}{E} \begin{bmatrix} 1/I_1 & 0 \\ 0 & 1/I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{h1} \\ -M_{h2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{n} = \frac{\rho}{E}\left(\frac{M_{h1}}{I_1}\mathbf{n}_1 - \frac{M_{h2}}{I_2}\mathbf{n}_2\right) \tag{5.79}$$

eredményt kapjuk. A semleges tengely irányát kijelölő $\mathbf{n}$ egységvektor ismeretében az (5.46) összefüggésből

$$\boldsymbol{\rho}_z = \sigma_z \mathbf{e}_z = \frac{E}{\rho}\,\mathbf{n} \times \mathbf{R} = \left(\frac{M_{h1}}{I_1}\mathbf{n}_1 - \frac{M_{h2}}{I_2}\mathbf{n}_2\right) \times (x_1\mathbf{n}_1 + x_2\mathbf{n}_2) =$$

$$= \left(\frac{M_{h1}}{I_1}x_2 + \frac{M_{h2}}{I_2}x_1\right)\mathbf{e}_z \tag{5.80}$$

a feszültségvektor számításának képlete. Tegyük fel, hogy egybeesik az x tengely az 1 jelű főtengellyel, az y tengely pedig a 2 jelű főtengellyel. Ekkor $x_1 = x$, $M_{h1} = M_{hx}$, $I_1 = I_x$ és $x_2 = y$, $M_{h2} = M_{hy}$ $I_2 = I_y$. Következésképp a megszokott xyz KR-ben

$$\boxed{\sigma_z = \frac{M_{hx}}{I_x}y + \frac{M_{hy}}{I_y}x} \tag{5.81}$$

a normálfeszültség képlete ferde hajlítás esetén. A 8.3 szakaszban ugyanezt az eredményt a szuperpozíció elv felhasználásával kapjuk majd meg.

2. Másodszorra tételezzük fel, hogy a vizsgálatokat a főtengelyek és a z tengely által kifeszített KR-től különböző xyz KR-ben végezzük. Az átalakításokhoz szükség lesz néhány fogalomra. Azt mondjuk majd, hogy az $\boldsymbol{I}_S^{-1}$ tenzor az $\boldsymbol{I}_S$ tenzor inverze, ha teljesül az
$$\boldsymbol{I}_S^{-1} \cdot \boldsymbol{I}_S = \boldsymbol{I}_S \cdot \boldsymbol{I}_S^{-1} = \boldsymbol{E} \tag{5.82a}$$
egyenlet, ahol $\boldsymbol{E}$ az egységtenzor. A fenti egyenlet a vonatkozó tenzorok xyz KR-ben tekintett mátrixaira nézve is fenn kell, hogy álljon:
$$\underline{\mathbf{I}}_S^{-1}\, \underline{\mathbf{I}}_S = \underline{\mathbf{I}}_S\, \underline{\mathbf{I}}_S^{-1} = \underline{\mathbf{E}} \tag{5.82b}$$
Nem nehéz ellenőrizni, hogy az
$$\underline{\mathbf{I}}_S^{-1} = \frac{1}{I_x I_y - I_{xy}^2} \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{yx} & I_x \end{bmatrix} = \frac{1}{I_{II}} \begin{bmatrix} I_y & I_{xy} \\ I_{yx} & I_x \end{bmatrix} = \left[\underline{\mathbf{I}}_x^{-1} | \underline{\mathbf{I}}_y^{-1} \right] \tag{5.83}$$
mátrix, ahol a képletből kiolvashatóan
$$\mathbf{I}_x^{-1} = \frac{1}{I_{II}} \left(I_y \mathbf{e}_x + I_{yx} \mathbf{e}_y \right) = \frac{1}{I_{II}} \left(-I_{yx} \mathbf{e}_x + I_y \mathbf{e}_x \right) \times \mathbf{e}_z = \frac{1}{I_{II}} \mathbf{I}_y \times \mathbf{e}_z \tag{5.84a}$$
$$\mathbf{I}_y^{-1} = \frac{1}{I_{II}} \left(I_{xy} \mathbf{e}_x + I_x \mathbf{e}_y \right) = \frac{1}{I_{II}} \mathbf{e}_z \times \left(I_x \mathbf{e}_x - I_{yx} \mathbf{e}_y \right) = \frac{1}{I_{II}} \mathbf{e}_y \times \mathbf{I}_x \tag{5.84b}$$
rendre az $\mathbf{e}_x$ és $\mathbf{e}_y$ képe az $\boldsymbol{I}_S^{-1}$ tenzorhoz tartozó leképezésben, eleget tesz az (5.82b) egyenletnek. Következésképp
$$\boldsymbol{I}_S^{-1} = \frac{1}{I_{II}} \left[(\mathbf{I}_y \times \mathbf{e}_z) \circ \mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{I}_x) \circ \mathbf{e}_y \right] \tag{5.85}$$
az $\boldsymbol{I}_S^{-1}$ tenzor diádikus előállítása.

Az $\boldsymbol{I}_S \cdot \boldsymbol{I}_S^{-1}$ szorzat valóban az egységtenzort adja. Ennek belátásához vegyük figyelembe, (a) hogy
$$\mathbf{I}_x \cdot (\mathbf{I}_y \times \mathbf{e}_z) = \mathbf{I}_y \cdot (\mathbf{e}_z \times \mathbf{I}_x) = [\mathbf{e}_z \mathbf{I}_x \mathbf{I}_y] = I_{II} \tag{5.86}$$
a vegyesszorzatok ismert tulajdonságai alapján, továbbá (b) hogy szimmetrikus az $\boldsymbol{I}_S$ tenzor. A mondottak alapján kapjuk, hogy
$$\boldsymbol{I}_S \cdot \boldsymbol{I}_S^{-1} = \frac{1}{I_{II}} \underbrace{(\mathbf{e}_x \circ \mathbf{I}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{I}_y)}_{\boldsymbol{I}_S^T = \boldsymbol{I}_S} \cdot \left[(\mathbf{I}_y \times \mathbf{e}_z) \circ \mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_y \times \mathbf{I}_x) \circ \mathbf{e}_y \right] =$$
$$= \frac{1}{I_{II}} \left\{ \underbrace{[\mathbf{I}_x \mathbf{I}_y \mathbf{e}_z]}_{I_{II}} (\mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x) + \underbrace{[\mathbf{I}_y \mathbf{e}_z \mathbf{I}_y]}_{I_{II}} (\mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y) \right\} = \mathbf{e}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y \circ \mathbf{e}_y = \boldsymbol{E}\,,$$
ami valóban a kétméretű egységtenzor.

Igazolható, hogy
$$\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{I}_S \times \mathbf{e}_z = -\frac{1}{I_{II}} \boldsymbol{I}_S^{-1} \quad \text{és} \quad \mathbf{e}_z \times \boldsymbol{I}_S^{-1} \times \mathbf{e}_z = \frac{1}{I_{II}} \boldsymbol{I}_S \tag{5.87}$$
Az első esetben kihasználva az $\boldsymbol{I}_S$ tenzor diádikus előállítását írhatjuk, hogy
$$\mathbf{e}_z \times \boldsymbol{I}_S \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z \times (\mathbf{I}_x \circ \mathbf{e}_x + \mathbf{I}_y \circ \mathbf{e}_y) \times \mathbf{e}_z = (\mathbf{e}_z \times \mathbf{I}_x) \circ (\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z) + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{I}_y) \circ (\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z) =$$
$$= -\left[(\mathbf{e}_z \times \mathbf{I}_x) \circ \mathbf{e}_y + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{I}_y) \circ \mathbf{e}_x \right] = \left[(\mathbf{I}_y \times \mathbf{e}_z) \circ \mathbf{e}_x + (\mathbf{e}_z \times \mathbf{I}_x) \circ \mathbf{e}_y \right]\,.$$
Az eredmény összevetése az (5.85) képlettel az első állítás igazolását jelenti. A második állítás igazolása hasonlóan történhet. Ezt az 5.5 gyakorlatra hagyjuk.

Szorozzuk meg balról az (5.77) egyenletet $\boldsymbol{I}_S^{-1}$-el. Kapjuk, hogy
$$\boldsymbol{I}_S^{-1} \cdot \mathbf{M}_S = \frac{E}{\rho} \underbrace{\boldsymbol{I}_S^{-1} \cdot \boldsymbol{I}_S}_{\boldsymbol{E}} \cdot \mathbf{n} = \frac{E}{\rho} \mathbf{n}\,,$$
ahonnan
$$\mathbf{n} = \frac{\rho}{E} \boldsymbol{I}_S^{-1} \cdot \mathbf{M}_S = \frac{\rho}{E} \mathbf{M}_S \cdot \boldsymbol{I}_S^{-1}\,, \tag{5.88}$$
hiszen szimmetrikus az $\boldsymbol{I}_S^{-1}$. Az $\mathbf{n}$ vektor értéke, tekintettel az $\boldsymbol{I}_S^{-1}$ (5.83) alatti mátrixára
$$\mathbf{n} = \frac{\rho}{E} \frac{1}{I_{II}} \left[(M_{hx} I_y - M_{hy} I_{xy})\, \mathbf{e}_x + (M_{hx} I_{xy} - M_{hy} I_x)\, \mathbf{e}_y \right]\,. \tag{5.89}$$

Visszahelyettesítve az (5.46) összefüggésbe

$$\boldsymbol{\rho}_z = \sigma_z \mathbf{e}_z = \frac{E}{\rho}\,\mathbf{n}\times\mathbf{R} = \frac{1}{I_{II}}\left[(M_{hx}I_y - M_{hy}I_{xy})\,\mathbf{e}_x + (M_{hx}I_{xy} - M_{hy}I_x)\,\mathbf{e}_y\right]\times(x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y) =$$

$$= \frac{1}{I_{II}}\left[(M_{hx}I_y - M_{hy}I_{xy})\,y + (M_{hy}I_x - M_{hx}I_{xy})\,x\right]\mathbf{e}_z$$

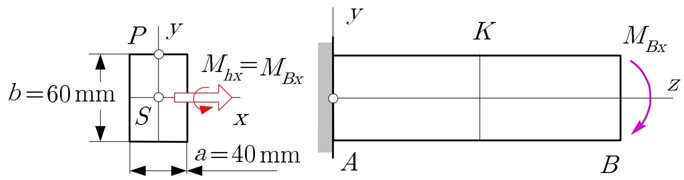
a feszültségvektor. Innen

$$\boxed{\sigma_z = \frac{1}{I_{II}}\left[(I_y y - I_{xy}x) + (I_x x - I_{xy}y)\,M_{hy}\right] = \frac{y-\chi_y}{I_x - \chi_x\chi_y}\,M_{hx} + \frac{x-\chi_x}{I_y-\chi_x\chi_y}M_{hy}\,.} \tag{5.90}$$

a normálfeszültség értéke, amikor nem a főtengelyek KR-ében vagyunk. A képletben $\chi_x = I_{xy}/I_x$ és $\chi_y = I_{xy}/I_y$. Ha $I_{xy}=0$, akkor $\chi_x=\chi_y=0$, azaz ismét a főtengelyek KR-ében vagyunk, ahol a fenti σ_z-t adó képlet természetszerűen egybeesik az (5.81) formulával.

5.4. Mintafeladatok

5.1. Az 5.17. ábrán vázolt téglalapkeresztmetszetű acélrudat az M_{Bx} nyomaték terheli. (a) Határozza meg az M_{Bx} értékét, ha a maximális normálfeszültség eléri a $\sigma_F = 240\,\mathrm{MPa}$ folyáshatárt. (b) Számítsa ki a feszültségi és alakváltozási tenzorok mátrixait a K keresztmetszet P pontjában, ha $M_{Bx}=3.84\,\mathrm{kNm}$ ($E_{\text{acél}}\approx 200\,\mathrm{GPa}$, $\nu\approx 1/3$). (c) Mekkora ez esetben a K keresztmetszet felső oldalélének Δa méretváltozása.



5.17. ábra.

A számításokhoz szükség lesz a téglalap keresztmetszet x tengelyre számított I_x másodrendű nyomatékára. Az (5.33a) képlet szerint

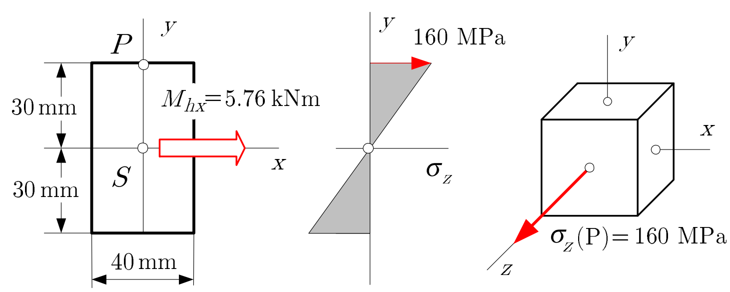
$$I_x = \frac{ab^3}{12} = \frac{40\,\mathrm{mm}\times(60\,\mathrm{mm})^3}{12} = 7.2\times 10^5\,\mathrm{mm}^4\,.$$

Mivel a rúdnak tiszta hajlítás az igénybevétele az (5.21) képlet alapján írhatjuk, hogy

$$\sigma_{\max} = \sigma_F = \frac{|M_{Bx}|}{I_x}\frac{b}{2} \qquad \text{ahonnan} \qquad |M_{Bx}| = \frac{2\sigma_F I_x}{b}$$

és végül

$$M_{Bx} = \frac{2\times 240\mathrm{MPa}\times 7.2\times 10^5\,\mathrm{mm}^4}{60\,\mathrm{mm}} = 5.76\times 10^6\,\mathrm{Nmm} = 5.76\,\mathrm{kNm}\,.$$



5.18. ábra.

A (b) kérdésben terhelésként megadott nyomaték ennek a nyomatéknak a két harmada. A P pont a felső oldalélen van, ahol maximális a normálfeszültség. Következik tehát, hogy ennek értéke a $\sigma_F = 240\,\mathrm{MPa}$

folyáshatár két harmada: $\sigma_z(P) = 160\,\text{MPa}$. Mivel érvényes az egyszerű Hook törvény az (5.7a), (5.2) és (5.1) képletek szerint

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{160\,\text{Mpa}}{2\times 10^5\,\text{Mpa}} = 8\times 10^{-4} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z = -\frac{8}{3}\times 10^{-4} \quad \text{és} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0\,.$$

Ezekkel az eredményekkel

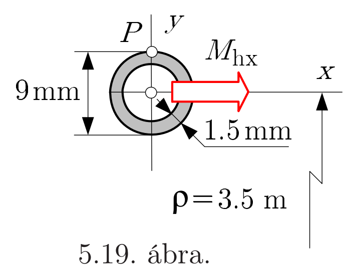
$$\underline{\mathbf{T}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 160 \end{bmatrix} \text{MPa} \qquad \text{és} \qquad \underline{\mathbf{A}}_P = \begin{bmatrix} -2.666 & 0 & 0 \\ 0 & -2.666 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

a feszültségi és alakváltozási tenzor mátrixa. Az 5.18. ábra a K keresztmetszetet és annak igénybevételét, az y tengely menti feszültségeloszlást, valamint a P pontbeli feszültségi állapotot szemlélteti.

Mivel állandó a keresztirányú fajlagos nyúlás a K keresztmetszet felső oldaléle mentén a Δa méretváltozás, értelemszerűen alkalmazva a (3.21) képletet, az alábbiak szerint számítható:

$$\Delta a = \varepsilon_k a = -\left(2+\frac{2}{3}\right)\times 10^{-4}\times 40\,\text{mm} = -1.066\,7\times 10^{-2}\,\text{mm}.$$

5.2. Az 5.19. ábra tiszta hajlításnak kitett aluminium rúd keresztmetszetét szemlélteti (E_{al}=70 GPa, $\nu_{\text{al}}\approx$0.3). Határozza meg, felhasználva az ábra adatait, (a) az alakváltozási tenzor mátrixát a keresztmetszet P pontjában, és (b) ugyanitt a normálfeszültség értékét.



5.19. ábra.

Az (5.4) és (5.2) képletek alapján

$$\varepsilon_z(P) = \varepsilon_z = \frac{y_P}{\rho} = \frac{4.5\,\text{mm}}{3.5\times 10^3\,\text{mm}} = 1.2857\times 10^{-3}\,,$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu_{al}\varepsilon_z = \\ = -0.3\times 1.2857\times 10^{-3} = -3.8571\times 10^{-4}$$

és

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0\,.$$

Következésképp

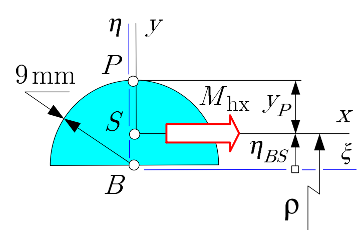
$$\underline{\mathbf{A}}_P = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.8571 & 0 & 0 \\ 0 & -3.8571 & 0 \\ 0 & 0 & 12.857 \end{bmatrix} \times 10^{-4}$$

az alakváltozási tenzor mátrixa. Ami pedig a (b) kérdést illeti az (5.7a) egyszerű Hook törvényből

$$\sigma_z(P) = E_{al}\varepsilon_z = 70.0\times 10^3\,\text{MPa}\times 1.2857\times 10^{-3} \approx 90\,\text{MPa}$$

a keresett normálfeszültség.

5.3. Az 5.20. ábrán vázolt félkörkeresztmetszetű rúdnak tiszta hajlítás az igénybevétele. A keresztmetszet P pontjában $\varepsilon_P = 1.0361\times 10^{-3}$ a nyúlásmérő bélyeggel mért fajlagos nyúlás a z irányban. Mekkora a rúd görbületi sugara? ($\eta_{BS} = 4r/3\pi$)



5.20. ábra.

A P pont

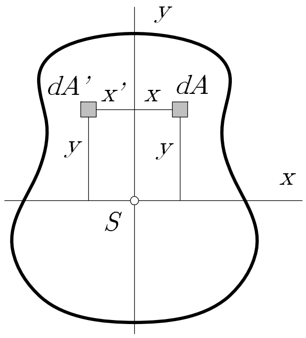
$$y_P = r - \eta_{BS} = r - \frac{4r}{3\pi} = 9\,\text{mm} - \frac{4\times 9\,\text{mm}}{3\pi} = 5.1803\,\text{mm}$$

helykoordinátájával, kihasználva az (5.4) képletet, kapjuk a

$$\rho = \frac{y_P}{\varepsilon_P} = \frac{5.180\,3\,\text{mm}}{1.0361\times 10^{-3}} \approx 5000\,\text{mm}$$

görbületi sugarat.

5.4. Mutassa meg, hogy zérus az A keresztmetszet $x-y$ súlyponti tengelypárra számított másodrendű nyomatéka, ha szimmetria tengely az y tengely.



5.21. ábra.

Az 5.21. ábrán vázolt A keresztmetszetnek az y tengely a szimmetriatengelye. A szimmetria miatt maga a keresztmetszet olyan szimmetrikusan elhelyezkedő $\mathrm{d}A$ és $\mathrm{d}A'$ felületelemekre bontható – egy ilyen felületelempárt az ábra is feltüntet –, amelyeknek azonos az y koordinátája, de az x koordinátájuk előjele különböző: $x' = -x$. Ha tehát páronként összegezünk

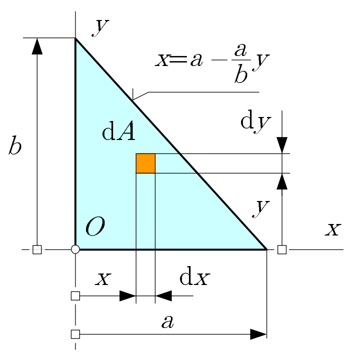
$$xy\,\mathrm{d}A + x'y\,\mathrm{d}A' = 0\,.$$

Ez egyben azt is jelenti, hogy

$$I_{xy} = \int_A xy\,\mathrm{d}A = 0\,.$$

A fenti eredmény szerint valóban zérus az A keresztmetszet $x-$ $-y$ súlyponti tengelypárra vett vett másodrendű nyomatéka, ha szimmetria tengely az y tengely.

5.5. Határozza meg az 5.22. ábrán vázolt derékszögű háromszög esetén az oldalélek által alkotott xy KR-ben az I_x, I_y és I_{xy} másodrendű nyomatékokat.



5.22. ábra.

Felhasználva az ábra jelöléseit a definíciót adó $(5.30\mathrm{a})_1$ képlet alapján írható, hogy

$$I_x = \int_A y^2\,\mathrm{d}A = \int_0^b y^2 \left[\int_0^{x=a-ay/b} \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^b ay^2 \left[1 - \frac{y}{b}\right] \mathrm{d}y = a\left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4b}\right]\Big|_0^b = \frac{ab^3}{12}\,. \qquad (5.91\mathrm{a})$$

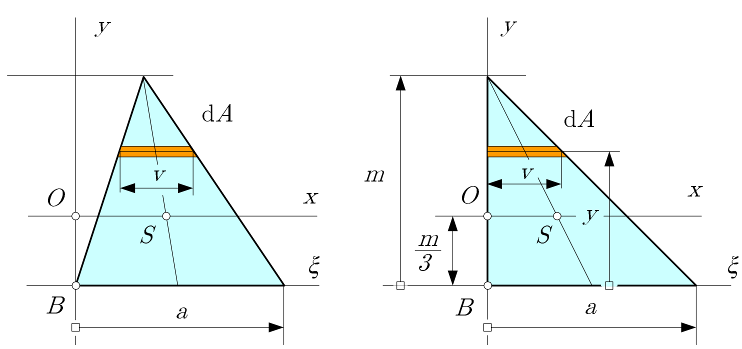
Ugyanilyen módon kapjuk az (5.30b) képlet alapján, hogy

$$I_{xy} = \int_A xy\,\mathrm{d}A = \int_0^b y \left[\int_0^{x=a-ay/b} x\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^b \frac{1}{2}ay\left[1 - \frac{y}{b}\right]^2 \mathrm{d}y = a^2\left[\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3b} + \frac{y^4}{4b^2}\right]\Big|_0^b = \frac{a^2b^2}{12}\,. \qquad (5.91\mathrm{b})$$

Nyilvánvaló az I_x-et adó képlet alapján, hogy $I_y = a^3b/12$.

5.6. Határozza meg az a alapú és m magasságú általános háromszög másodrendű nyomatékát az alapjára (azaz a ξ tengelyre), valamint az alappal párhuzamos S súlyponti tengelyre (azaz az x tengelyre).



5.23. ábra.

Vegyük észre, hogy a ξ tengelyen nyugvó alappal szemközti csúcs az alappal párhuzamos és a csúcson áthaladó egyenesen történő eltolása nem változtatja meg a ξ tengelyre számított másodrendű nyomatékot. Ez azt eredményezi, hogy azonos az általános háromszög, és a tőle jobbra fekvő derékszögű háromszög ξ

tengelyre számított másodrendű nyomatéka. Következőleg alkalmazható az (5.91a) összefüggés, amivel

$$I_\xi = \frac{am^3}{12}\,. \tag{5.92}$$

A súlyponti x tengelyre számított másodrendű nyomaték ezek után az ábra adataival és az $(5.42)_1$ Steiner tétel felhasználásával adódik:

$$I_x = I_\xi - y_{SB}^2\,A = \frac{am^3}{12} - \frac{m^2}{9}\frac{am}{2} = \frac{am^3}{36}\,. \tag{5.93}$$

5.7. Tegyük fel, hogy alumíniumból készült az 5.3. Mintafeladat félkörszelvénye. Határozza meg ez esetben (a) P és B pontokban a σ_z normálfeszültség értékét, valamint (b) a hajlítónyomaték értékét ($E_{\rm al} = 70\,\text{GPa}$).

Figyelembe véve, hogy érvényes az egyszerű Hook törvény az (5.7a) képlet szerint

$$\sigma_z = E_{al}\varepsilon_P = 70.0\times 10^3\text{MPa}\times 1.0361\times 10^{-3}\approx 72.5\,\text{MPa}$$

a normálfeszültség a P pontban. Mivel

$$\eta_{BS} = \frac{4r}{3\pi} = \frac{4\times 9\,\text{mm}}{3\pi} = 3.819\,7\,\text{mm}\,,$$

az S pont η koordinátája és homogén lineáris függvénye a σ_z normálfeszültség az y koordinátának a

$$\frac{\sigma_z(P)}{\sigma_z(B)} = \frac{y_P}{y_{SB}} \quad \text{aránypárból} \qquad \sigma_z(B) = -\frac{\eta_{BS}}{y_P}\sigma_z(P) = -\frac{3.819\,7\,\text{mm}}{5.180\,3\,\text{mm}}\times 72.5\,\text{MPa}\approx -53.5\,\text{MPa}\,.$$

A hajlítónyomaték számításához szükség lesz a félkörkeresztmetszet x tengelyre vett I_x másodrendű nyomatékára. A keresztmetszet

$$A = \frac{1}{2}\,r^2\pi = \frac{1}{2}\,(9\,\text{mm})^2\pi = 127.23\,\text{mm}^2$$

területének, illetve ξ tengelyre számított

$$I_\xi = \frac{1}{2}\frac{d^4\pi}{64} = \frac{(18\,\text{mm})^4\pi}{128} = 2576.5\,\text{mm}^4$$

másodrendű nyomatékának ismeretében az $(5.42)_1$ Steiner tételből

$$I_x = I_\xi - y_{SB}^2 A = 2576.5\,\text{mm}^4 - (3.8197\,\text{mm})^2\times 127.23\,\text{mm}^2 = 720.2\,\text{mm}^4\,.$$

A fenti adatokkal illetve a görbületi sugár számított értékével az (5.14) képletből

$$M_{hx} = \frac{I_x E}{\rho} = \frac{720.2\,\text{mm}^4\times 70.0\times 10^3\text{MPa}}{5000\text{mm}^4}\approx 10.0\,\text{Nm}\,.$$

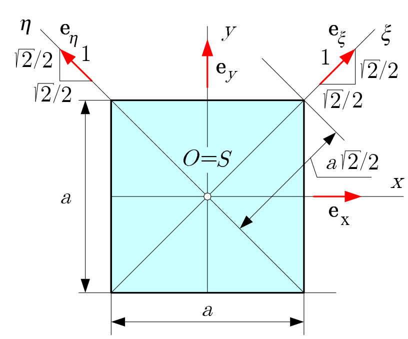
a keresett hajlítónyomaték.

5.8. Határozza meg az 5.24. ábrán vázolt négyzet átlói által kifeszített $\xi\eta$ KR-ben a négyzet súlyponti tehetetlenségi tenzorának mátrixát.

Tekintettel a téglalap másodrendű nyomatékaival kapcsolatos (5.33a,b) képletekre, valamint arra a körülményre, hogy mind az x, mind pedig az y tengely szimmetriatengely – utalunk ehelyütt az 5.4. Mintafeladatra is – azt kapjuk, hogy

$$\underset{(x,y)}{\underline{\mathbf{I}}_S} = \frac{1}{12}\begin{bmatrix} a^4 & 0\\ 0 & a^4\end{bmatrix}$$

a súlyponti tehetetlenségi tenzor mátrixa az xy KR-ben.



5.24. ábra.

Leolvasható az is az ábráról, hogy

$$\mathbf{e}_\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y) \qquad \text{és} \qquad \mathbf{e}_\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)\,.$$

A fentiek birtokában már alkalmazhatók az $(5.62\text{a})_2$ és az $(5.62\text{b})_2$ képletek. A számítások során mátrix jelölésekre érdemes áttérni a számítások megkönnyítése érdekében. Így az

$$\underset{(\xi,\eta)}{I_\xi} = \underset{(x,y)}{\mathbf{e}_\xi}\cdot\underset{(x,y)}{\boldsymbol{I}_S}\cdot\underset{(x,y)}{\mathbf{e}_\xi} = \underline{\mathbf{e}}_\xi^T\,\underline{\mathbf{I}}_S\,\underline{\mathbf{e}}_\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{12}\begin{bmatrix} a^4 & 0\\ 0 & a^4\end{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1\\ 1\end{bmatrix} = \frac{a^4}{12} = I_x \tag{5.94a}$$

$$\underset{(\xi,\eta)}{I_\eta} = \underset{(x,y)}{\mathbf{e}_\eta} \cdot \underset{(x,y)}{\boldsymbol{I}_S} \cdot \underset{(x,y)}{\mathbf{e}_\eta} = \underline{\mathbf{e}}_\eta^T \, \underline{\mathbf{I}}_S \, \underline{\mathbf{e}}_\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{a^4}{12} = I_y \tag{5.94b}$$

és az

$$\underset{(\xi,\eta)}{I_{\xi\eta}} = \underset{(x,y)}{\mathbf{e}_\xi} \cdot \underset{(x,y)}{\boldsymbol{I}_S} \cdot \underset{(x,y)}{\mathbf{e}_\eta} = \underline{\mathbf{e}}_\xi^T \, \underline{\mathbf{I}}_S \, \underline{\mathbf{e}}_\eta = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{12} \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \tag{5.94c}$$

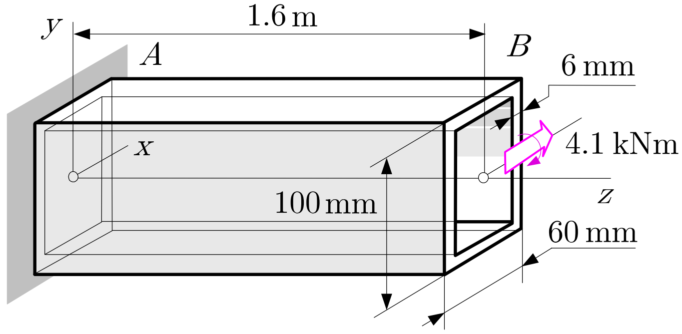
eredményeket kapjuk. Következőleg

$$\underset{(\xi,\eta)}{\underline{\mathbf{I}}_S} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} a^4 & 0 \\ 0 & a^4 \end{bmatrix} = \underset{(x,y)}{\underline{\mathbf{I}}_S} .$$

Ugyanez az eredmény más módon is megkapható. Mivel szimmetriatengely a ξ és η tengely $I_{\xi\eta} = 0$. Az S pont körüli 90^o-os elforgatás önmagába viszi át a négyzetet és ezért $I_\xi = I_\eta$. Végezetül vegyük észre, hogy a négyzet négy olyan egybevágó egyenlőszárú derékszögű háromszögre bontható fel, melyek egyik oldala a ξ és az ezzel egyenlő másik oldala pedig az η tengelyen nyugszik. Következőleg alkalmazható az (5.91a) összefüggés:

$$I_\xi = 4 \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)^3}{12} = \frac{a^4}{12}$$

5.9. Az 5.25. ábra a zártszelvényű AB acélrudat szemlélteti ($E_{\text{acél}} = 200\,\text{GPa}$). A rúdnak 6 mm a falvastagsága. Legyen $\sigma_{\text{meg}} = 120\,\text{MPa}$ a megengedett feszültség. Ellenőrizze a rudat és számítsa ki a deformálódott középvonal görbületi sugarát.

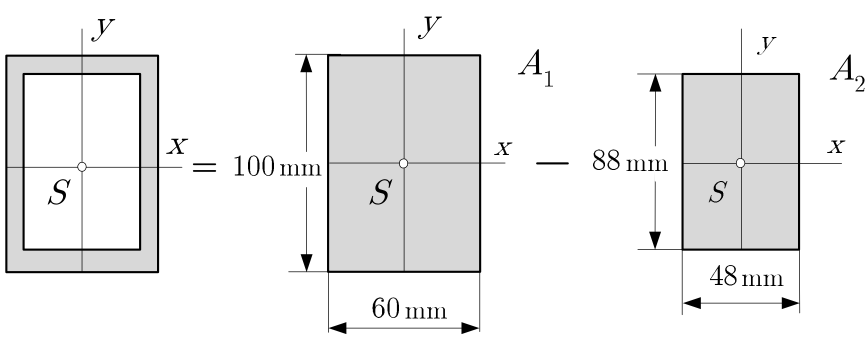


5.25. ábra.

Szépen szemlélteti az 5.26. ábra hogy a rúd keresztmetszete az A_1 és A_2 jelű téglalapok különbsége. Jelölje rendre I_{x1} és I_{x2} az A_1 és A_2 jelű téglalapok x tengelyre számított másodrendű nyomatékát. Az (5.33a) képlet értelemszerű felhasználásával adódik, hogy

$$I_x = I_{x1} - I_{x2} = \frac{60 \times 100^3}{12} - \frac{48 \times 88^3}{12} = 2.274\,1 \times 10^6\,\text{mm}^4$$

a rúd keresztmetszetének x tengelyre számított másodrendű nyomatéka.



5.26. ábra.

Mivel a rúd anyaga húzásra és nyomásra egyformán viselkedik az (5.21) képlet felhasználásával a

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e = \frac{4.1 \times 10^6 \text{Nmm}}{2.274\,1 \times 10^6 \text{mm}^4} \times 50 \text{mm} \approx 90\,\text{MPa} < \sigma_{\text{meg}} = 120\,\text{MPa}$$

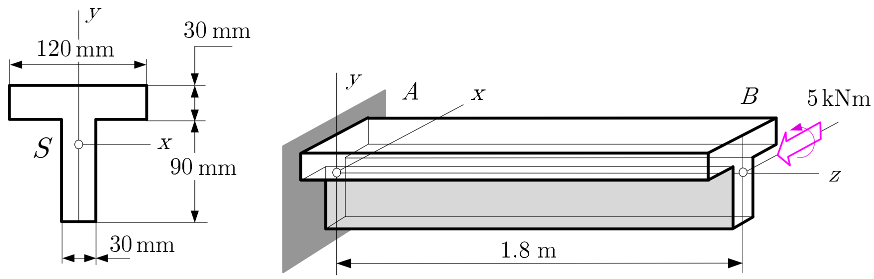
eredményt kapjuk. A rúd tehát megfelel.

Az (5.14) képlet alapján

$$\rho = \frac{I_x E}{M_{hx}} = \frac{2.2741 \times 10^6 \text{mm}^4 \times 200 \times 10^3 \text{MPa}}{4.1 \times 10^6 \text{Nmm}} \approx 1.109 \times 10^2 \text{m}$$

a középvonal görbületi sugara.

5.10. Az 5.27. ábrán vázolt T szelvényű rúd alumíniumból készült ($E_{\text{al}} = 70\,\text{GPa}$). A rúdnak tiszta hajlítás az igénybevétele. Határozza meg a szelvényben ébredő legnagyobb húzó-, és nyomófeszültséget, (b) a rúd görbületi sugarát, valamint (c) a rúdban felhalmozódott rugalmas energiát.



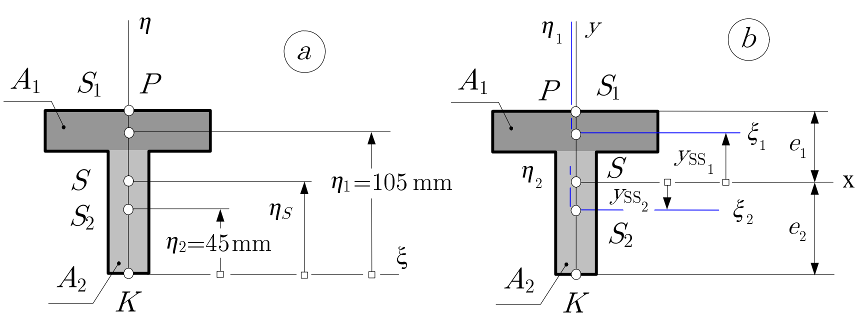
5.27. ábra.

Első lépésben meghatározzuk a keresztmetszet S súlypontjának η_S koordinátáját valamint az x súlyponti tengelyre számított I_x másodrendű nyomatékot. A számítások során, célszerűségi okokból két részre, ezeket rendre A_1 és A_2 jelöli, bontjuk fel a keresztmetszetet. A hosszegység mm. Az 5.28.(a) ábra és a

i	A_i mm^2	η_i mm	$\eta_i A_i$ mm^3
1	3600	105	378000
2	2700	45	121500
A$=\sum A_i = 6300$		$S_\xi = \sum A_i\, \eta_i = 499500$	

táblázat adataival (S_ξ az A keresztmetszet ξ tengelyre vett statikai nyomatéka) írható, hogy

$$\eta_S = \frac{S_\xi}{A} = \frac{\sum A_i\, \eta_i}{\sum A_i} = \frac{499500}{6300} = 79.286\,\text{mm}\,.$$



5.28. ábra.

Az A_1 és A_2 jelű részek súlypontjainak

$$y_{SS_1} = \eta_1 - \eta_S = 105 - 79.286 = 25.714\,\text{mm} \quad \text{és} \quad y_{SS_2} = \eta_2 - \eta_S = 45 - 79.286 = -34.286\,\text{mm}$$

koordinátáival – 5.28.(b) ábra – alkalmazhatóvá válik az A_1 jelű rész esetén az SS_1 pontok között, az A_2 jelű rész esetén pedig az SS_2 pontok között az $(5.42)_1$ Steiner tétel:

$$I_x = \sum \left[I_{\xi i} + (y_{SS_i})^2 A_i \right] = \frac{120 \times 30^3}{12} + (25.714)^2 \times 3600 + \frac{30 \times 90^3}{12} + (-34.286)^2 \times 2700 =$$
$$= 7.646\,8 \times 10^6\,\text{mm}^4 .$$

Mivel negatív a hajlítónyomaték a nyomófeszültség a P pontot tartalmazó felső oldalélen, a húzófeszültség a K pontot tartalmazó alsó oldalélen maximális. Az

$$e_1 = y_{SS_2} + 15 = 25.714 + 15 = 40.714\,\text{mm} \qquad e_2 = \eta_S = 79.286\,\text{mm}$$

értékekkel és az (5.28b) képletekkel kapjuk, hogy

$$\sigma_{\text{max nyomás}} = |\sigma_P| = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e_1 = \frac{5 \times 10^6\,\text{Nmm}}{7.646\,8 \times 10^6\,\text{mm}^4} \times 40.714\,\text{mm} \approx 27\,\text{MPa}$$

és

$$\sigma_{\text{max húzás}} = |\sigma_K| = \frac{|M_{hx}|}{I_x} e_2 = \frac{5 \times 10^6\,\text{Nmm}}{7.646\,8 \times 10^6\,\text{mm}^4} \times 79.286\,\text{mm} \approx 52\,\text{MPa} .$$

Az (5.14), valamint az (5.19) képletek alapján

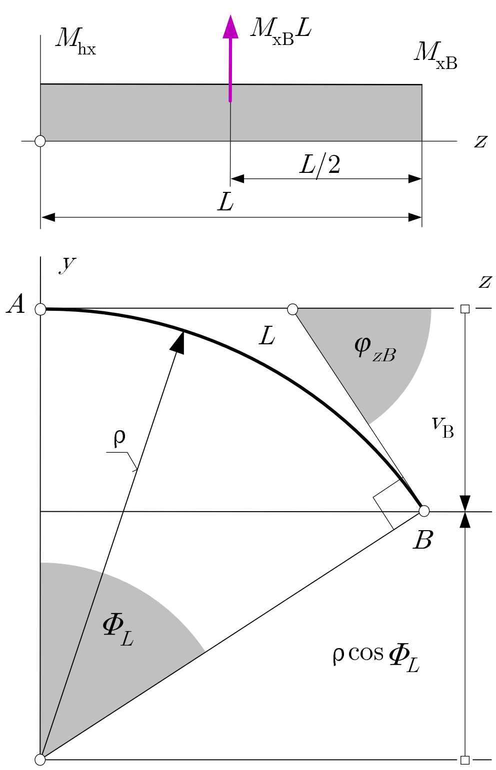
$$\rho = \frac{I_x E_{al}}{M_{hx}} = -\frac{7.646\,8 \times 10^6\,\text{mm}^4 \times 70 \times 10^3\,\text{MPa}}{5 \times 10^6\,\text{Nmm}} \approx -107\,\text{m}$$

a görbületi sugár és

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_{hx}^2 l}{I_x E_{al}} = \frac{1}{2}\frac{\left(5 \times 10^6\,\text{Nmm}\right)^2 \times 1.8 \times 10^3\,\text{mm}}{7.646\,8 \times 10^6\,\text{mm}^4 \times 70 \times 10^3\,\text{MPa}} \approx 42.034\,\text{Nm}$$

az alakváltozási energia.

5.11. Számítsa ki az 5.9. Mintafeladatban vizsgált rúd B keresztmetszetében a súlypontvonal (a rúd) $\varphi_{xB} = \varphi_B$ szögelfordulását és ugyanitt súlypont (a rúd) függőleges v_B elmozdulását.



5.29. ábra.

Az 5.29. ábra a szokott betűket használva jellegehelyesen szemlélteti az AB rúd nyomatéki ábráját, illetve a körívvé görbült középvonalat. Mivel merőleges szárúak a $\varphi_{xB} = \varphi_B$ és Φ_L szögek és mivel nem változik meg a rúd középvonalának hossza írható, hogy

$$\varphi_{xB} = \varphi_B = \Phi_L = \frac{L}{\rho}$$

ahonnan, tekintettel a görbületet adó (5.14) összefüggésre és az $M_{hx} = M_{xB}$ egyenlőségre, kapjuk hogy

$$\varphi_B = \frac{M_{xB} L}{I_x E} . \tag{5.95}$$

Ez a képlet előjelhelyesen adja a keresett szögelfordulást. Helyettesítve a feladat adatait

$$\varphi_B = \frac{4.1 \times 10^6\,\text{Nmm} \times 1.6 \times 10^3\,\text{mm}}{2.274\,1 \times 10^6\,\text{mm}^4 \times 200 \times 10^3\,\text{MPa}} =$$
$$= 1.4423 \times 10^{-2}\text{rad} = 0.82638^o$$

az eredmény. Ez a szögelfordulás igen kicsiny, ellentétben az ábrával, amelyen a viszonyok érzékeltetésére véges szögelfordulást tüntettünk fel. A kapott érték azt a mindennapi tapasztalatot tükrözi, hogy a valós szerkezeteken általában kicsinyek a terhelésből adódó szögelfordulások és elmozdulások.

A v_B elmozdulás ugyancsak az ábra alapján írható fel:

$$v_B = -\rho(1 - \cos\Phi_L) .$$

Mivel kicsi a $\varphi_{xB} = \varphi_B = \Phi_L$ szög elegendő a

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + O\left(x^6\right)$$

sorfejtés első két tagját megőrizni.

Ha elvégezzük a ρ görbületi sugár és a $\varphi_B = \varphi_{xB} = \Phi_L$ forgás tekintetében is a szükséges helyettesítéseket, akkor a

$$v_B \cong -\rho\left[1-\left(1-\frac{1}{2}\Phi_L^2\right)\right] = -\frac{1}{2}\frac{M_{xB}L^2}{I_xE} \tag{5.96}$$

képletet kapjuk. A feladat adataival

$$v_B = -\frac{1}{2}\frac{4.1\times10^6\,\mathrm{Nmm}\times\left(1.6\times10^3\,\mathrm{mm}\right)^2}{2.274\,1\times10^6\,\mathrm{mm}^4\times200\times10^3\,\mathrm{MPa}} = -11.539\,\mathrm{mm}$$

a keresett elmozdulás.

A továbbiak az (5.95) és (5.95) képletek lehetséges interpretációit adják.

(a) Visszaidézve, hogy a jelen esetben

$$U = \frac{1}{2}\frac{M_{xB}^2L}{I_xE}$$

a teljes rugalmas energia, azt kapjuk, hogy

$$\varphi_B = \frac{\partial U}{\partial M_{xB}} = \frac{M_{xB}L}{I_xE}\,.$$

Ez a képlet a (3.24) és (4.52) összefüggések egy analogonja.

(b) Írjuk át az (5.95) és (5.96) képleteket az

$$I_xE\varphi_B = M_{xB}L \quad \text{és} \quad I_xEv_B = -\frac{1}{2}M_{xB}L^2$$

alakba. Ha most az AB rúdon működő fiktív terhelésnek tekintjük az M_{hx} nyomatéki ábrát – lásd az 5.29. ábra felső részét –, akkor a φ_B szögelfordulás I_xE-szerese ebből a fiktív terhelésből adódó nyíróerő a rúd végén, a B keresztmetszetben, hiszen a nyíróerő az $M_{xB}L$ fiktív eredővel egyezik meg.

(c) Ugyanígy kapjuk, hogy a v_B elmozdulás I_xE-szerese a fiktív terhelésnek vett M_{hx} nyomatéki ábrából adódó hajlítónyomaték a B keresztmetszetben.

5.12. Adott valamely A keresztmetszet súlyponthoz kötött tehetetlenségi tenzorának mátrixa a súlyponti xy KR-ben:

$$\underline{\mathbf{I}}_S = \begin{bmatrix} 5321 & -475 \\ -475 & 7601 \end{bmatrix}\,\mathrm{cm}^4$$

Számítsa ki a főtehetetlenségi nyomatékokat, a főirányok irányvektorait majd írja fel a tehetetlenségi tenzor mátrixát a főirányok koordinátarendszerében.

Az

$$I_I = I_x + I_y = 5321 + 7601 = 12922\,\mathrm{cm}^4 \quad \text{és} \quad I_{II} = I_xI_y - I_{xy}^2 = 5321\times7601 - 475^2 = 40219296.0\,\mathrm{cm}^8$$

invariánsok és az (5.68a) képlet alapján felírható

$$I_n^2 - I_I\,I_n + I_{II} = I_n^2 - 12922\,I_n + 40219296 = 0$$

karakterisztikus egyenlet

$$I_{1,2} = \frac{12922 \pm \sqrt{12922^2 - 4\times40219296}}{2} = \left\{\begin{array}{l} 7696 \\ 5226 \end{array}\right. \quad \mathrm{cm}^4$$

gyökei adják a keresett főtehetetlenségi nyomatékokat. Ezek birtokában az $(5.71\mathrm{a})_1$ képlet alapján kapott

$$n_{x1}(I_x - I_1) - I_{xy}n_{y1} = -2375n_{x1} + 475n_{y1} = 0$$

egyenletből az

$$n_{y1} = 5n_{x1}$$

eredmény következik, amivel az $(5.71\mathrm{a})_2$-ből

$$n_{x1}^2 + n_{y1}^2 = n_{x1}^2\,(1+25) = 1$$

azaz

$$n_{x1} = \frac{1}{\sqrt{26}} \qquad \text{és} \qquad n_{y1} = 5n_{x1} = \frac{5}{\sqrt{26}}\,.$$

Végeredményben

$$\mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}\left(\mathbf{e}_x + 5\mathbf{e}_y\right)$$

az első főirány irányvektora. Ennek ismeretében az (5.72) képletből

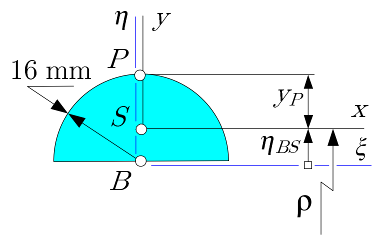
$$\mathbf{n}_2 = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{26}}(5\mathbf{e}_x - \mathbf{e}_y)$$

a második főirány irányvektora. A főtengelyek $1 = \xi$, $2 = \eta$ koordinátarendszerében

$$\underset{(\xi,\eta)}{\underline{\mathbf{I}}_S} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7696 & 0 \\ 0 & 5226 \end{bmatrix} \text{cm}^4$$

a tehetetlenségi tenzor mátrixa.

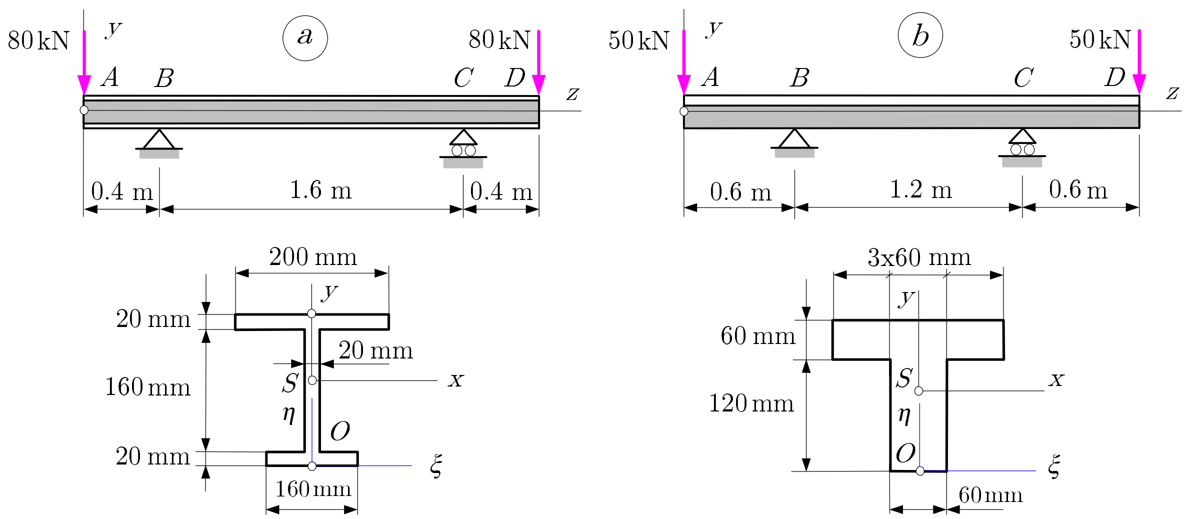
Gyakorlatok



5.30. ábra.

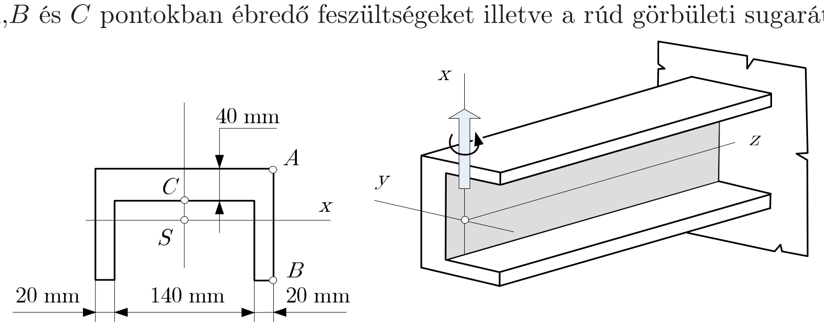
5.1. Az 5.30. ábrán vázolt és körívvé hajlított félkörkeresztmetszetű sárgaréz rúdnak 3 m a görbületi sugara. A görbületi középpont, amint az ábra is mutatja, a rúd tengelyvonala alatt helyezkedik el. Határozza meg a legnagyobb húzó és nyomó feszültséget, valamint a vízszintes átmérő hosszváltozását, ha $E_{\text{réz}} = 110$ MPa és $\nu = 0.25$. ($\eta_{BS} = 4r/3\pi$)

5.2. Az 5.31. ábrán vázolt aluminium rudakat két erő terheli. Az ábra feltünteti a BC szakasz egy K keresztmetszetét is. Határozza meg $\sigma_{\max}$ értékét a BC szakaszon belül és írja fel a feszültségi tenzor mátrixát az O pontban. Mekkora a BC szakasz görbületi sugara és a C keresztmetszet szögelfordulása? ($E_{\text{al}} = 70$ GPa.)



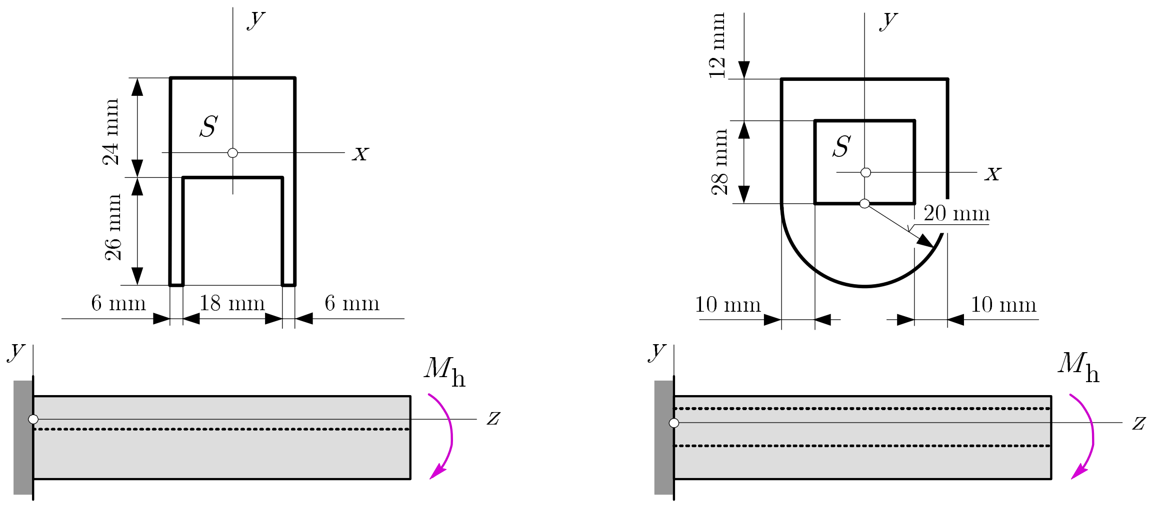
5.31. ábra.

5.3. Az 5.32. ábrán vázolt öntöttvas rudat ($E = 175 \times 10^3$ MPa) 24 kNm nagyságú nyomaték terheli. Számítsa ki az A,B és C pontokban ébredő feszültségeket illetve a rúd görbületi sugarát.



5.32. ábra.

5.4. Az 5.33. ábrán vázolt rudak anyagára $\sigma_{\text{meg húzás}} = 120$ MPa és $\sigma_{\text{meg nyomás}} = 160$ MPa a megengedett feszültség. Mekkora M_h hajlítónyomaték terhelheti a rudakat? Határozza meg a hajlítónyomaték ismeretében a rudak görbületi sugarát és a rúdban felhalmozódott alakváltozási energiát.



5.33. ábra.

5.5. Igazolja az (5.87) összefüggés helyességét.

6. FEJEZET

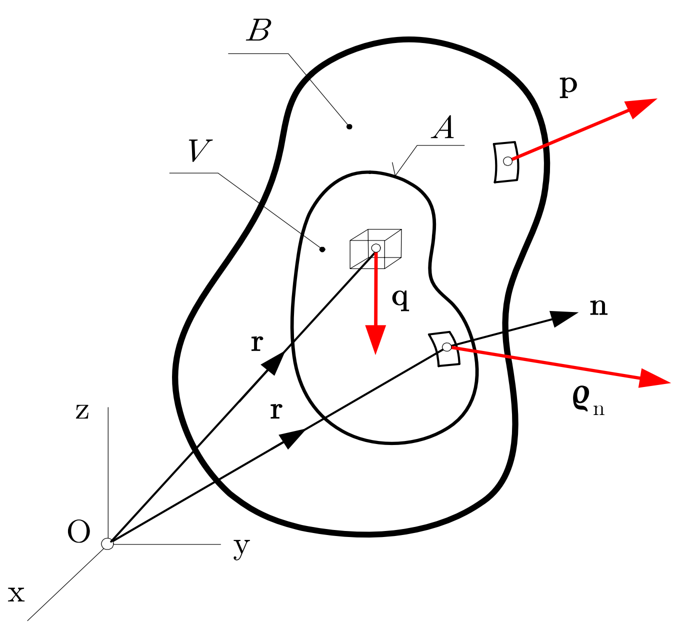
A szilárdságtan általános egyenletei

6.1. Bevezetés

A 2. Szilárdságtani alapfogalmak című fejezetben áttekintettük mindazokat a fogalmakat és mennyiséget, amelyek alkalmasak a vizsgálat tárgyát képző szilárd test egy tetszőlegesen kiragadott pontjában a mechanikai állapot leírására. Mivel a test állapota a testet alkotó anyagi pontok állapotainak összessége rendelkezésünkre állnak azok az eszközök, melyekkel leírhatjuk a teljes test szilárdságtani állapotát. Az idézett fejezet erősen kvantitatív jellegű leíró módszerével szemben a jelen fejezetben egzaktabb és egyben általánosabb tárgyalásmódban vesszük sorra a már megismert fogalmakat és mennyiségeket.

6.2. Egyenletek feszültségekre

6.2.1. Feszültségi tenzormező: az egyensúly lokális feltételei. A test feszültségi állapotát Cauchy tétele alapján a $\boldsymbol{T}(\mathbf{r})$ feszültségmező szabja meg, hiszen ennek ismeretében a test valamely anyagi pontjára illeszkedő bármilyen $\mathbf{n}$ normálisú síkon ki tudjuk számítani a $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektort. Felmerül azonban azonnal az a kérdés, vajon milyen feltételeknek kell, hogy eleget tegyen a $\boldsymbol{T}(\mathbf{r})$ feszültségtenzor, ha a test tartós nyugalomban, egyensúlyban van. A felvetett probléma tisztázása a vizsgálat tárgyát képező és a 6.1. ábrán vázolt B test tetszőlegesen kiválasztott V résztartománya esetén – ezt az A felület határolja – az egyensúlyi viszonyok vizsgálatát igényli. A V tartomány külső normálisát $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}| = 1$ jelöli. Mivel a test nyugalomban van, annak bármely V résztartománya is nyugalomban kell, hogy legyen. A nyugalomnak szükséges feltétele, hogy a V résztartományon működő és a tartományt tekintve külső ER – ezt az A felületen ébredő $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségek által alkotott felületen megoszló ER, valamint a test térfogatán megoszló $\mathbf{q}$ térfogati ER V-n működő része alkotja – egyensúlyi legyen. Az ábra a későbbiek kedvéért, előre utalunk itt a 6.5.1. szakaszra, a feltünteti a test palástján működő $\mathbf{p}$ felületen megoszló ER-t is, noha ez nem játszik közvetlen szerepet a gondolatmenetben.



6.1. ábra.

Ha egyensúlyi a $\boldsymbol{\rho}_n \in A$ és $\mathbf{q} \in V$ ER, akkor (a) zérus az eredője, és (b) zérus az origóra számított nyomatéka.

(a) Az *eredő eltűnését* az

$$\int_A \boldsymbol{\rho}_n \,\mathrm{d}A + \int_V \mathbf{q}\,\mathrm{d}V = 0 \tag{6.1}$$

egyenlet fejezi ki. A (2.79) alatti Cauchy tétel helyettesítésével átírható a felületi integrál integrandusza:

$$\int_A \boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A + \int_V \mathbf{q}\,\mathrm{d}V = 0\,. \tag{6.2}$$

A kapott egyenlet további átalakítása érdekében érdemes felidézni a Gauss-Osztrogradszkij tételt. Legyen a $\boldsymbol{C}$ valamilyen másodrendű tenzor. Legyen továbbá a $*$ műveleti jel a $\boldsymbol{C}$ tenzor és az A felület $\mathbf{n}$ külső normálisa között értelmezett valamilyen szorzási művelet műveleti jele (skaláris szorzás estén például pontot kell gondolnunk $*$ helyett). A Gauss-Osztogradszkij tétel szerint

$$\int_A \boldsymbol{C}*\mathbf{n}\,\mathrm{d}A = \int_V \boldsymbol{C}*\nabla\,\mathrm{d}V\,. \tag{6.3}$$

A Gauss-Osztrogradszkíj tétel értelemszerű felhasználásával – a $\boldsymbol{C}$ helyére $\boldsymbol{T}$-t, a $*$ helyére a skaláris szorzás $\cdot$ műveleti jelét gondoljuk – az

$$\int_V (\boldsymbol{T}\cdot\nabla + \mathbf{q})\;\mathrm{d}V = 0\,. \tag{6.4}$$

alakban adódik az eredő eltűnésének feltétele. Mivel a fenti integrál a B jelű test bármely V résztartományán zérus értékű el kell tűnnie az integrandusznak:

$$\boxed{\boldsymbol{T}\cdot\nabla + \mathbf{q} = 0\,.} \tag{6.5}$$

A kapott egyenlet az egyensúly első lokális feltétele, vagy röviden az *egyensúlyi egyenlet*.

(b) Az O origóra számított *eredő nyomaték eltűnését* az

$$\int_A \mathbf{r}\times\boldsymbol{\rho}_n\,\mathrm{d}A + \int_V \mathbf{r}\times\mathbf{q}\,\mathrm{d}V = 0 \tag{6.6}$$

egyenlet fejezi ki. A (2.79) Cauchy tétel helyettesítésével és a (6.3) Gauss-Osztrogradszkij tétel felhasználásával kapjuk innen, hogy

$$\int_A \mathbf{r}\times\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A + \int_V \mathbf{r}\times\mathbf{q}\,\mathrm{d}V = \int_V \{[\mathbf{r}\times\boldsymbol{T}]\cdot\nabla + \mathbf{r}\times\mathbf{q}\}\;\mathrm{d}V = 0\,, \tag{6.7}$$

azaz – kihasználva V tetszőlegességét és a szorzatderiválás szabályát –, hogy

$$\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{T}\cdot\nabla + \mathbf{r}\times\overset{\downarrow}{\boldsymbol{T}}\cdot\nabla + \mathbf{r}\times\mathbf{q} = 0\,. \tag{6.8}$$

A lefelé irányított nyíl azokra a mennyiségekre mutat, amelyeket deriválni kell.

A baloldalon álló első tag tovább alakítható, ha helyettesítjük a ∇ differenciáloperátor értékét:

$$\begin{aligned}\overset{\downarrow}{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{T}\cdot\nabla &= \overset{\downarrow}{\mathbf{r}}\times\boldsymbol{T}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) = \\ &= \underbrace{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}}_{\mathbf{e}_x}\times\underbrace{\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_x}_{\boldsymbol{\rho}_x} + \underbrace{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}}_{\mathbf{e}_y}\times\underbrace{\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_y}_{\boldsymbol{\rho}_y} + \underbrace{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z}}_{\mathbf{e}_z}\times\underbrace{\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_z}_{\boldsymbol{\rho}_z} = \\ &= 2\left[-\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\rho}_x\times\mathbf{e}_x + \boldsymbol{\rho}_y\times\mathbf{e}_y + \boldsymbol{\rho}_z\times\mathbf{e}_z\right)\right] = 2\mathbf{t}_a\,,\end{aligned}$$

ahol a (2.81) képlettel összhangban $\mathbf{t}_a$ a feszültségi tenzor vektorinvariánsa. A kapott eredmény (6.8)-ba történő visszahelyettesítése, az $\mathbf{r}$ vektor kiemelése és a (6.5) egyensúlyi egyenlet kihasználása után a

$$2\mathbf{t}_a + \mathbf{r}\times(\boldsymbol{T}\cdot\nabla+\mathbf{q}) = 2\mathbf{t}_a = 0 \tag{6.9}$$

egyenletet kapjuk második lokális egyensúlyi feltételként. Eszerint a feszültségi tenzor vektorinvariánsának eltűnése (és ebből következően a feszültségi tenzor tenzor szimmetriája) a nyomatéki egyensúly lokális feltétele. Úgy is fogalmazhatunk, hogy automatikusan fennáll a nyomatéki egyensúly, ha szimmetrikus a feszültségi tenzor.

Tovább alakítható a (6.5) egyensúlyi egyenlet, ha helyettesítjük a ∇ operátort a skalárszorzatban:

$$\boldsymbol{T}\cdot\nabla = \boldsymbol{T}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) = \frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_x}_{\boldsymbol{\rho}_x}+\frac{\partial}{\partial y}\underbrace{\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_y}_{\boldsymbol{\rho}_y}+\frac{\partial}{\partial z}\underbrace{\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_z}_{\boldsymbol{\rho}_z}$$

Az utóbbi képlettel vektoriális formában kapjuk az egyensúlyi egyenletet:

$$\boxed{\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_x}{\partial x}+\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_y}{\partial y}+\frac{\partial\boldsymbol{\rho}_z}{\partial z}+\mathbf{q}=0\,.} \tag{6.10}$$

Az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokkal történő skaláris szorzással pedig a fenti vektoregyenlettel egyenértékű skaláris egyenletek adódnak:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+q_x&=0\,,\\
\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+q_y&=0\,,\\
\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+q_z&=0\,.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

6.2.2. Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram: a szerkesztés. A 4. fejezetben – a részleteket illetően a 91. oldalon kezdődő 4.1.3. szakaszra utalunk – áttekintettük a részleges Mohr-féle kördiagram szerkesztésével kapcsolatos ismereteket. A Mohr-féle részleges kördiagramon a kör pontjai olyan elemi felületekhez tartozóan adják meg előjelhelyesen a σ_n normálfeszültség és a τ_{mn} nyírófeszültség értékét, amelyek normálisai valamelyik (előre ismert) főirányra merőleges síkban (feszültségi fősíkban) változnak.

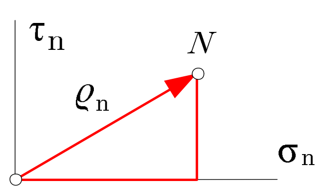
Felvetődik a kérdés, hogy nem lehet-e a szilárd test valamely pontjában, mondjuk a P pontban, a tetszőleges $\mathbf{n}$, $|\mathbf{n}|=1$, normálisú felületelemen ébredő $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor (2.66) és (2.67a,b) szerinti

$$\boldsymbol{\rho}_n = \sigma_n\mathbf{n}+\boldsymbol{\tau}_n \tag{6.12}$$

felbontásában az előjeles σ_n normálfeszültséget, és a $\tau_n = |\boldsymbol{\tau}_n| = \sqrt{\boldsymbol{\rho}_n - \sigma_n\mathbf{n}}$ nyírófeszültséget, mindkét mennyiséget mint az $\mathbf{n}$ függvényét, síkbeli diagram segítségével ábrázolni, hasonló módon, mint a részleges Mohr kör esetén.

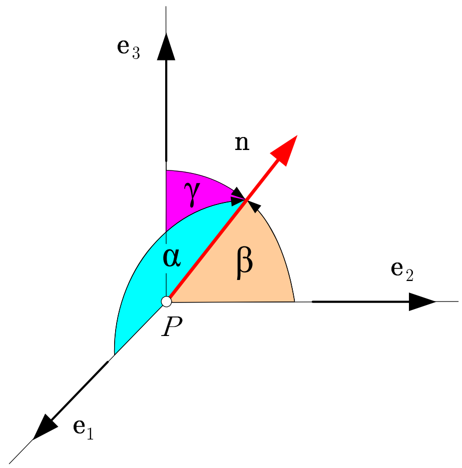
A megfogalmazott feladat megoldása a pontbeli feszültségi állapotot szemléltető úgynevezett teljes Mohr-féle feszültségi kördiagram. Ennek az abcissza tengelyén, összhangban a 6.2. ábrával, a σ_n normálfeszültséget, pozitív ordináta tengelye mentén pedig a τ_n nyírófeszültséget mérjük. A $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor N képének tehát – az N betű azon felületelem normálisára utal, amelyiken feszültségvektor ébred – $\sigma_n=\sigma$ az abcisszája és $\tau_n=\tau$ az ordinátája. Az n indexet – amint azt az előző két sorban lévő képletek szedése is mutatja – sokszor el szokás hagyni.

Az origó és az $N[\sigma_n,\tau_n]$ pont között a feszültségvektor $\rho_n=|\boldsymbol{\rho}_n|$ hossza jelenik meg az ábrán



6.2. ábra.

Nyilvánvaló, hogy a Mohr-féle kördiagramról vett σ_n,τ_n koordinátakettős ismerete nem elégséges a $\boldsymbol{\rho}_n$ tényleges térbeli helyzetének visszaállításához az elemi felületen.



6.3. ábra.

A Mohr-féle teljes kördiagram előállításához, alapvető tulajdonságainak tisztázásához a feszültségi tenzor főtengelyeinek irányát kijelölő $\mathbf{e}_i$, $|\mathbf{e}_i| = 1$, $i = 1{,}2{,}3$ bázisvektorok által kifeszített jobbsodratú KR-ben tekintjük a feszültségtenzort, ahol

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

a feszültségi tenzor mátrixa. A továbbiakban egyelőre kikötjük, összhangban a fenti képlettel, hogy különböznek egymástól a főfeszültségek.

A főtengelyek KR-ében a tetszőleges irányú

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \cos\beta\,\mathbf{e}_2 + \cos\gamma\,\mathbf{e}_3\,, \ \alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi] \quad (6.13)$$

egységvektorra merőleges P pontbeli felületelemen (α, β és γ rendre az $\mathbf{n}$ 1, 2 és 3 jelű főtengelyekkel bezárt szöge – v.ö.: 6.3. ábra)

$$\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n} = \sigma_1\cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sigma_2\cos\beta\,\mathbf{e}_2 + \sigma_3\cos\gamma\,\mathbf{e}_3 \quad (6.14)$$

a feszültségvektor. Mivel az $\mathbf{n}$ egységvektor fennáll az $\mathbf{n}^2 = 1$, azaz a

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad (6.15a)$$

egyenlet. Az $\mathbf{n}$ normálisú felületelemen

$$\sigma_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\rho}_n = \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\cos^2\beta + \sigma_3\cos^2\gamma \quad (6.15b)$$

a normálfeszültség és a $(\boldsymbol{\rho}_n)^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$ képlet alapján fennáll, hogy

$$\boldsymbol{\rho}_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2\cos^2\alpha + \sigma_2^2\cos^2\beta + \sigma_3^2\cos^2\gamma\,. \quad (6.15c)$$

A (6.15a,b,c) egyenletek adott σ_n és τ_n mellett meghatározzák azon felületelemek normálisát, amelyeken a vonatkozó σ_n és τ_n ébred. (a képletek szerint azon normálisok jöhetnek szóba, amelyekre nézve az egyes iránykoszínuszok négyzetei azonosak: Lásd később a (6.24b) képlet utáni szöveget.)

Mivel mindössze háromismeretlenes lineáris egyenletrendszerről van szó a $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$ és $\cos^2\gamma$ ismeretlenekkel a megoldás némi figyelmet kívánó és itt nem részletezett számításokkal meghatározható. A

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)}\left(\sigma_n^2+\tau_n^2+\sigma_2\sigma_3-\sigma_2\sigma_n-\sigma_3\sigma_n\right) =$$
$$= \frac{1}{(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)}\underbrace{\left[\tau_n^2+\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2\right]}_{f_1(\sigma_n,\tau_n)} \quad (6.16a)$$

$$\cos^2\beta = \frac{1}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)}\left(\sigma_n^2+\tau_n^2+\sigma_1\sigma_3-\sigma_1\sigma_n-\sigma_3\sigma_n\right) =$$
$$= \frac{1}{(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)}\underbrace{\left[\tau_n^2+\left(\sigma_n-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2\right]}_{f_2(\sigma_n,\tau_n)} \quad (6.16b)$$

$$\cos^2\gamma = \frac{1}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}\left(\sigma_n^2+\tau_n^2+\sigma_1\sigma_2-\sigma_1\sigma_n-\sigma_2\sigma_n\right) =$$
$$= \frac{1}{(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)}\underbrace{\left[\tau_n^2+\left(\sigma_n-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2-\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2\right]}_{f_3(\sigma_n,\tau_n)} \tag{6.16c}$$

megoldások egyben a σ_n, τ_n és az $\mathbf{n}$ közötti keresett kapcsolatot is jelentik. A kapcsolat jellegének tisztázására átrendezzük a fenti összefüggéseket:

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2+\tau_n^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2+(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1-\sigma_3)\cos^2\alpha}_{R^2(\alpha)}, \tag{6.17a}$$

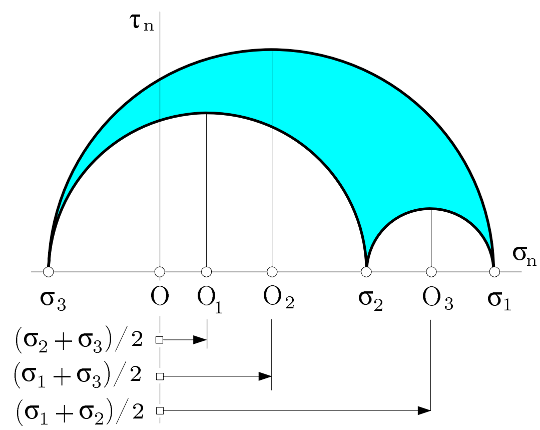
$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_3+\sigma_1}{2}\right)^2+\tau_n^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{2}\right)^2+(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_1)\cos^2\beta}_{R^2(\beta)}, \tag{6.17b}$$

$$\left(\sigma_n-\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2+\tau_n^2 = \underbrace{\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2+(\sigma_3-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma_1)\cos^2\gamma}_{R^2(\gamma)}. \tag{6.17c}$$

Mivel $\mathbf{n}^2=1$, a $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$ és $\cos^2\gamma$-ra vonatkozó megoldásoknak pozitívnak, vagy zérusnak kell lenniük. Következésképp – figyelemmel a $\sigma_1>\sigma_2>\sigma_3$ feltételre is – teljesülnie kell a megoldást adó és a (6.16a, b, c) képletekkel értelmezett f_i $(i=1{,}2{,}3)$ mennyiségekkel kapcsolatos

$$f_1(\sigma_n,\tau_n)\geq 0\,, \quad f_2(\sigma_n,\tau_n)\leq 0\,, \quad f_3(\sigma_n,\tau_n)\geq 0 \tag{6.18}$$

egyenlőtlenségeknek. Ha f_1 zérus, akkor $\cos^2\alpha= =0$, $\alpha=\pi/2$ és az $\mathbf{n}$ normális a 2 és 3 jelű főtengelyek által kifeszített fősíkban fekszik; ha f_2 zérus, akkor $\cos^2\beta=0$, $\beta=\pi/2$ és az $\mathbf{n}$ normális az 1 és 3 jelű főtengelyek által kifeszített fősíkban fekszik, végezetül pedig ha f_3 zérus, akkor $\cos^2\gamma=0$, $\gamma=\pi/2$ és az $\mathbf{n}$ normális az 1 és 2 jelű főtengelyek által kifeszített fősíkban van.



6.4. ábra.

Kiolvasható a (6.17a,b,c) egyenletekből, hogy az $f_i=0$, $(i=1{,}2{,}3)$ esetben a σ_n, $\tau_n>0$ ordinátájú és abcisszájú pontok által meghatározott síkgörbék félkörök, nevezetesen

az $f_1=0$ **esetben** $\cos^2\alpha=0$ **(n** $\perp$ **az 1.főtengelyre):**

$$\text{ez az}\quad O_1\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2};0\right)\quad\text{középpontú és}\quad R=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\quad\text{sugarú félkör;}$$

az $f_2=0$ **esetben** $\cos^2\beta=0$ **(n** $\perp$ **a 2. főtengelyre):**

$$\text{ez az}\quad O_2\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2};0\right)\quad\text{középpontú és}\quad R=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\quad\text{sugarú félkör;}$$

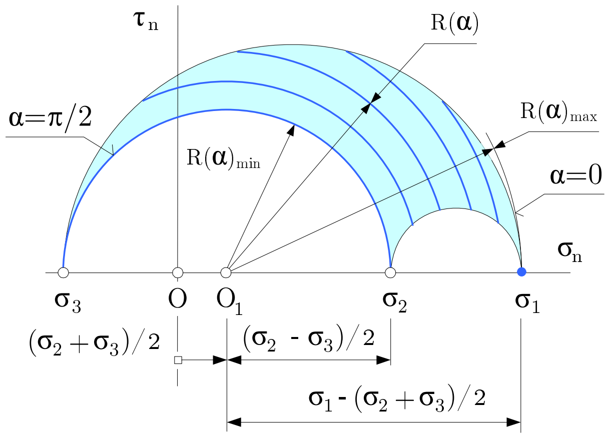
és végül

az $f_3=0$ **esetben** $\cos^2\gamma=0$ **(n** $\perp$ **a 3. főtengelyre):**

$$\text{ez az}\quad O_3\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2};0\right)\quad\text{középpontú és}\quad R=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\quad\text{sugarú félkör.}$$

Figyeljük meg, hogy a félkörök középpontjaiban [az $O_i (i{=}1{,}2{,}3)$ pontokban] rendre teljesülnek az $f_1, f_3 > 0$ és $f_2 < 0$ egyenlőtlenségek és ezért az $f_1, f_3 > 0$ egyenlőtlenségek csak a $\tau_n > 0$ félsík megfelelő félkörökön kívüli, míg az $f_2 < 0$ egyenlőtlenség csak a félsík megfelelő félkörön belüli részén áll fenn. A mondottak fényében azonnal következik a (6.18) egyenlőtlenségekből, hogy a tetszőleges **n** normálisú elemi felületen ébredő σ_n és τ_n feszültségek által meghatározott $N(\sigma_n, \tau_n)$ pont a 6.4. ábrán türkiz színnel kiemelt körívháromszögön belül, vagy annak peremén kell, hogy legyen.

Keressük meg most azon **n** normálisokhoz tartozó $N(\sigma_n, \tau_n)$ pontok mértani helyét a $\sigma_n, \tau_n{>}0$ félsíkon, amelyekre nézve $\alpha{=}$állandó (ez azt jelenti, hogy az **n** egy olyan forgáskúpon helyezkedik el, melynek az 1. főtengely a tengelye, csúcspontja pedig a P pont – v.ö.: a 6.3. ábra).



6.5. ábra.

A (6.17a) képlet szerint a kérdéses pontok a

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = R^2(\alpha)$$
$$R(\alpha) = \sqrt{\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 + (\sigma_1-\sigma_2)\,(\sigma_1-\sigma_3)\cos^2\alpha} \tag{6.19}$$

egyenletű, azonos O_1 középpontú köríveken helyezkednek el – v.ö.: a 6.5. ábra. A kék színnel megrajzolt körívek, összhangban a korábban mondottakkal, a 6.4. ábrán már megrajzolt körívháromszögön belül, vagy annak peremén kell, hogy feküdjenek.

A szélső esetekben,

ha $\alpha = 0$, akkor:

$$R(\alpha) = \sigma_1 - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} = R(\alpha)_{\max}$$

(a körív egyetlen pontot, a $(\sigma_1; 0)$ pontot tartalmazza);

ha $\alpha = \pi/2$, akkor:

$$R(\alpha) = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} = R(\alpha)_{\min}$$

(a körív félkörív).

Hasonló gondolatmenettel kapjuk a $\beta =$ állandó és $\gamma =$ állandó esetekben az **n** normálisokhoz tartozó $N(\sigma_n, \tau_n)$ pontok mértani helyét a $\sigma_n, \tau_n > 0$ félsíkon: ha $\beta =$ állandó a kérdéses pontok a (6.17b) egyenletű O_2 középpontú, $R(\beta)$ sugarú köríveken helyezkednek el; ha $\gamma =$ állandó a kérdéses pontok a (6.17c) egyenletű O_3 középpontú, $R(\beta)$ sugarú köríveken találhatók (a körívek (6.17b), (6.17c) egyenleteit most nem ismételtük meg). Hangsúlyozzuk, hogy a körök középpontjainak rendre

$$O_2\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}{,}0\right), \qquad \text{illetve} \qquad O_3\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}{,}0\right)$$

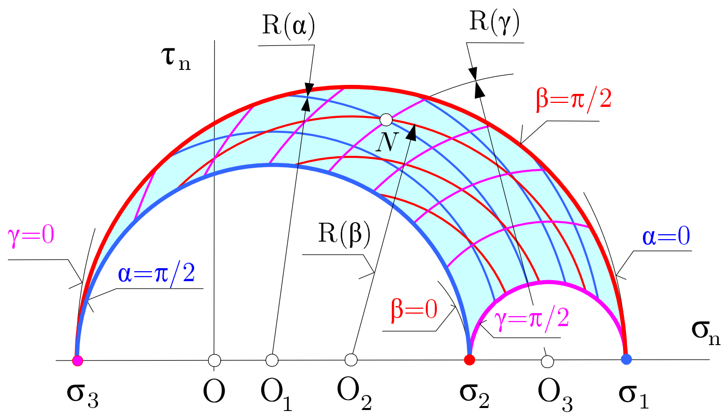
a koordinátái, a körök sugarai pedig a

$$\left|\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}-\sigma_2\right| = R(\beta)_{\min} \le R(\beta) \le R(\beta)_{\max} \le \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \;,$$

valamint a

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = R(\gamma)_{\min} \le R(\gamma) \le R(\gamma)_{\max} \le \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\sigma_3$$

korlátok között változhatnak.



6.6. ábra.

A viszonyokat szemléltető fenti ábrán kék (összhangban a 6.5. ábrával), vörösesbarna, illetve lila szín szemlélteti az $\alpha=$állandó, $\beta=$állandó és $\gamma=$állandó értékekhez tartozó körívseregeket.

A tetszőleges α, β, γ irányszögű $\mathbf{n}$ normálishoz tartozó $N(\sigma_n,\tau_n)$ pontot a fentiek szerint

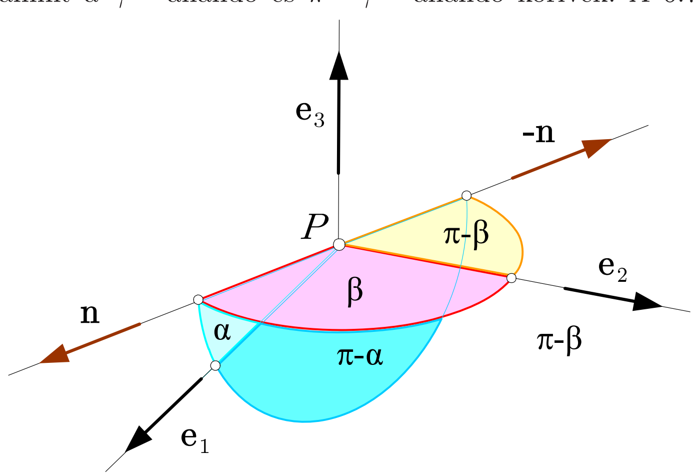
az O_1 középpontú $R(\alpha)$ ($\alpha=$állandó) sugarú (kék körív a 6.6. ábrán),
az O_2 középpontú $R(\beta)$ ($\beta=$állandó) sugarú (vörösesbarna körív a 6.6. ábrán), valamint
az O_3 középpontú $R(\gamma)$ ($\gamma=$állandó) sugarú (lila körív a 6.6. ábrán)

körök N metszéspontja adja. A σ_n,τ_n félsík fenti három körívsereghez tartozó pontjai képezik a Mohr féle kördiagramot, amelyet az O_1, O_2 és O_3 középpontú félkörívek (főkörök) által alkotott körívháromszög határol. A 6.6. ábrán vastag vonal jelzi a főköröket.

Mivel $\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)$ következik a (6.17a) képletből, hogy az $\alpha=$állandó és $\pi-\alpha=$állandó körívek sugarai azonosak:

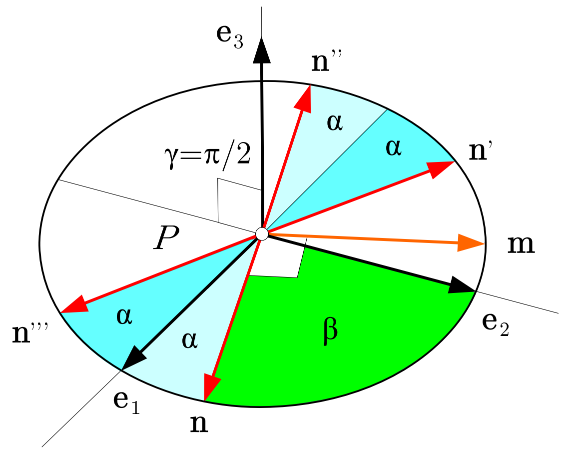
$$R(\alpha)=R(\pi-\alpha)\;,$$

azaz egybeesik a két körív. Ugyanígy esnek egybe a (6.17b,c) képletek szerint a $\beta=$állandó és $\pi-\beta=$állandó, valamint a $\gamma=$állandó és $\pi-\gamma=$állandó körívek. A 6.7 ábra szerint ez azt



6.7. ábra.

jelenti, hogy az $\mathbf{n}$ és $-\mathbf{n}$ normálisoknak a Mohr-féle kördiagram ugyanazon N pontja felel meg. Emiatt elegendő valamelyik féltérbe, pl. a $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ féltérbe eső normálisok seregét vizsgálni.



6.8. ábra.

Ha $\gamma = \pi/2$, akkor az

$$\mathbf{n} = \cos\alpha\,\mathbf{e}_1 + \sin\alpha\,\mathbf{e}_2$$

normálisok az 1 és 2 jelű főtengelyek által kifeszített síkban helyezkednek el. Ezeket a viszonyokat a 6.8. ábra szemlélteti. A vonatkozó O_3 középpontú (σ_1, σ_2) főkör egyenlete a (6.17c) képlet alapján

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \\ = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 . \quad (6.20)$$

A tetszőleges α szöghöz tartozó σ_n és τ_n pedig a (6.15b,c) képletekből adódik annak figyelembevételével, hogy most $\beta = \pi/2 - \alpha$. Némi figyelmet kívánó algebrai átalakításokkal, a (4.19) alatti összefüggés, továbbá a

$$\cos^2\alpha - \cos^4\alpha = \sin^2\alpha - \sin^4\alpha = \cos^2\alpha \sin^2\alpha = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha$$

trigonometrikus képletek kihasználásával kapjuk az

$$\sigma_n = \sigma_1\,\cos^2\alpha + \sigma_2\,\sin^2\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha\,, \qquad (6.21a)$$

$$\tau_n = \sqrt{\rho_n^2 - \sigma_n^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\,|\sin 2\alpha| \qquad (6.21b)$$

eredményt. Vegyük észre, hogy a (6.21a,b) egyenletek félkör paraméteres egyenletei a σ_n, τ_n síkon.

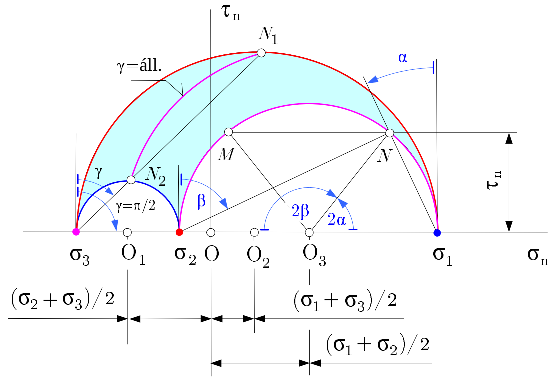
Visszaidézve a részleges Mohr körrel kapcsolatos 4.1.3 szakaszt, érdemes felhívni a figyelmet arra, hogy (i) a (6.20) egyenlet azonnal megkapható a (4.21) egyenletből, (ii) a (6.21a,b) egyenletek pedig azonnal megkaphatók a (4.20a,b) egyenletekből, ha τ_{mn} helyére τ_n-et, φ helyére pedig α-t gondolunk. Ezen túlmenően érdemes azt is hangsúlyozni, hogy a (6.20) és (6.21a,b) képletek levezethetők a (4.21) és (4.20a,b) képleteket adó gondolatmenet szószerinti ismétlésével, hiszen mindkét esetben a σ_3 főfeszültségre merőleges fősíkban vizsgáltuk ugyanolyan módon a feszültségi állapotot.

A 6.9. ábra a Mohr-féle kördiagram további sajátosságait szemlélteti. Következik a (6.21a,b) egyenletekből, hogy $\gamma = \pi/2$ esetén, amint az α a 0 és $\pi/2$ között (a hozzá tartozó β pedig a $\pi/2$ és 0 között) változik, a megfelelő N pont a (σ_1, σ_2) főkörön a $[\sigma_1, 0]$ pontból 2α szöggel fordul el és végül eléri a $[\sigma_2,0]$ pontot. A (6.21a,b) egyenletek szerint az $\mathbf{n}$-re merőleges $\alpha + \pi/2$ irányszögű $\mathbf{m}$ vektornak

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha\,, \qquad (6.22a)$$

$$\tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\,|\sin 2\alpha| \qquad (6.22b)$$

a koordinátái. A megfelelő M pont tehát a főkörön az N-hez viszonyítva az O_3 pontból húzott függőlegesre szimmetrikusan helyezkedik el. Ugyancsak a (6.21a,b)-ből következik, hogy a $\pm\alpha$ szögekhez ugyanazon N pont tartozik. Figyelembe véve még azt is, hogy bármely $\mathbf{n}$ és $-\mathbf{n}$



6.9. ábra.

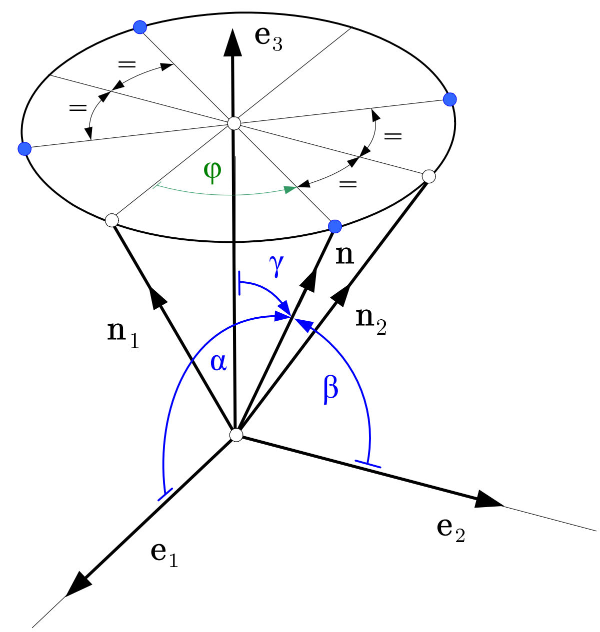
normálisnak azonos pont felel meg a kördiagramon, következik, hogy a 6.8. ábrán feltüntetett $\mathbf{n}$, $\mathbf{n}'$, $\mathbf{n}''$ és $\mathbf{n}'''$ összesen négy normálishoz a 6.9. ábra (σ_1, σ_2) főkörének ugyanazon N pontja tartozik (a vonatkozó négy elemi felületen azonos a σ_n és a τ_n). A (σ_1, σ_2) főkörön kétféleképpen is megszerkeszthető az α-hoz tartozó N pont. Egyrészt úgy, hogy a $[\sigma_1{,}0]$ pontban húzott függőlegessel az ugyanezen pontban α szöget bezáró egyenest rajzolunk és ezzel elmetszük a főkört, másrészt úgy, hogy a $[\sigma_2{,}0]$ pontban húzott függőlegessel ugyanezen pontban β szöget bezáró egyenest rajzolunk, amivel aztán elmetszük a főkört.

Általános szabály, hogy a fősíkokban fekvő $\mathbf{n}$ normálisokhoz főkörökön lévő pontok tartoznak. A fősíkban adott $\mathbf{n}$-hez, összhangban a fentebb mondottakkal, úgy szerkesztjük meg a megfelelő pontot a vonatkozó főkörön, hogy az $\mathbf{n}$ és szóba jövő $\mathbf{e}_i$ $(i = 1{,}2{,}3)$ közötti szöggel a főkör $[\sigma_i, 0]$ pontjában emelt függőlegeshez egyenest rajzolunk és ezzel metszük el a főkört.

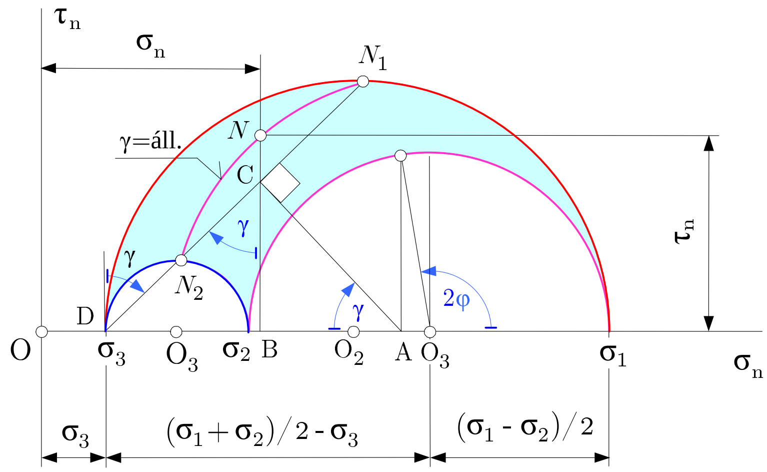
A $\gamma = \text{áll.} \leq \pi/2$ esetben, amikor is a normálisok az $\mathbf{e}_3$ tengelyű γ félnyílásszögű kúpfelület alkotói – v.ö.: 6.10. ábra –, a vonatkozó $[\sigma_n, \tau_n]$ pontok az O_3 középpontú $\gamma = \text{áll.}$ jelzésű körívre esnek. A körív (σ_1, σ_3) főkörre eső N_1, valamint a (σ_2, σ_3) főkörre eső N_2 pontjait, ezek az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$ fősíkban fekvő $\mathbf{n}_1$, illetve az $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ fősíkban fekvő $\mathbf{n}_2$ normálishoz tartoznak, a $[\sigma_3{,}0]$ pontban húzott függőlegessel γ szöget bezáró egyenes metszi ki a 6.9. ábrán.

Tulajdonképpen a (σ_1, σ_2) főkört meghatározó $[\sigma_1{,}0]$ és $[\sigma_2{,}0]$ pontok is úgy tekinthetők, mint amelyeket a $\gamma = \pi/2$ egyenes metsz ki a (σ_1, σ_3) és (σ_2, σ_3) főkörökből. Az (N_1, N_2) körív tetszőleges $\mathbf{n}$-hez tartozó pontjának megszerkesztéséhez (φ=tetszőleges, $\gamma = \text{áll.}$) vegyük figyelembe, hogy az ábra alapján

$$\mathbf{n} = (\cos\varphi\,\mathbf{e}_1 + \sin\varphi\,\mathbf{e}_2)\sin\gamma + \cos\gamma\,\mathbf{e}_3\,. \quad (6.23)$$



6.10. ábra.



6.11. ábra.

Az $\mathbf{n}$ normálvektor (6.23) alatti előállítását felhasználva, tekintettel a (6.14) és (6.15b) összefüggésekre, azt kapjuk, hogy

$$\sigma_n = (\sigma_1 \cos^2\varphi + \sigma_2 \sin^2\varphi) + \sigma_3 \cos^2\gamma = \sigma_3 + \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \sigma_3 + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\varphi\right)\sin^2\gamma\,. \quad (6.24a)$$

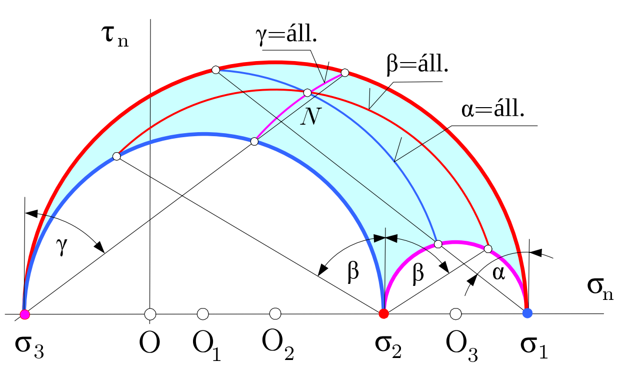
a normálfeszültség. A fenti képlet alapján a szerkesztés a 6.11 ábrán követhető, ha még azt is figyelembe vesszük, hogy

$$O_3A = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\,|\cos 2\varphi|\ ,\ \ DA = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \sigma_3 + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\varphi\,,$$
$$DC = DA\,\sin\gamma\,,\ \ DB = DA\,\sin^2\gamma\,. \quad (6.24b)$$

Mivel $\gamma =$ áll. rögzíti az (N_1, N_2) körívet, és a (6.24a) összefüggés szerint a $\pm\varphi$ és $\pm(\pi/2-\varphi)$ szögekhez ugyanakkora σ_n tartozik, következik az előző szerkesztés alapján, hogy ugyanazon N pont négy különböző $\mathbf{n}$ egységvektorhoz rendelhető hozzá. Ezek végpontjait kitöltött nullkörök jelölik a 6.10. ábrán, de a négy vektor közül csak egyet szemléltet az ábra.

Tekintettel még az $\mathbf{n}$ és $-\mathbf{n}$ vektorokhoz tartozó N pontok azonosságára állíthatjuk mostmár, hogy a Mohr-féle kördiagram nem főkörön lévő pontjai nyolc különböző térnyolcadba eső normálisnak felelnek meg. Emiatt a Mohr-féle kördiagrammal csak egy térnyolcadba, az $\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2\,\mathbf{e}_3$ helyi KR első térnyolcadába eső $\mathbf{n}$ vektorokat szokás vizsgálni.

Adott, egyébként tetszőleges α, β, γ irányszögű $\mathbf{n}$ normálishoz tartozó N pontot, az $\alpha =$ áll. és $\beta =$ áll., vagy az $\alpha =$ áll. és $\gamma =$ áll., vagypedig a $\beta =$ áll. és $\gamma =$ áll. körívek metszéspontjaként is megszerkeszthetjük. A szerkesztést a 6.12. ábra szemlélteti.



6.12. ábra.

Egybeeső főfeszültségek esetén leegyszerűsödik a Mohr-féle kördiagram. Ha pl. $\sigma_2=\sigma_3$, akkor a $[\sigma_2,0]$ és $[\sigma_3,0]$ pontok egybeesnek, következőleg a (σ_2,σ_3) főkör eltűnik, a (σ_1,σ_2) és (σ_1,σ_3) főkörök pedig egybeesnek. Ez a helyzet forog fenn a húzás és tiszta hajlítás egytengelyű feszültségi állapotainál, mivel a másik két főfeszültség, ha $\sigma_1=\sigma_z>0$: $\sigma_2=\sigma_3=0$.

Végül, ha mindhárom főfeszültség azonos, azaz $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$, vagyis az izotróp feszültségi állapot esetén ponttá zsugorodik a Mohr-féle feszültségi kördiagram.

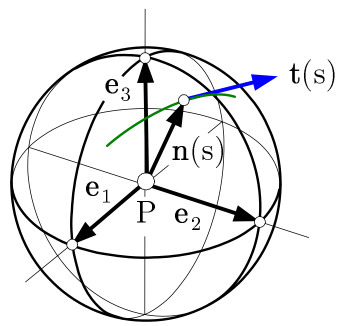
6.2.3. Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram: a τ_n iránya. A Mohr-féle kördiagram előjelhelyesen (azaz irányhelyesen) adja meg a σ_n normálfeszültséget. Ugyanakkor a diagramról leolvasható τ_n csak a $\boldsymbol{\tau}_n$ nyírófeszültség abszolut értéke. A $\boldsymbol{\tau}_n$ vektor irányának meghatározása tehát további megfontolásokat kíván meg.

A 6.13. ábra a test egy P pontjában szemlélteti azt az egységsugarú gömböt, amelyen a P pontra illeszkedő elemi felületek $\mathbf{n}$ normálisa végigfut. Tekintsünk egy a gömbön elhelyezkedő sima térgörbét. Ennek $\mathbf{n}=\mathbf{n}(s)$ az egyenlete, amelyben az s ívkoordinátát tekintjük a görbe paraméterének. Jelölje $\mathbf{t}$ az $\mathbf{n}(s)$ térgörbe érintő egységvektorát. Nyilvánvaló, hogy

$$\mathbf{t}=\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}\,.$$

Az $\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}=1$ feltételből azonnal következik, hogy

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{t}\cdot\mathbf{n}=0\,.$$



6.13. ábra.

A fenti geometriai jellegű összefüggések áttekintése után tekintsük most a σ_n értékét adó

$$\sigma_n=\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}$$

összefüggést. Figyelembevéve a feszültségi tenzor szimmetriáját is, innen kapjuk, hogy

$$\mathrm{d}\sigma_n=\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}\cdot\underbrace{\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}}_{\boldsymbol{\rho}_n}\mathrm{d}s+\underbrace{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{\rho}_n}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}s=2\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\rho}_n\,\mathrm{d}s=2\mathbf{t}\cdot(\sigma_n\mathbf{n}+\boldsymbol{\tau}_n)\,\mathrm{d}s,$$

azaz, hogy

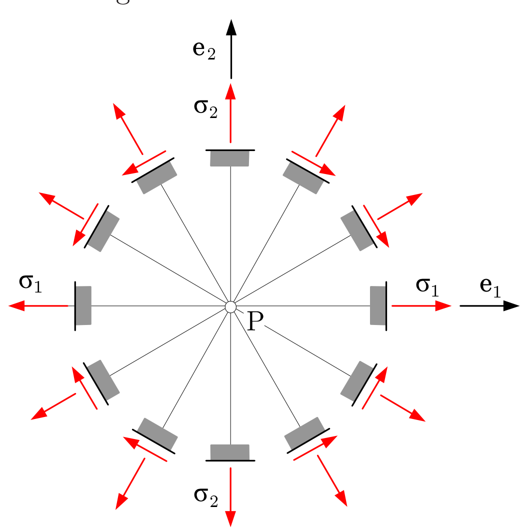
$$\mathrm{d}\sigma_n=2\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\tau}_n\,\mathrm{d}s\,. \tag{6.25}$$

Ez az eredmény azt jelenti, hogy

$$\text{ha}\quad \mathrm{d}\,\sigma_n>0\,,\qquad \text{akkor}\qquad 0<\left[\sphericalangle\,\mathbf{t},\boldsymbol{\tau}_n\right]<\pi/2\,. \tag{6.26}$$

Másszóval, ha növekszik a $\mathbf{t}$ irányában történő felületelem változáskor a normálfeszültség, azaz ha $(\mathrm{d}\,\sigma_n>0)$, akkor a $\boldsymbol{\tau}_n$ a növekvő σ_n normálfeszültségű szomszédos elemi felület normálisa felé mutat.

A 6.14. ábra a σ_1,σ_2 főfeszültségek által kifeszített fősíkban az $\mathbf{n}$ normálisokra merőleges felületelemeken – ezek a P ponttól eltávolítottan és egy kör mentén rendezetten vannak megrajzolva az ábrán – szemlélteti a σ_n és τ_n feszültségek irányát. Mivel az $\mathbf{e}_2$-től az $\mathbf{e}_1$ felé az óramutató járásával egyezően elforduló normálisokhoz rendelt N pontok a (σ_1,σ_2) főkörön a $[\sigma_2,0]$ ponttól a $[\sigma_1,0]$ pont felé mozdulnak el (lásd a 6.9. ábrát), vagyis a megfelelő felületelemeken a σ_n normálfeszültség fokozatosan növekszik, következik, hogy τ_n mindenütt a σ_1 főfeszültséget hordozó elemi felület $\mathbf{e}_1$ normálisa felé mutat.

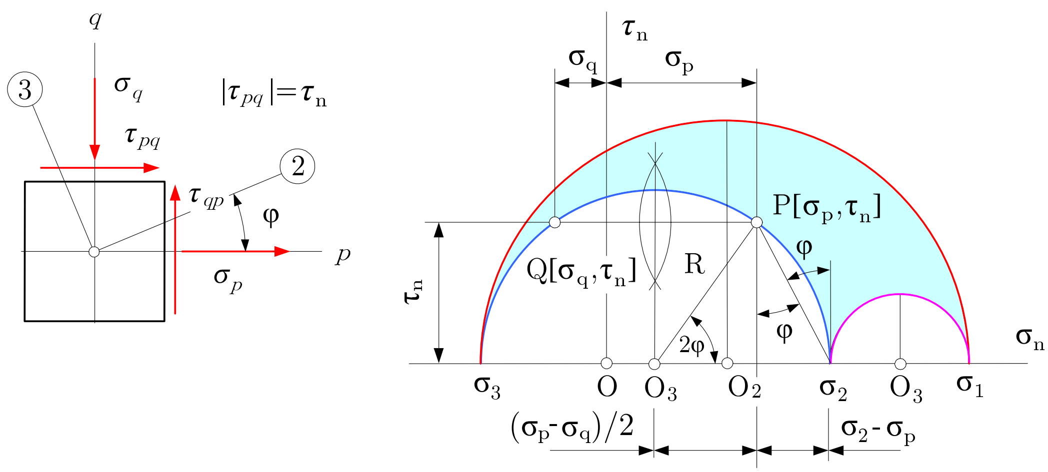


6.14. ábra.

6.2.4. A teljes feszültségi kördiagram szerkesztése, ha ismert egy feszültségi főirány. A 4.1.4. szakaszban sablont adtunk a hiányzó két főtengely és a főfeszültségek megkeresésére a részleges Mohr-féle feszültségi kördiagram segítségével.

Az alábbiak a 6.2.2. szakaszban bemutatott eredmények felhasználásával a fentebb idézett 4.1.4. szakaszhoz hasonló tárgyalásmódban sablonszerűen mutatják be a hiányzó főfeszültségek és főirányok meghatározását a teljes Mohr-féle feszültségi kördiagram segítségével. A tárgyalásmódban általános megközelítést alkalmazunk, de nem térünk ki részletesen minden lehetséges esetre. A gondolatmenet lezárásaként azonban elegendő eligazítást adunk majd az utóbbi esetek tekintetében is.

Legyen a vizsgált test egy adott P pontjában ismeretes a feszültségállapot a ponthoz kötött p, q és r koordinátatengelyek által alkotott kartéziuszi KR-ben (a p, q, r koordinátatengelyek valójában vagy az x, y, z, vagy az y, z, x, vagypedig a z, x, y koordinátatengelyekkel esnek egybe). Legyen ismert ugyanebben a pontban a feszültségi állapot: $\boldsymbol{\rho}_r = \sigma_r \mathbf{e}_r$ a feszültségvektor az r normálisú felületelemen (vagyis az r irány főirány), $\sigma_p > 0$, $\tau_{pq} = \tau_{qp} > 0$ és $\sigma_q < 0$. Feltételezzük továbbá, hogy $\sigma_r = \sigma_1$.



6.15. ábra.

A szerkesztés lépéseit pontokba szedve ismertetjük.

1. Megrajzoljuk az ismert r főirány felől nézve az elemi kockát. Érdemes eközben ügyelni arra, hogy az r-t követő első koordinátairány, azaz a p irány vízszintesen jobbra, a q pedig függőlegesen felfelé mutasson az ábrán, úgy ahogyan azt a 6.15. ábra baloldali részén szemléltetjük.
2. Mivel az r irány főirány a másik két főtengely a reá merőleges, azaz a p és q irányokat kijelölő egységvektorok által kifeszített síkban fekszik. Ez a sík fősík és a benne fekvő $\mathbf{e}_p$ és $\mathbf{e}_q$ normálisok egymásra merőlegesek. Következésképp a $\boldsymbol{\rho}_p$ és $\boldsymbol{\rho}_q$ feszültségvektorokhoz tartozó $P[\sigma_p, \tau_n]$, illetve $Q[\sigma_p, \tau_n]$ pontok (a $\mathbf{e}_p$ és $\mathbf{e}_q$ normálisok képei a σ_n, τ_n síkon) főkörön helyezkednek el, szimmetrikusan a főkör középpontjában húzott függőleges egyenesre (emlékeztetjük itt az olvasót a 6.9. ábra M és N pontjainak szerkesztésével kapcsolatos magyarázatra). A fentiek alapján a Mohr-féle feszültségi kördiagram megrajzolása első lépéseként megszerkesztjük a $P[\sigma_p, \tau_n]$, illetve $Q[\sigma_p, \tau_n]$ pontokat a σ_n, τ_n KR-ben.
3. A $P[\sigma_p, \tau_n]$ és $Q[\sigma_p, \tau_n]$ pontokat összekötő egyenes felező merőlegese kimetszi a $P[\sigma_p, \tau_n]$ és $Q[\sigma_p, \tau_n]$ pontokat tartalmazó főkör középpontját.
4. A főkör középpontját a $P[\sigma_p, \tau_n]$ (vagy $Q[\sigma_p, \tau_n]$) pontjával összekötő egyenes hossza a főkör R sugara. Ennek birtokában megrajzoljuk a főkört. A főkör σ_n tengellyel történő metszéspontjai megadják a keresett főfeszültségeket. (A jelen esetben, tekintettel a $\sigma_r = \sigma_1$ feltevésre és a főfeszültségek sorrendjével kapcsolatos $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ szabályra (a) a σ_2 és σ_3 főfeszültségeket kapjuk, (b) a megszerkesztett főkörnek pedig O_1 a középpontja.)

5. A három főfeszültség ismeretében megszerkesztjük a hiányzó két főkört. (A jelen esetben a (σ_1, σ_2) és (σ_1, σ_3) főköröket.)
6. Az első megszerkesztett főkör segítségével meghatározhatjuk a főtengelyek KR-ét, mivel a főkör segítségével megkapott nagyobbik főfeszültség (a jelen esetben a $[\sigma_2{,}0]$ pont) és a $P[\sigma_p, \tau_n]$ közötti ívhez tartozó [kerületi szög] (középponti szög) a p tengely és a vonatkozó főtengely által [bezárt szög] (bezárt szög kétszerese) – a jelen esetben φ, illetve ennek a duplája. A szöget az elemi kocka felülnézeti képén a p tengelytől mérjük fel a τ_{qp} feszültség irányában. Az ábrán a jobbkézszabálynak megfelelően jelöltük be a főtengelyeket (az 1 jelű főtengely kifelé mutat a papír síkjából).
7. A szerkesztés alapján elvégzett számítással

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_p - \sigma_q}{2}\right)^2 + \tau_{pq}^2}\,, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_p + \sigma_q}{2} + R\,, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_p + \sigma_q}{2} - R\,, \tag{6.27a}$$

az R sugár és a két főfeszültség, a φ szög a

$$\tan\varphi = \frac{\sigma_2 - \sigma_p}{|\tau_{pq}|}\,, \qquad \tan 2\varphi = \frac{2|\tau_{pq}|}{\sigma_p - \sigma_q} \tag{6.27b}$$

egyenletekből adódik, a keresett főtengelyek irányvektorait pedig a

$$\mathbf{e}_2 = \cos\varphi\,\mathbf{e}_p + \sin\varphi\,\mathbf{e}_q \quad \text{és} \quad \mathbf{e}_3 = -\sin\varphi\,\mathbf{e}_p + \cos\varphi\,\mathbf{e}_q \tag{6.27c}$$

összefüggések adják meg.

Az előző gondolatmenet során feltevés volt, hogy az ismert főfeszültség megegyezik a legnagyobb főfeszültséggel $(\sigma_r{=}\sigma_1)$. További eseteket jelent, bár a gondolatmenet lépései megegyeznek a fentebb pontokba szedett lépésekkel, ha $\sigma_r{=}\sigma_2$ vagy, ha $\sigma_r{=}\sigma_3$. Ezek a feladatok is megoldhatók tehát a fenti sablon követésével.

6.3. Alakváltozási állapot

6.3.1. Kinematikai egyenletek. A szilárd test elmozdulási és alakváltozási állapotával kapcsolatos ismereteket kellő részletességgel ismerteti a 2.2. Elmozdulási és alakváltozási állapot című szakasz. Az ott tárgyalt ismereteket tekintve kiemelt szerepe van az alakváltozások elméletében az alakváltozási tenzort az elmozdulásvektorral megadó (2.22) egyenletnek. Szokás ezt az egyenletet kinematikai, vagy geometriai egyenletnek nevezni.

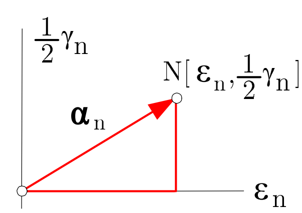
6.3.2. A Mohr-féle alakváltozási kördiagram. A 6.2.2., 6.2.3. és 6.2.4 szakaszokban leírtak mintájára a szilárd test egy P pontjának alakváltozási állapota az ún. Mohr-féle alakváltozási kördiagrammal szemléltethető. Az alakváltozási kördiagram abcissza tengelyére az előjelhelyesen vett

$$\varepsilon_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\alpha}_n \tag{6.28a}$$

fajlagos nyúlást (a σ_n normálfeszültség analogonját), a felső fél ordinátatengelyre pedig a (2.56), (2.57a,b) alapján értelmezett

$$\frac{1}{2}\gamma_n = \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{\gamma}_n| = |\boldsymbol{\alpha}_n - \varepsilon_n\mathbf{n}| \geq 0 \tag{6.28b}$$

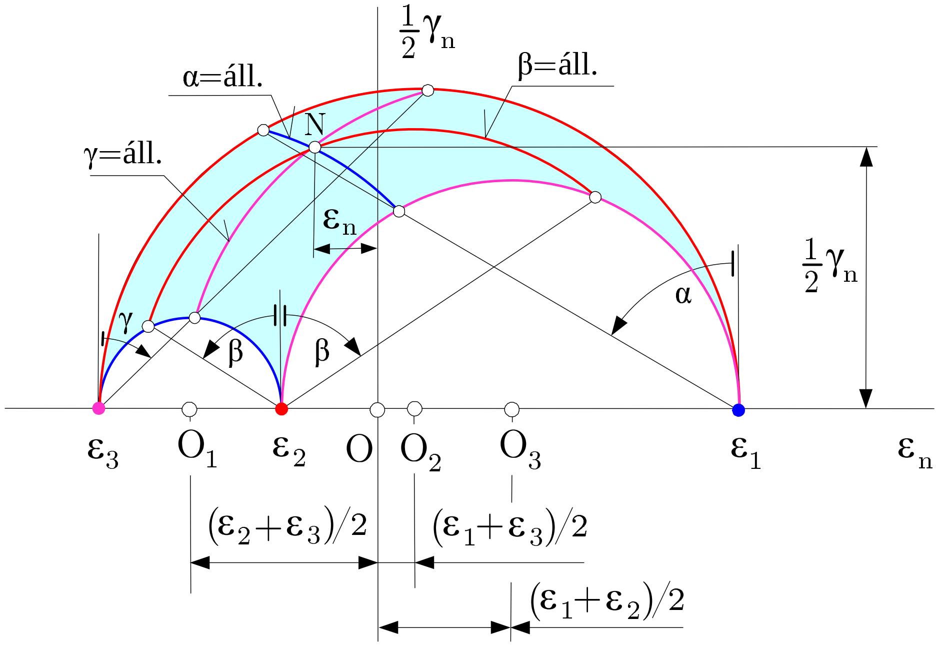
mennyiséget mérjük fel. Következik a $\boldsymbol{\gamma}_n$ vektor (2.56) alatti értelmezéséből, hogy $\boldsymbol{\gamma}_n/2$ az $\boldsymbol{\alpha}_n$ alakváltozási vektor $\mathbf{n}$ vektorra merőleges összetevője. A 2.14. ábra jelleghelyesen szemlélteti az $\boldsymbol{\alpha}_n$-t adó $\varepsilon_n\,\mathbf{n}$ és $\boldsymbol{\gamma}_n/2$ vektorokat. A P pontra illeszkedő $\mathbf{n}$ egységvektor végpontjának az elemi környezet tiszta alakváltozásából adódó



6.16. ábra.

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \varepsilon_n\,\mathbf{n} + \boldsymbol{\gamma}_n/2 \tag{6.29}$$

elmozdulása az alakváltozási kördiagramon az $N[\varepsilon_n, \gamma_n/2]$ pontot határozza meg, ugyanúgy, mint a feszültségi kördiagram esetén a $\boldsymbol{\rho}_n = \sigma_n\,\mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n$ feszültségvektor: N az $\mathbf{n}$ képe az $\varepsilon_n, \gamma_n/2$ síkon.



6.17. ábra.

A fentiek alapján értelemszerűen alkalmazhatók a másodrendű $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzort szemléltető Mohr-féle feszültségi kördiagram kapcsán a 6.2.2., 6.2.3 és 6.2.4 szakaszokban leírtak az ugyancsak másodrendű $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor Mohr-féle alakváltozási kördiagramjának szerkesztésekor.

A 6.17. ábra egy Mohr-féle alakváltozási kördiagramot szemléltet. A diagram feltünteti a tetszőleges $\mathbf{n}=\cos\alpha\,\mathbf{e}_x+\cos\beta\,\mathbf{e}_y+\cos\gamma\,\mathbf{e}_z$ irányvektorhoz tartozó alakváltozási vektor $N[\varepsilon_n,\gamma_n/2]$ képének szerkesztését.

A 6.4.3 szakaszban megmutatjuk majd, hogy izotróp, lineárisan rugalmas anyagú testek és kis alakváltozás esetén egyetlen diagramban egyesíthető a feszültségi és alakváltozási Mohr-féle kördiagram.

6.4. Általános Hooke törvény

6.4.1. Egytengelyű feszültségi állapotok. A szilárdságtan első alapkísérletének tanúsága szerint a homogén izotróp anyagú téglalap szelvényű rúd húzásakor (nyomásakor) kis alakváltozások esetén az egyszerű Hooke törvényt összegező (3.20) anyagegyenlet szerint kölcsönösen egyértelmű lineáris függvénykapcsolat áll fenn az alakváltozási és a feszültségi tenzor között. Megjegyezzük, hogy ez esetben egytengelyű (egy főfeszültség különbözött zérustól) feszültségi állapot ébred a rúdban.

A szilárdságtan második alapkísérlete esetén csavarónyomatékkal terheltük a homogén izotróp anyagú vékonyfalú csövet. A kísérleti eredmények alapján kapott (4.17) anyagegyenlet ismét azt igazolja, hogy most is kölcsönösen egyértelmű lineáris függvénykapcsolat áll fenn az alakváltozási és a feszültségi tenzor között, ha kicsik az alakváltozások. Megjegyezzük, hogy az utóbbi esetben speciális kéttengelyű feszültségi állapotot (a két főfeszültség azonos) idézett elő a csőben a csavarónyomaték.

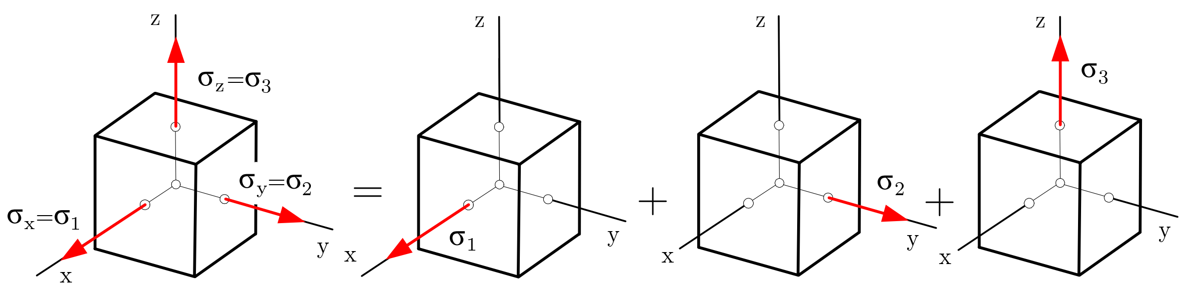
Azt várjuk a fentebb visszaidézett kísérleti eredmények alapján, hogy homogén, izotróp szilárd testben kis alakváltozások esetén mindig lineáris az $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ függvénykapcsolat, függetlenül attól a körülménytől, hogy hány tengelyű a feszültségi állapot.

Az $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{T})$ függvénykapcsolat lineáris voltának levezetésénél a következőket vesszük figyelembe:

1. A szilárd test egyensúlyi viszonyait leíró egyenletek linearitása miatt bármely háromtengelyű feszültségi állapot három egytengelyű feszültségi állapotra bontható.

2. Mivel az anyag izotróp az így nyert három egytengelyű feszültségi állapotra külön-külön alkalmazható a (3.20) anyagegyenlet.
3. Kis alakváltozások esetén lineárisak az alakváltozási állapottal kapcsolatos egyenletek. Ez azt jelenti, hogy a három egytengelyű feszültségi állapothoz tartozó alakváltozási tenzorok összege a tényleges alakváltozási tenzor.

6.4.2. Általános Hooke törvény: levezetés a szuperpozíció elv felhasználásával. Tegyük fel, hogy háromtengelyű a feszültségi állapot és az (x, y, z) KR egybeesik a főtengelyek KR-ével: $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_z$. A háromtengelyű feszültségi állapot egytengelyű feszültségi



6.18. ábra.

állapotokra történő felbontását a 6.18. ábra szemlélteti. Jelölje a három egytengelyű feszültségi állapothoz tartozó feszültségi és alakváltozási tenzorokat rendre $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$ és $\boldsymbol{T}_3$, illetve $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ és $\boldsymbol{A}_3$. Nyilvánvaló az ábra alapján, hogy a három feszültségi tenzornak

$$\underline{\mathbf{T}}_1 = \begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{T}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{\mathbf{T}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix}$$

a mátrixa. Az egytengelyű feszültségi állapotra vonatkozó (3.20) anyagegyenlet értelemszerű felhasználásával kapjuk az $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{A}_2$ és $\boldsymbol{A}_3$ alakváltozási tenzorok mátrixait:

$$\underline{\mathbf{A}}_1 = \frac{1}{2G}\left[\underline{\mathbf{T}}_1 - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_x \underline{\mathbf{E}}\right], \quad \underline{\mathbf{A}}_2 = \frac{1}{2G}\left[\underline{\mathbf{T}}_2 - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_y \underline{\mathbf{E}}\right]$$

$$\underline{\mathbf{A}}_3 = \frac{1}{2G}\left[\underline{\mathbf{T}}_3 - \frac{\nu}{1+\nu}\sigma_z \underline{\mathbf{E}}\right].$$

A szuperpozíció elv alapján képezzük most a fenti három egyenlet összegét. Kapjuk, hogy

$$\underbrace{\underline{\mathbf{A}}_1 + \underline{\mathbf{A}}_2 + \underline{\mathbf{A}}_3}_{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2G}\Big[\underbrace{\underline{\mathbf{T}}_1 + \underline{\mathbf{T}}_2 + \underline{\mathbf{T}}_3}_{\underline{\mathbf{T}}} - \frac{\nu}{1+\nu}\underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{T_I}\underline{\mathbf{E}}\Big],$$

azaz, hogy

$$\underline{\mathbf{A}} = \frac{1}{2G}\left[\underline{\mathbf{T}} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \underline{\mathbf{E}}\right], \tag{6.30}$$

vagy kirészletezve – ennek során a tényleges értéktől függetlenül kiírjuk az alakváltozási tenzor mátrixának valamennyi elemét –, hogy

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2G}\left\{\begin{bmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Kiolvasható az utóbbi képletből (a jobboldal szerint $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$), hogy az $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ vektorok nemcsak a feszültségi állapotnak, hanem az alakváltozási állapotnak is főirányai.

A (3.20) és (4.17) anyagegyenleteket kísérleti úton kaptuk meg. A mátrix alakú (6.30) anyagegyenlet a húzókísérlet eredményére támaszkodó elméleti megfontolások eredménye. Visszaadja azonban a vékonyfalú cső csavarásával kapcsolatos (4.17) anyagegyenletet is, hiszen annál a feladatnál zérus értékű volt a feszültségi tenzor első skalárinvariánsa.

A mátrix alakban felírt (6.29) anyagegyenlet a más kísérleti eredmények tanúsága szerint, tenzoriális alakú egyenletként is fennáll homogén izotróp testre kis alakváltozások esetén. A szakirodalomban ez az egyenlet az alakváltozási tenzorra felírt általános Hooke törvény néven ismert:

$$\boxed{\boldsymbol{A} = \frac{1}{2G}\left[\boldsymbol{T} - \frac{\nu}{1+\nu} T_I \boldsymbol{E}\right] \, .} \tag{6.31a}$$

Tenzoriális egyenletként alakját tekintve változatlanul, azaz a lokális KR-től függetlenül, fennáll az alakváltozási tenzorra vonatkozó általános Hooke törvény. Másként fogalmazva (a) teljesül az a természetes követelmény, hogy a (6.31a) anyagegyenlet, amely a homogén izotróp szilárd test terhelésre adott lokális válaszát írja le kis alakváltozások mellett, KR független egyenlet (b) és ennek folyományaként a lokális KR-t kifeszítő egymásra merőleges $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$ egységvektorok nem kell, hogy egybeessenek a főirányokkal. Az utóbbi esetben tömören felírva

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{A}}} = \frac{1}{2G}\begin{bmatrix} \sigma_x - \frac{\nu T_I}{1+\nu} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \frac{\nu T_I}{1+\nu} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \frac{\nu T_I}{1+\nu} \end{bmatrix}, \quad T_I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \tag{6.31b}$$

a törvény mátrix alakja. Kiolvasható az utóbbi egyenletből, hogy

$$A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{2G}\Bigg[\underbrace{(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)}_{T_I} - \frac{3\nu}{1+\nu} T_I\Bigg] = \frac{1}{2G}\left[\frac{1+\nu}{1+\nu} - \frac{3\nu}{1+\nu}\right] T_I$$

azaz, hogy

$$\boxed{A_I = \frac{1}{2G}\frac{1-2\nu}{1+\nu} T_I \, , \quad \text{vagy, hogy} \quad T_I = 2G\frac{1+\nu}{1-2\nu} A_I \, .} \tag{6.32}$$

A fenti képletek az invariánsok között fennálló összefüggések. A

$$K = 2G\frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \tag{6.33}$$

térfogati rugalmassági tényező bevezetésével az invariánsok közötti $(6.33)_1$ összefüggés az

$$A_I = \frac{1}{3K} T_I$$

alakba írható át. (K elnevezése onnan származik, hogy a (2.54) képlet szerint A_I az ε_V fajlagos térfogatváltozás.)

Kiindulva az alakváltozási tenzorra vonatkozó (6.31a) általános Hooke törvényből a

$$\boldsymbol{T} = 2G\boldsymbol{A} + \frac{\nu}{1+\nu} T_I \boldsymbol{I} = 2G\boldsymbol{A} + \frac{\nu}{1+\nu} \underbrace{2G\frac{1+\nu}{1-2\nu} A_I}_{T_I} \boldsymbol{I}$$

átalakítással kapjuk az általános Hooke törvényt a feszültségi tenzorra:

$$\boxed{\boldsymbol{T} = 2G\left[\boldsymbol{A} + \frac{\nu}{1-2\nu} A_I \boldsymbol{E}\right] \, .} \tag{6.34a}$$

A vonatkozó mátrix egyenlet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{T}}} = 2G\begin{bmatrix} \varepsilon_x - \frac{\nu A_I}{1-2\nu} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y - \frac{\nu A_I}{1-2\nu} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z - \frac{\nu A_I}{1-2\nu} \end{bmatrix}, \quad A_I = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{6.34b}$$

alakú.

Legyen $\mathbf{n}$ és $\mathbf{m}$ az $\mathbf{n}\cdot\mathbf{m}=0$, továbbá az $|\mathbf{n}|=|\mathbf{m}|=1$ feltételeket kielégítő egyébként tetszőleges irányvektor. Felhasználva a (2.43), (2.44) és a (2.83a,b) összefüggéseket, valamint az alakváltozási tenzorra vonatkozó (6.31a) Hooke törvényt az $\boldsymbol{\alpha}_n$ alakváltozási vektor ε_n, γ_{mn} elemeire az

$$\varepsilon_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{2G}\big[\underbrace{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}}_{\sigma_n} - \frac{\nu}{1+\nu}T_I\,\mathbf{n}\cdot\underbrace{\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{n}}_{\mathbf{n}}\big]\,,$$

$$\gamma_{mn} = 2\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{G}\big[\underbrace{\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}}_{\tau_{mn}} - \frac{\nu}{1+\nu}T_I\,\mathbf{m}\cdot\underbrace{\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{n}}_{\mathbf{n}}\big]$$

vagyis az

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2G}\big[\sigma_n - \frac{\nu}{1+\nu}\,T_I\big]\,, \qquad \gamma_{mn} = \frac{\tau_{mn}}{G} \tag{6.35}$$

képleteket kapjuk.

Hasonló gondolatmenettel használva fel a (2.83a,b) és a (2.43), (2.44) összefüggéseket, valamint a feszültségi tenzorra vonatkozó (6.34a) Hooke törvényt a $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor σ_n, τ_{mn} elemeire pedig

$$\sigma_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n} = 2G\big[\underbrace{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}}_{\varepsilon_n} + \frac{\nu}{1-2\nu}A_I\,\mathbf{n}\cdot\underbrace{\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{n}}_{\mathbf{n}}\big]\,,$$

$$\tau_{mn} = 2G\big[\underbrace{\mathbf{m}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n}}_{\gamma_{mn}/2} + \frac{\nu}{1-2\nu}T_I\,\mathbf{m}\cdot\underbrace{\boldsymbol{E}\cdot\mathbf{n}}_{\mathbf{n}}\big]$$

vagyis

$$\sigma_n = 2G\big[\varepsilon_n + \frac{\nu}{1-2\nu}\,T_I\big]\,, \qquad \tau_{mn} = 2G\frac{\gamma_{mn}}{2} \tag{6.36}$$

az eredmény.

6.4.3. Egyesített Mohr-féle feszültségi és alakváltozási kördiagram. A (6.29) összefüggés alapján, felhasználva a (2.58), (6.31a), $(6.35)_1$ és (6.12) képleteket, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} G\boldsymbol{\gamma}_n = 2G\frac{\boldsymbol{\gamma}_n}{2} &= 2G(\boldsymbol{\alpha}_n - \varepsilon_n\mathbf{n}) = 2G(\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{n} - \varepsilon_n\mathbf{n}) = (2G\boldsymbol{A} - 2G\varepsilon_n\boldsymbol{E})\cdot\mathbf{n} = \\ &= \left[\left(\boldsymbol{T} - \frac{\nu}{1+\nu}\,T_I\boldsymbol{E}\right) - \left(\sigma_n - \frac{\nu}{1+\nu}\,T_I\right)\boldsymbol{E}\right] = \boldsymbol{\rho}_n - \sigma_n\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau}_n\,. \end{aligned}$$

A kapott képlet szerint $\boldsymbol{\tau}_n$ a $\boldsymbol{\gamma}_n$ alakváltozási mértékkel arányos. Visszaidézve, hogy $\gamma_n = |\boldsymbol{\gamma}_n|$ és hogy $\tau_n = |\boldsymbol{\tau}_n|$ a fenti egyenletből a

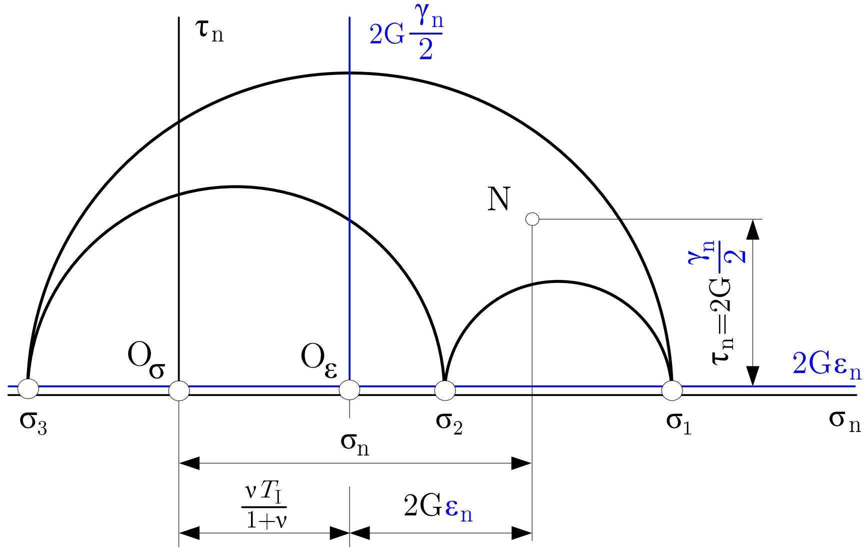
$$2G\frac{\gamma_n}{2} = \tau_n \tag{6.37a}$$

összefüggés következik. Társítsuk ezt az összefüggést a $(6.35)_1$ egyenlet alapján írható

$$2G\varepsilon_n = \sigma_n - \frac{\nu}{1+\nu}\,T_I \tag{6.37b}$$

összefüggéssel.

A (6.37) képletek tanúsága szerint a Mohr-féle feszültségi kördiagram Mohr-féle alakváltozási kördiagramként is szolgálhat, ha (a) eltoljuk az origót az abcissza tengelyen a $T_I\nu/(1+\nu)$ értékkel (pozitív irányba, ha $T_I\nu/(1+\nu) > 0$, ellenkező esetben negatív irányba); (b) az $O_\varepsilon = [T_I\nu/(1+ +\nu),0]$ kezdőpontú új abcisszatengelyen a σ_n helyett $2G\varepsilon_n$-et mérünk; (c) az O_ε kezdőpontú ordinátatengelyen a τ_n helyett az alakváltozási Mohr kör $\gamma_n/2$-jének $2G$-szeresét mérjük (vagyis mindkét új tengelyen a $2G$-vel skálázunk). Az *egyesített feszültségi és alakváltozási Mohr-féle kördiagramot* a 6.19. ábra szemlélteti. Az új KR-t kék szín különbözteti meg a régitől.



6.19. ábra.

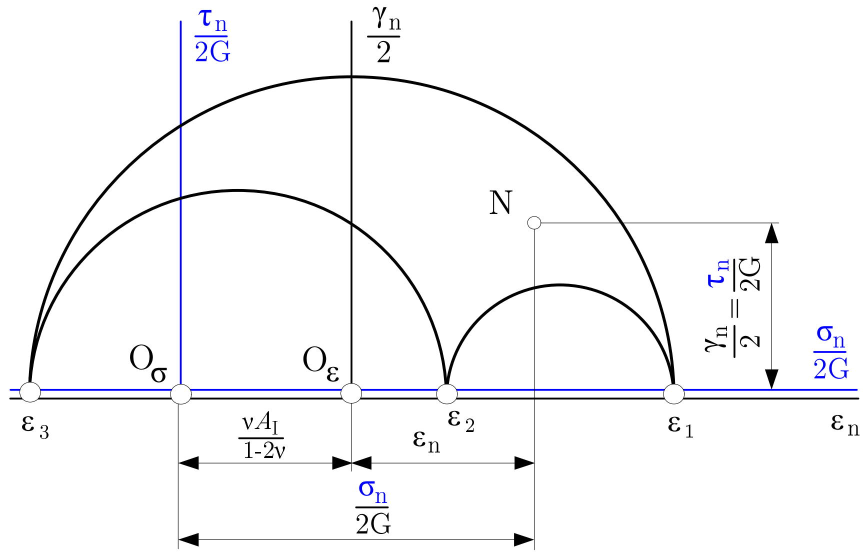
A (6.37a) átrendezésével kapott

$$\frac{\tau_n}{2G} = \frac{\gamma_n}{2} \tag{6.38a}$$

képlethez a $(6.36)_1$ egyenlet alapján írható

$$\frac{\sigma_n}{2G} = \varepsilon_n + \frac{\nu}{1-2\nu}\,A_I \tag{6.38b}$$

egyenletet érdemes társítani. Megismételve a 6.19. ábrára vezető gondolatmenetet az a következtetés adódik a (6.38) képletekből, hogy a Mohr-féle alakváltozási kördiagram Mohr-féle feszültségi kördiagramként is használható, ha (a) eltoljuk az origót az abcissza tengelyen az $A_I\nu/(1-2\nu)$ értékkel (negatív irányba, ha $A_I\nu/(1-2\nu) > 0$, ellenkező esetben pozitív irányba); (b) az $O_\sigma = [-A_I\nu/(1-2\nu),0]$ kezdőpontú új abcisszatengelyen a ε_n helyett $\sigma_n/2G$-t mérünk; (c) az O_σ kezdőpontú ordinátatengelyen a $\gamma_n/2$ helyett a feszültségi Mohr kör τ_n-jének $1/2G$-szeresét mérjük (vagyis mindkét új tengelyen $1/2G$-vel skálázunk). Az *egyesített alakváltozási és feszültségi Mohr-féle kördiagramot* a 6.20. ábra szemlélteti. Az új KR-t most is kék szín különbözteti meg a régitől.



6.20. ábra.

6.5. Energetikai állapot

6.5.1. Rugalmas test fajlagos alakváltozási energiája. A 2.4.2. pontban rámutattunk, hogy hőhatások hiányában a rugalmas test egy pontja elemi környezetének energetikai állapotát az u fajlagos alakváltozási energia határozza meg. A test energetikai állapotát pedig, visszautalunk itt a 2.6. szakaszban mondottakra, az $u(\mathbf{r})$ skalárfüggvény, azaz a fajlagos alakváltozási energia mező határozza meg. Néhány speciális esetben: (a) húzott vagy nyomott rúd (3.25) összefüggés, (b) vékonyfalú körgyűrűkeresztmetszetű csavart rúd (4.32) összefüggés, tisztáztuk az u fajlagos alakváltozási energia számításának módját. A képletek szerint az u az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzor, illetve a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor elemeinek függvénye. Várható tehát, hogy általános esetben is az $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{T}$ ismeretében számítható az u. A kérdés az, hogy hogyan.

Tegyük fel, hogy a 6.1. ábrán vázolt és a vizsgálat tárgyát képező homogén, lineárisan rugalmas B testet, a $\mathbf{q}$ sűrűségű térfogat ER, valamint a felületén megoszló $\mathbf{p}$ ER terheli és elhanyagolhatók a hőhatások. Feltesszük továbbá, hogy a terhelő erőrendszer sűrűségvektorai a zérus értékből kiindulva lassan végbemenő folyamatként (kvázistatikus terhelésként) úgy érik el végleges értéküket, hogy változásuk a terhelési folyamat során egyetlen monoton növekvő skaláris paraméterrel leírható (egyparaméteres a terhelés). Mivel a test lineárisan rugalmas ez azt eredményezi, hogy kétszer akkora terhelés esetén kétszer akkorák az egyes pontok elmozdulásai, kétszer akkorák az alakváltozások (az alakváltozási tenzor elemei), és kétszer akkorák a feszültségek (a feszültségi tenzor elemei).

Jelölje τ a terhelési paramétert. Feltesszük, hogy a $\tau=0$ érték a terhelési folyamat kezdetének (a terheletlen állapotnak), a $\tau=1$ érték pedig a terhelési folyamat végének (a teljes terhelésnek) felel meg: $0 \leq \tau \leq 1$. Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_\tau &= \tau \mathbf{q}\,, & \mathbf{p}_\tau &= \tau \mathbf{p}\,, \\ \mathbf{u}_\tau &= \tau \mathbf{u}\,, & \boldsymbol{\rho}_{n\tau} &= \tau \boldsymbol{\rho}_n\,, \end{aligned} \tag{6.39}$$

a jellemző mennyiségek értéke, ahol a τ index nélkül írt értékek a terhelési folyamat végéhez tartoznak.

Tekintsük a továbbiakban a B test V résztartományát. Mivel ez teljes egészében a test belsejében fekszik, térfogatát a $\mathbf{q}$ sűrűségű ER, A felületét pedig a $\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}$ sűrűségű ER terheli. Más szavakkal ez a két ER a V résztartomány külső ER-e.

A (2.95) összefüggés szerint a V résztartományban felhalmozódott U rugalmas energiára nézve fennáll az

$$U = \int_V u\,\mathrm{d}V = W_K \tag{6.40}$$

egyenlet. Szavakban: a felhalmozódott rugalmas energia megegyezik a kiragadott résztartományon működő külső ER munkájával. Nyilvánvaló, hogy a terhelési folyamat során a τ paraméter $\mathrm{d}\tau$ megváltozásához az elmozdulásmező $\mathrm{d}\mathbf{u} = \mathbf{u}\mathrm{d}\tau$ megváltozása tartozik, és eközben

$$\mathrm{d}W_K = \int_V \mathbf{q}_\tau \cdot \mathrm{d}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \int_A \boldsymbol{\rho}_{n\tau} \cdot \mathrm{d}\mathbf{u}\,\mathrm{d}A$$

a V résztartományon az aktuális τ-hoz tartozó időpontban működő $\mathbf{q}_\tau$ és $\boldsymbol{\rho}_{n\,\tau}$ külső ER munkája. A (6.39) képletek felhasználásával kapjuk innen, hogy

$$\mathrm{d}W_K = \left(\int_V \mathbf{q}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \int_A \boldsymbol{\rho}_n \cdot \mathbf{u}\,\mathrm{d}A \right) \tau\mathrm{d}\tau$$

hiszen a τ paraméter független a helytől (vagyis a térfogati és felületi integráloktól). A V résztartományon működő teljes külső ER munkáját a $\mathrm{d}W_K$ elemi munka $\tau=0$ és $\tau=1$ határok között vett τ szerinti integrálja adja. A $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor képletét és az

$$\int_{\tau=0}^{\tau=1} \tau\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}$$

integrált felhasználva kapjuk, hogy

$$\boxed{U = W_K = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{q}\cdot\mathbf{u}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2}\int_A \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A\,.} \tag{6.41}$$

A képlet jobboldalán álló felületi integrál térfogati integrállá alakítható át, ha felhasználjuk a (6.3) alatti Gauss-Osztrogradszkij tételt:

$$\int_A \mathbf{u}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}A = \int_V (\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{T})\cdot\nabla\,\mathrm{d}V\,.$$

A szorzatderiválás szabályának alkalmazásával és a (2.7) összefüggés figyelembevételével tovább alakítható a térfogati integrál integrandusza:

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{T})\cdot\nabla = \\
&\quad = \overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\nabla + \mathbf{u}\cdot\overset{\downarrow}{\boldsymbol{T}}\cdot\nabla = \overset{\downarrow}{\mathbf{u}}\cdot\boldsymbol{T}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) + \mathbf{u}\cdot\overset{\downarrow}{\boldsymbol{T}}\cdot\nabla = \\
&\quad = \underbrace{\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x}}_{\mathbf{u}_x}\cdot\underbrace{\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_x}_{\boldsymbol{\rho}_x} + \underbrace{\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial y}}_{\mathbf{u}_y}\cdot\underbrace{\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_y}_{\boldsymbol{\rho}_y} + \underbrace{\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z}}_{\mathbf{u}_z}\cdot\underbrace{\boldsymbol{T}\cdot\mathbf{e}_z}_{\boldsymbol{\rho}_z} + \mathbf{u}\cdot\overset{\downarrow}{\boldsymbol{T}}\cdot\nabla = \\
&\quad = \mathbf{u}_x\cdot\boldsymbol{\rho}_x + \mathbf{u}_y\cdot\boldsymbol{\rho}_y + \mathbf{u}_z\cdot\boldsymbol{\rho}_z + \mathbf{u}\cdot\overset{\downarrow}{\boldsymbol{T}}\cdot\nabla\,.
\end{aligned}$$

A kapott eredménnyel, kihasználva a (6.5) egyensúlyi egyenletet és a (6.40) energia egyenletet, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
W_K &= \frac{1}{2}\int_V \big[\underbrace{(\boldsymbol{T}\cdot\nabla + \mathbf{q})}_{=\mathbf{0}}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{u}_x\cdot\boldsymbol{\rho}_x + \mathbf{u}_y\cdot\boldsymbol{\rho}_y + \mathbf{u}_z\cdot\boldsymbol{\rho}_z\big]\,\mathrm{d}V = \\
&= \frac{1}{2}\int_V \left(\mathbf{u}_x\cdot\boldsymbol{\rho}_x + \mathbf{u}_y\cdot\boldsymbol{\rho}_y + \mathbf{u}_z\cdot\boldsymbol{\rho}_z\right)\,\mathrm{d}V = \int_V u\,\mathrm{d}V = U\,.
\end{aligned}$$

Innen

$$u = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}_x\cdot\boldsymbol{\rho}_x + \mathbf{u}_y\cdot\boldsymbol{\rho}_y + \mathbf{u}_z\cdot\boldsymbol{\rho}_z\right) \tag{6.42}$$

a fajlagos alakváltozási energia számításának formulája.

Az egyszerűbb írásmód kedvéért bevezetjük két másodrendű tenzor ún. energia típusú szorzatát (kettős skaláris szorzatát). Tekintsük az elmozdulásmező derivált tenzorának és a feszültségi tenzornak diadikus alakjait az (x, y, z) KR-ben:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U} &= \mathbf{u}_x\circ\mathbf{e}_x + \mathbf{u}_y\circ\mathbf{e}_y + \mathbf{u}_z\circ\mathbf{e}_z\,, \\
\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{\rho}_x\circ\mathbf{e}_x + \boldsymbol{\rho}_y\circ\mathbf{e}_y + \boldsymbol{\rho}_z\circ\mathbf{e}_z\,.
\end{aligned}$$

A két tenzor energia típusú szorzatát az

$$\boxed{\boldsymbol{U}\cdot\cdot\,\boldsymbol{T} = \mathbf{u}_x\cdot\boldsymbol{\rho}_x + \mathbf{u}_y\cdot\boldsymbol{\rho}_y + \mathbf{u}_z\cdot\boldsymbol{\rho}_z} \tag{6.43}$$

kifejezés értelmezi. (A képlet baloldala jelölésbeli megállapodás, a jobboldala pedig az értelmezés.) Vegyük észre, hogy (a) az energia típusú szorzat skalár, (b) az értelmezés bármely két másodrendű tenzorra érvényes hiszen az összetartozó képvektorok skalárszorzatainak összege áll a jobboldalon (c) az értelmezésből adódik, hogy a fenti szorzás kommutatív művelet:

$$\boldsymbol{U}\cdot\cdot\,\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{U}\,. \tag{6.44}$$

Néhány a szorzattal kapcsolatos és a későbbiekben felhasználásra kerülő összefüggést az alábbiak ismertetnek:

1. Számítsuk ki az $\boldsymbol{U}$ alakváltozási tenzor és az $\boldsymbol{E}$ egységtenzor energia típusú szorzatát:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}\cdot\cdot\,\boldsymbol{E} &= (\mathbf{u}_x\circ\mathbf{e}_x + \mathbf{u}_y\circ\mathbf{e}_y + \mathbf{u}_z\circ\mathbf{e}_z)\cdot\cdot\,(\mathbf{e}_x\circ\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y\circ\mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z\circ\mathbf{e}_z) = \\
&= \mathbf{u}_x\cdot\mathbf{e}_x + \mathbf{u}_y\cdot\mathbf{e}_y + \mathbf{u}_z\cdot\mathbf{e}_z = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = U_I\,.
\end{aligned}$$

A kapott eredmény szerint valamely tenzor és az egységtenzor energia típusú szorzata a tenzor első skalárinvariánsa. Következőleg fennállnak az

$$\boldsymbol{A}\cdot\cdot\,\boldsymbol{E}=A_I\,, \qquad \boldsymbol{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{E}=T_I\,, \\ \boldsymbol{E}\cdot\cdot\,\boldsymbol{E}=3 \tag{6.45a}$$

összefüggések.

2. Képezzük a későbbiek kedvéért a (2.28), (2.29) és (2.30) összefüggések figyelembevételével a szimmetrikus $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor és a ferdeszimmetrikus $\boldsymbol{\psi}$ forgástenzor energia típusú szorzatát. Ha kihasználjuk a szimmetriát és a ferdeszimmetriát, akkor kapjuk, hogy

$$\boldsymbol{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{\psi}=(\boldsymbol{\rho}_x\circ\mathbf{e}_x+\boldsymbol{\rho}_y\circ\mathbf{e}_y+\boldsymbol{\rho}_z\circ\mathbf{e}_z)\cdot\cdot\,(\boldsymbol{\psi}_x\circ\mathbf{e}_x+\boldsymbol{\psi}_y\circ\mathbf{e}_y+\boldsymbol{\psi}_z\circ\mathbf{e}_z)= \\ =\boldsymbol{\rho}_x\cdot\boldsymbol{\psi}_x+\boldsymbol{\rho}_y\cdot\boldsymbol{\psi}_y+\boldsymbol{\rho}_z\cdot\boldsymbol{\psi}_z=\tau_{xy}(\psi_{yx}+\psi_{xy})+\tau_{yz}(\psi_{yz}+\psi_{zy})+\tau_{zx}(\psi_{zx}+\psi_{xz})=0\,. \tag{6.45b}$$

Szavakban: zérus értékű a szimmetrikus és ferdeszimmetrikus tenzorok energia típusú szorzata.

Az energia típusú szorzat (6.43) alatti értelmezését felhasználva a (6.42) összefüggésből

$$u=\frac{1}{2}\boldsymbol{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{U}=\frac{1}{2}\boldsymbol{T}\cdot\cdot\,(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\psi})=\frac{1}{2}\boldsymbol{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{A}$$

a fajlagos belső energia számításának képlete. A képlet felírása során kihasználtuk, hogy a (2.15) felbontási tétel szerint $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\psi}$ továbbá, hogy fennáll a (6.45b) összefüggés.

A (6.45b) összefüggésre vezető gondolatmenet alapján nem nehéz belátni, hogy

$$\boxed{\begin{aligned} u=\frac{1}{2}\boldsymbol{T}\cdot\cdot\,\boldsymbol{A}&=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\rho}_x\cdot\boldsymbol{\alpha}_x+\boldsymbol{\rho}_y\cdot\boldsymbol{\alpha}_y+\boldsymbol{\rho}_z\cdot\boldsymbol{\alpha}_z\right)= \\ &=\frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x+\sigma_y\varepsilon_y+\sigma_z\varepsilon_z+\tau_{xy}\gamma_{xy}+\tau_{yz}\gamma_{yz}+\tau_{zx}\gamma_{zx}\right)\,.\end{aligned}} \tag{6.46}$$

A fajlagos alakváltozási energia az általános Hooke törvény felhasználásával kifejezhető vagy csak a σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yz} és τ_{zx} feszültségekkel, vagy csak az ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz} és γ_{zx} fajlagos alakváltozásokkal. A (6.35) képletek helyettesítésével kapjuk, hogy

$$u=\frac{1}{4G}\left[\sigma_x\left(\sigma_x-\frac{\nu}{1+\nu}\,T_I\right)+\sigma_y\left(\sigma_x-\frac{\nu}{1+\nu}\,T_I\right)+\sigma_x\left(\sigma_x-\frac{\nu}{1+\nu}\,T_I\right)+2\tau_{xy}^2+2\tau_{yz}^2+2\tau_{zx}^2\right]$$

Rendezés után a T_I skalárinvariáns $(6.31\text{b})_2$ alatti értékét is helyettesítve

$$u=\frac{1}{4G}\left[\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2-\frac{\nu}{1+\nu}\left(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z\right)^2+2\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)\right] \tag{6.47}$$

az eredmény. Az u fajlagos alakváltozási energia alakváltozások függvényében történő előállítását gyakorlatra hagyjuk.

6.5.2. Fajlagos torzítási-, és térfogatváltozási energia. A

$$\boxed{\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\frac{A_I}{3}\boldsymbol{E} \quad \text{és} \quad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{T}-\frac{T_I}{3}\boldsymbol{E}} \tag{6.48}$$

összefüggések az $\boldsymbol{A}$ alakváltozási-, és a $\boldsymbol{T}$ feszültségtenzor deviátorait (deviátortenzorait) értelmezik. A (6.45a) képletek alapján

$$D_I=\boldsymbol{D}\cdot\cdot\,\boldsymbol{E}=\underbrace{\boldsymbol{A}\cdot\cdot\,\boldsymbol{E}}_{A_I}-\frac{A_I}{3}\underbrace{\boldsymbol{E}\cdot\cdot\,\boldsymbol{E}}_{3}=0\,. \tag{6.49a}$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$S_I=0\,. \tag{6.49b}$$

A (6.49) képletek szerint zérus a deviátortenzorok első skaláris invariánsa.

A $\boldsymbol{D}$ alakváltozási és az $\boldsymbol{S}$ feszültségi deviátor, illetve a vonatkozó A_I és T_I invariánsok ismeretében deviátoros és gömbi részre bontható fel az alakváltozási és feszültségi tenzor:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D} + \underbrace{\frac{1}{3}A_I\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{A}_g} \qquad \text{és} \qquad \boldsymbol{T} = \boldsymbol{S} + \underbrace{\frac{1}{3}T_I\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{T}_g}\,. \tag{6.50}$$

A gömbi jelző arra utal, hogy az $\boldsymbol{A}_g$ és $\boldsymbol{T}_g$ gömbi tenzorok gömböt gömbre képeznek le torzításmentesen. Ez egyben azt is jelenti, hogy (a) az alakváltozási tenzor deviátoros része csak a tiszta torzulást írja le hiszen zérus az első invariánsa, azaz nem tartozik hozzá fajlagos térfogatváltozás, (b) az alakváltozási tenzor gömbi része pedig a tiszta térfogatváltozást adja, hiszen nem tartozik hozzá torzulás.

Írjuk fel a feszültségi tenzorra vonatkozó (6.34a) Hooke törvényt a (6.50) felbontás alapján a deviátorokkal. Ha még az invariánsok közötti $(6.32)_2$ összefüggést is kihasználjuk, akkor kapjuk, hogy

$$\underbrace{\boldsymbol{S} + \frac{T_I}{3}\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{T}} = 2G\Big[\underbrace{\boldsymbol{D} + \frac{A_I}{3}\boldsymbol{E}}_{\boldsymbol{A}} + \frac{\nu}{1-2\nu}A_I\boldsymbol{E}\Big] = 2G\boldsymbol{D} + \underbrace{2G\frac{1+\nu}{1-2\nu}\frac{A_I}{3}}_{T_I/3}$$

azaz, hogy

$$\boxed{\boldsymbol{S} = 2G\boldsymbol{D}\,.} \tag{6.51}$$

Az utóbbi egyenlet a deviátorokkal kapcsolatos Hooke törvény.

A fajlagos alakváltozási energia is felírható a deviátorokkal. Kihasználva a (6.45a) és (6.49) összefüggéseket a (6.46) és (6.50) képletek egybevetése során az

$$u = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{S} + \frac{T_I}{3}\boldsymbol{E}\right)\cdot\cdot\left(\boldsymbol{D} + \frac{A_I}{3}\boldsymbol{E}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot\cdot\boldsymbol{D} + \underbrace{\frac{T_I S_I}{6}}_{=0} + \underbrace{\frac{A_I D_I}{6}}_{=0} + \frac{T_I A_I}{18}\boldsymbol{E}\cdot\cdot\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot\cdot\boldsymbol{D} + \frac{T_I A_I}{6}$$

eredmény adódik. Az utóbbi képlet alapján két részre bontható a fajlagos alakváltozási energia:

$$\boxed{\begin{gathered} u = u_T + u_V\,, \\ u_T = \frac{1}{2}\boldsymbol{S}\cdot\cdot\boldsymbol{D}\,, \qquad u_V = \frac{T_I A_I}{6}\,. \end{gathered}} \tag{6.52}$$

Az u_T-vel jelölt rész az ún. *fajlagos torzítási energia*. Az elnevezés arra utal, hogy ez a képletrész a deviátor tenzorokból adódik, ahol is $\boldsymbol{D}$ a tiszta torzulást írja le, míg $\boldsymbol{S}$ a (6.49) Hooke törvény szerint a $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzor $\boldsymbol{D}$-hez tartozó része.

Az u_V-vel jelölt rész az ún. *fajlagos térfogatváltozási energia*. Az elnevezésnek az a magyarázata, hogy ez az energia az összetartozó $\boldsymbol{T}_g$ és $\boldsymbol{A}_g$ gömbi részekből származik. Itt $\boldsymbol{A}_g$ a tiszta térfogatváltozást írja le.

A deviátorokkal kapcsolatos (6.49) Hooke törvény és az invariánsok között fennálló $(6.32)_1$ összefüggéssel

$$u_T = \frac{1}{4G}\boldsymbol{S}\cdot\cdot\boldsymbol{S}\,, \qquad u_V = \frac{1}{12G}\frac{1-2\nu}{1+\nu}T_I^2 \tag{6.53}$$

a fajlagos alakváltozási energia két része. Az utóbbi képletek lehetőséget adnak arra, hogy az u_T-t és u_V energiarészeket a feszültségi tenzor elemeivel fejezzük ki. Az átalakítások során felhasználjuk, hogy:

(a) Az u-t adó (6.46) képlet és az u_T-t adó $(6.53)_1$ összefüggés egybevetése alapján azonnal felírható az u_T az $\boldsymbol{S}$ tenzor elemeivel: σ_n helyére s_n-et, τ_{mn} helyére s_{mn}-et; ε_n helyére s_n-et, γ_{mn} helyére $2s_{mn}$-et kell írnunk a (6.46) képlet jobboldalán, ahol $m, n = x, y, z$; $m \neq n$. Az eredmény:

$$u_T = \frac{1}{4G}\left[s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 + 2\left(s_{xy}^2 + s_{yz}^2 + s_{zx}^2\right)\right]\,. \tag{6.54a}$$

(b) A $(6.48)_2$ értelmezés alapján

$$\underline{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} s_x & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_y & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \frac{2\sigma_y-\sigma_x-\sigma_z}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \frac{2\sigma_z-\sigma_x-\sigma_y}{3} \end{bmatrix} \tag{6.54b}$$

az $\boldsymbol{S}$ tenzor mátrixa.

(c) A lenti képlet baloldalán elvégzett négyzetre emelés és rendezés szerint fennáll a

$$\begin{aligned}(2\sigma_x-\sigma_y-\sigma_z)^2+(2\sigma_y-\sigma_x-\sigma_z)^2+(2\sigma_z-\sigma_x-\sigma_y)^2 = \\ = \left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2\right]\end{aligned} \tag{6.54c}$$

összefüggés.

Helyettesítsük mostmár a (6.54b)-ből s_n és s_{mn} értékeit a σ_n és τ_{mn} feszültségekkel kifejezve az u_T-t adó (6.54a) képletbe, majd vegyük figyelembe a (6.54c) átalakítást. Az eredmény az u_T fajlagos torzítási energia a feszültségekkel:

$$\boxed{u_T = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)\right] .} \tag{6.55}$$

A $(6.53)_2$ képletből T_I skalárinvariáns $(6.31\text{b})_2$ alatti értékének helyettesítése után

$$u_V = \frac{1}{12G}\frac{1-2\nu}{1+\nu}(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)^2 \tag{6.56}$$

a fajlagos térfogatváltozási energia feszültségekkel kifejezett értéke.

6.5.3. Fajlagos alakváltozási energia rudak egyszerű igénybevételeire. Az általános érvényű (6.47) képlet alapján számítható ezekben az esetekben a fajlagos alakváltozási energia.

Húzás (nyomás): $N =$ állandó. Figyelembe véve a feszültségi tenzor mátrixát adó (3.12) összefüggést, a σ_z-t adó (3.15) összefüggést, valamint az anyagállandók között fennálló (4.27) egyenletet kapjuk, hogy

$$u = \frac{1}{4G(1+\nu)}\sigma_z^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_z^2}{E} = \frac{1}{2}\frac{N^2}{A^2E} . \tag{6.57}$$

Hajlítás: $M_h = M_{hx} =$ állandó, a keresztmetszet x és y súlyponti tengelyei a főtengelyek, egytengelyű feszültségi állapot, σ_z az egyetlen nem zérus feszültség. Értéke az (5.15) képlettel számítható. Mivel egytengelyű a feszültségi állapot használható az előző képlet első része. Következésképp

$$u = \frac{1}{2}\frac{\sigma_z^2}{E} = \frac{1}{2}\frac{M_{hx}^2}{I_x^2E}\,y^2 \tag{6.58}$$

Csavarás: Kör és körgyűrűkeresztmetszetű rudat tekintünk HKR-ben. A csavarónyomaték M_c. A nem zérus $\tau_{R\varphi}$ feszültség (4.45) alatti értékével a HKR-ben érvényes (6.69) egyenletből

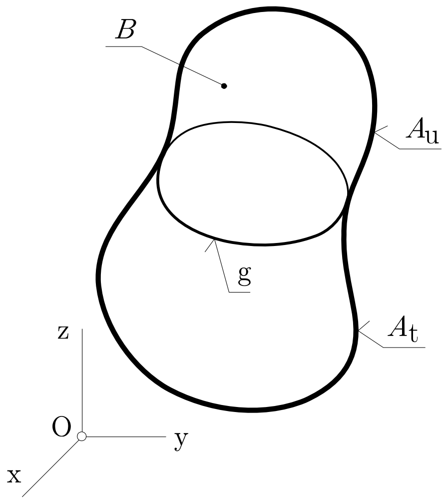
$$u = \frac{1}{2}\frac{\tau_{R\varphi}^2}{G} = \frac{1}{2}\frac{M_c^2}{I_p^2G}R^2 . \tag{6.59}$$

6.6. A rugalmasságtan alapegyenlet-rendszere

A homogén izotróp szilárd test kis alakváltozás melletti mechanikai állapotának leírására szolgáló és a 2.6. szakaszban összegezésszerűen felsorolt $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ elmozdulásmező (3 skaláris ismeretlen), $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(\mathbf{r})$ alakváltozási tenzormező (6 skaláris ismeretlen a szimmetria miatt), $\boldsymbol{T}=\boldsymbol{T}(\mathbf{r})$ feszültségi tenzormező (6 skaláris ismeretlen a szimmetria miatt), valamint az $u = u(\mathbf{r})$ fajlagos alakváltozási energia (1 skaláris ismeretlen), mint a hely függvénye összesen 3+6+6+1=16 ismeretlent jelent.

Az első 15 ismeretlen meghatározására szolgáló teljes egyenletrendszer (a) mezőegyenletekből, és (b) a csatlakozó peremfeltételekből épül fel.

Az ábrán vázolt B jelű szilárd test A határfelülete az A_u és A_t jelű részekre bontott. A két részt a g görbe választja el egymástól.



6.21. ábra.

A keresett $\mathbf{u}$ elmozdulásmező, $\boldsymbol{A}$ és $\boldsymbol{T}$ alakváltozási és feszültségi tenzorok között a szilárd test minden egyes pontjában fennállnak, mint mezőegyenletek

– a (2.16) egyenlet szerinti

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\circ\nabla + \nabla\circ\mathbf{u}\right) \tag{6.60a}$$

tenzoriális alakú kinematikai egyenlet (összesen 6 skaláris egyenlet);

– a (6.34a) képlettel adott

$$\boldsymbol{T} = 2G\left[\boldsymbol{A} + \frac{\nu}{1-2\nu}A_I\boldsymbol{E}\right] \tag{6.60b}$$

tenzoriális anyagegyenlet (összesen 6 skaláris egyenlet);

– a (6.5) képlet szerinti

$$\boldsymbol{T}\cdot\nabla + \mathbf{q} = 0 \tag{6.60c}$$

vektoriális alakú egyensúlyi egyenlet (összesen 3 skaláris egyenlet).

Ez összesen 15 egyenlet a 15 ismeretlent jelentő $\mathbf{u}$ elmozdulásmezőre, $\boldsymbol{A}$ alakváltozási tenzormezőre és $\boldsymbol{T}$ feszültségi tenzormezőre.

Tegyük fel, hogy A_u jelű peremrészen az elmozdulásmező az előírt, és $\tilde{\mathbf{u}}$ jelöli az előírt elmozdulást. Feltesszük továbbá, hogy az A_t jelű peremrészen felületen megoszló terhelés működik. Ennek sűrűségvektorát $\tilde{\mathbf{p}}$ jelöli. Nyilvánvaló, hogy a megoldásként adódó $\mathbf{u}$ elmozdulásmező meg kell, hogy egyezzen A_u-n az ott előírt elmozdulásmezővel. Ugyanígy adódik, hogy csak akkor lehetséges lokális egyensúly az A_t peremfelületen, ha a $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor megegyezik ugyanitt az előírt peremterheléssel. Következőleg a (6.60) mezőegyenleteket ki kell egészíteni az

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} \quad & \text{az } A_u\text{-n}\,, \\ \boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n} = \tilde{\mathbf{p}} \quad & \text{az } A_t\text{-n} \end{aligned} \tag{6.61}$$

alakú peremfeltételekkel. Szokás az első peremfeltételt elmozdulási, a másodikat pedig feszültségi peremfeltételnek nevezni.

A (6.60) mezőegyenletek és (6.61) peremfeltételek által meghatározott peremértékfeladat megoldásának ismeretében a (6.46) szerinti

$$u = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\rho}_x\cdot\boldsymbol{\alpha}_x + \boldsymbol{\rho}_y\cdot\boldsymbol{\alpha}_y + \boldsymbol{\rho}_z\cdot\boldsymbol{\alpha}_z\right) \tag{6.62}$$

képletből adódik 16-ik ismeretlenként a fajlagos alakváltozási energia.

A (6.60) mezőegyenletek és a (6.61) peremfeltételek a rugalmasságtan alap-egyenletrendszerét képezik. Ezek megoldása speciális és a mérnöki gyakorlatban fontos esetekben részint analitikusan, részint numerikus módszerekkel kereshető meg. Az utóbbiak közül érdemes ehelyütt is megemlíteni a végeselem módszert és a peremelem módszert.

6.7. Mintafeladatok

6.1. Írja fel HKR-ben az egyensúlyi egyenleteket!

A (2.104) és a (2.99) képletek helyettesítésével az

$$\boldsymbol{T}\cdot\nabla + \mathbf{q} = \left(\boldsymbol{\rho}_R\circ\mathbf{e}_R + \boldsymbol{\rho}_\varphi\circ\mathbf{e}_\varphi + \boldsymbol{\rho}_z\circ\mathbf{e}_z\right)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial R}\mathbf{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}\mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{e}_z\right) + \mathbf{q} = 0$$

egyenlet következik a (6.5) egyensúlyi egyenletből. Elvégezve a kijelölt deriválásokat, a skaláris szorzást és kihasználva eközben az $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\varphi$ egységvektorok deriválásával kapcsolatos (2.98a,b) összefüggéseket kapjuk, hogy

$$\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_R}{\partial R}+\frac{\boldsymbol{\rho}_R}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial \boldsymbol{\rho}_z}{\partial z}+\mathbf{q}=0\,. \tag{6.63}$$

Az $\mathbf{e}_R$, $\mathbf{e}_\varphi$ és $\mathbf{e}_z$ egységvektorokkal történő további skaláris szorzás után, tekintettel a $\boldsymbol{\rho}_R$, $\boldsymbol{\rho}_\varphi$ és $\boldsymbol{\rho}_z$ feszültségvektorok (2.103a,b,c) alatti értelmezésére, a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_R}{\partial R}+\frac{\sigma_R-\sigma_\varphi}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{zR}}{\partial z}+q_R=0\\
\frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R}+\frac{\tau_{\varphi R}+\tau_{R\varphi}}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z}+q_\varphi=0\\
\frac{\partial \tau_{zR}}{\partial R}+\frac{\tau_{zR}}{R}+\frac{1}{R}\frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+q_z=0
\end{aligned} \tag{6.64}$$

alakban adódnak a skaláris egyensúlyi egyenletek.

6.2. Milyen térfogati terhelés esetén elégíti ki az egyensúlyi egyenleteket a feszültségi tenzor, ha

$$\underline{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix} x^2 & 2xy & 0\\ 2xy & y^2 & 0\\ 0 & 0 & x^2+y^2\end{bmatrix} \tag{6.65}$$

a mátrixa az (x,y,z) KR-ben.

A (6.11) egyensúlyi egyenletek felhasználásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
q_x&=-\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=-4x\,,\\
q_y&=-\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}-\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=-4y\,,\\
q_z&=-\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}-\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}-\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=0\,.
\end{aligned}$$

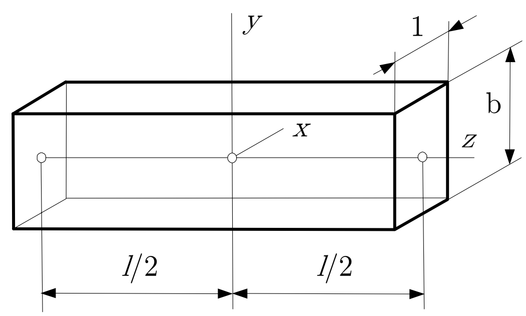
6.3. Az ábrán vázolt téglalapkeresztmetszetű – a téglalap szélessége egységnyi, magassága b, a rúd hossza pedig l – prizmatikus rúdban

$$\sigma_x=0\,,\qquad \sigma_y=\frac{3f}{2b}\left(y-\frac{4y^3}{3b^2}+\frac{b}{3}\right)\,,\qquad \sigma_z=\frac{3fl^2}{2b^3}\left(1-\frac{4z^2}{l^2}\right)y \tag{6.66a}$$

a normálfeszültségek, és

$$\tau_{xy}=\tau_{xz}=0,\qquad \tau_{yz}=-\frac{3fz}{2b}\left(1-\frac{4y^2}{b^2}\right) \tag{6.66b}$$

a nyírófeszültségek értéke, ahol az f feladatparaméter. A rúdon nem működik térfogati terhelés.



6.22. ábra.

Ellenőrizze, hogy teljesülnek-e az egyensúlyi egyenletek? Mekkora a rúd felső, alsó és oldallapjain működő terhelés? Mi az előző kérdésre adott válasz fényében az f feladatparaméter jelentése?

Ha behelyettesítjük a

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}=0\,,\qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=\frac{3f}{2b}\left(1-\frac{4y^2}{3b^2}\right)\,,\qquad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}=-\frac{12fyz}{b^3}$$

és

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}=\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}=\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}=0\,,\qquad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}=-\frac{3f}{2b}\left(1-\frac{4y^2}{3b^2}\right)\,,\qquad \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}=\frac{12fyz}{b^3}$$

deriváltakat a (6.11) skaláris egyensúlyi egyenletekbe, akkor azonnal adódik, hogy az első egyenlet identikusan teljesül, a második és harmadik egyenlet pedig ugyancsak teljesül:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}+q_y=0+\frac{3f}{2b}\left(1-\frac{4y^2}{3b^2}\right)-\frac{3f}{2b}\left(1-\frac{4y^2}{3b^2}\right)+0=0\,,\\
\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+q_z=0+\frac{12fyz}{b^3}-\frac{12fyz}{b^3}+0=0\,.
\end{aligned}$$

Az x és $-x$ normálisú oldallapokon $\boldsymbol{\rho}_x = \mathbf{0}$ és $-\boldsymbol{\rho}_x = \mathbf{0}$ a feszültségvektor. Következésképp terhelten a két oldallap. Az alulsó lapon

$$-\boldsymbol{\rho}_y|_{-b/2} = -\sigma_y|_{-b/2}\mathbf{e}_y - \tau_{yz}|_{-b/2}\mathbf{e}_z = -\frac{3f}{2b}\left(-\frac{b}{2} - \frac{b}{6} + \frac{b}{3}\right)\mathbf{e}_y + \frac{3fz}{2b}\,(1-1)\,\mathbf{e}_z = \mathbf{0}\,,$$

tehát ugyancsak zérus a feszültségvektor. Következésképp az alulsó lap is terheletlen. A felülső lapon pedig, összhangban az

$$\boldsymbol{\rho}_y|_{b/2} = \sigma_y|_{b/2}\mathbf{e}_y + \tau_{yz}|_{b/2}\mathbf{e}_z = \frac{3f}{2b}\left(\frac{b}{2} - \frac{b}{6} + \frac{b}{3}\right)\mathbf{e}_y - \frac{3fz}{2b}\,(1-1)\,\mathbf{e}_z = f\mathbf{e}_y$$

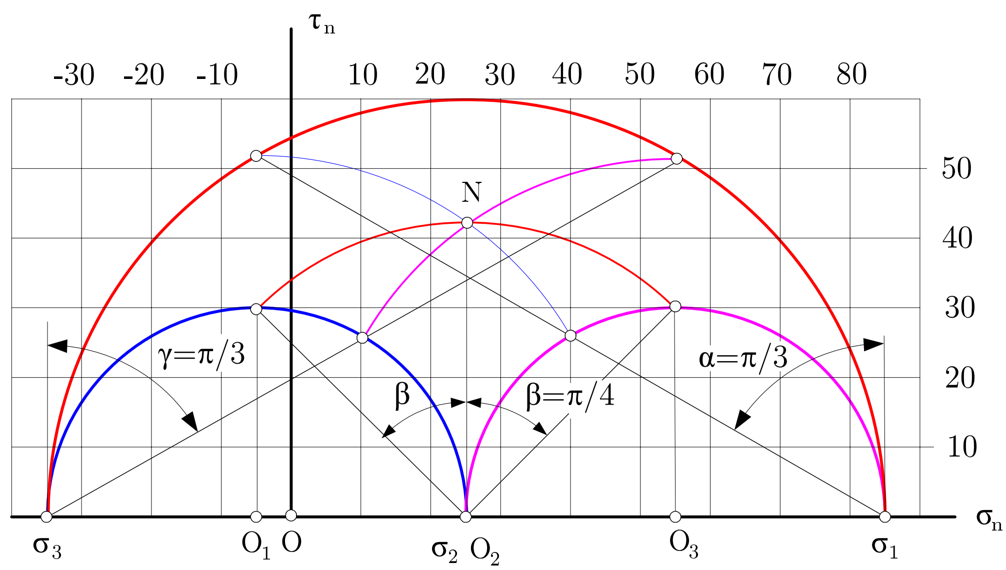
számítással konstans megoszló terhelés működik.

6.4. A vizsgálat tárgyát képző test adott P pontjában

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 85 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix} \text{[MPa]} \quad \text{és} \quad \mathbf{n} = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{e}_y + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_z$$

a feszültségi tenzor mátrixa és egy a tekintett pontra illeszkedő felületelem normális egységvektora. Határozza meg a teljes feszültségi Mohr kör segítségével szerkesztéssel, valamint számítással a felületelemen ébredő σ_n és τ_n normál-, illetve nyírófeszültséget.

Vegyük észre, hogy az x, y és z tengelyek feszültségi főtengelyek és, hogy $\sigma_x = \sigma_1 = 85$ MPa, $\sigma_y = \sigma_2 = 25$ MPa és $\sigma_z = \sigma_2 = -35$ MPa a vonatkozó főfeszültségek. Ezek birtokában azonnal megszerkeszthető a Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram:



6.23. ábra.

A $\cos\alpha = n_x = 0.5$, $\cos\beta = n_y = \sqrt{2}/2$ és $\cos\gamma = n_z = 0.5$ trigonometrikus egyenleteknek $\alpha = \gamma = \pi/3$ és $\beta = \pi/4$ a számunkra érdekes megoldása. Az α, β és γ szögek ismeretében, követve a 6.12. ábra sémáját, az alábbi lépésekkel megrajzoljuk az $\alpha = \pi/3 =$ áll. és $\gamma = \pi/3 =$ áll. köríveket: a $[\sigma_1{,}0]$ és $[\sigma_3{,}0]$ pontokban húzott függőlegesekkel α, illetve γ szöget bezáró egyeneseket szerkesztünk. Ezek (σ_1, σ_3), (σ_1, σ_2), valamint (σ_3, σ_1), (σ_3, σ_2) főkörökkel való metszésein haladnak át az O_3, valamint O_1 középpontú $\alpha = \pi/3 =$ áll. és $\gamma = \pi/3 =$ áll. körívek. Az utóbbiak metszéspontja kiadja az $N = [\sigma_n, \tau_n]$ pontot. (Az ábra az ellenőrzés kedvéért az O_2 középpontú $\beta = \pi/4 =$ áll. körív szerkesztését is feltünteti. Ez is áthalad az N ponton.) Leolvasható az ábráról, hogy $\sigma_n \approx 25.0$ MPa és $\tau_n \approx 42.5$ MPa.

Ami a számítást illeti a

$$\boldsymbol{\rho}_n = \boldsymbol{T}\cdot\mathbf{n} = \frac{85}{2}\,\mathbf{e}_x + \frac{25\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{e}_y - \frac{35}{2}\,\mathbf{e}_z$$

feszültségvektor ismeretében

$$\sigma_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\rho}_n = \frac{85}{4} + \frac{25\times 2}{4} - \frac{35}{4} = 25\,\text{MPa}$$

a normálfeszültség, és

$$\tau_n = \sqrt{\boldsymbol{\rho}_n^2 - \tau_n^2} = \sqrt{\left(\frac{85}{2}\right)^2 + \left(\frac{25\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{35}{2}\right)^2 - 25^2} = 42.46\,\text{MPa}$$

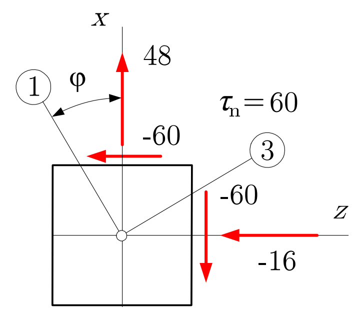
a nyírófeszültség. A kétféleképpen is meghatározott értékek jó egyezést mutatnak.

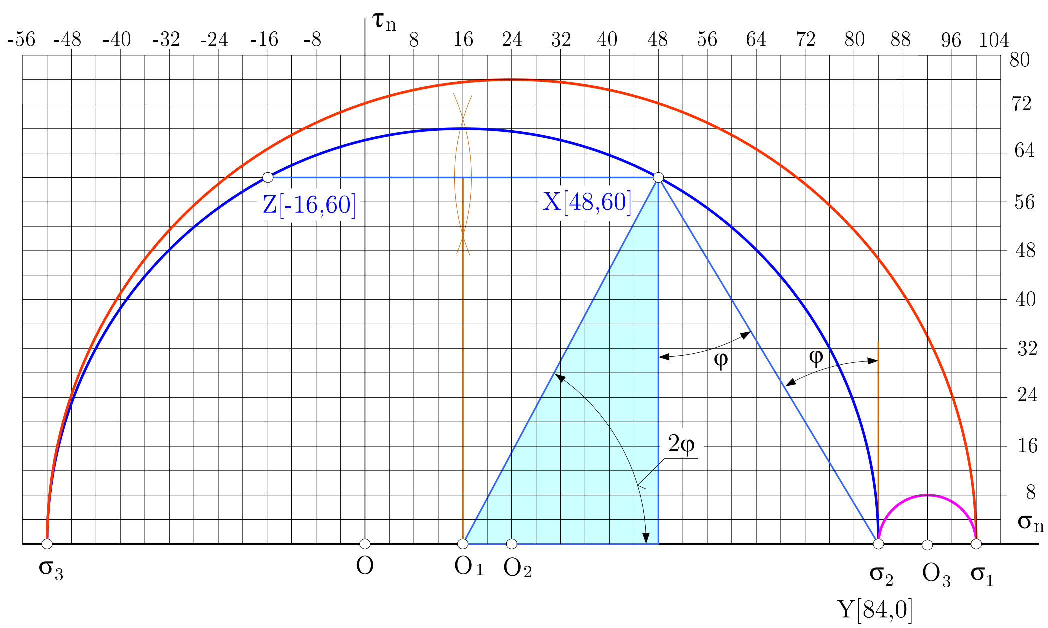
6.5. Ismertes a vizsgálat tárgyát képző test valamely P pontjában a feszültségi tenzor mátrixa az (x, y, z) KR-ben.

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 48 & 0 & -60 \\ 0 & 100 & 0 \\ -60 & 0 & -16 \end{bmatrix} [\text{MPa}]\,.$$

Határozza meg Mohr-féle feszültségi kördiagram segítségével a főfeszültségeket és a feszültségi főirányokat.

A megoldás során a 6.2.4. szakaszban közölt sémát követjük. Nyilvánvaló, hogy az y irány főirány. Az p, q, r irányoknak most rendre az z, x, y irányok felelnek meg. A 6.24. ábra jobboldali felső része a pozitív y tengely felől nézve szemlélteti az elemi kockán ébredő feszültségeket. Leolvasható az elemi kockáról, hogy $\tau_n = 60$ MPa. A kördiagramot szerkesztve első lépésben megrajzoljuk





6.24. ábra.

az $\mathbf{e}_x$ és $\mathbf{e}_z$ normálisok $X[48{,}60]$ és $Z[-16{,}60]$ képeit. Az X, Z pontokat összekötő vízszintes felező merőlegese kimetszi a σ_n tengelyből az X, Z pontokon áthaladó főkör középpontját (mint később kiderül az O_1 pontot). Az O_1, X pontok közötti távolsággal, mint R sugárral megrajzolt O_1 középpontú kör és a σ_n tengely két metszéspontja megadja a hiányzó (a jelen esetben a σ_2 és σ_3) főfeszültségeket. A három főfeszültség birtokában megszerkeszthető a másik két, azaz a (σ_1, σ_2) és (σ_1, σ_3) főkör. Az 1 jelű főtengely és az x tengely által bezárt $\varphi = \varphi_{1x}$ szög a $[\sigma_2{,}0]$ és az $X[48{,}60]$ pontok által meghatározott körívhez tartozó kerületi szög. A vonatkozó 2φ nagyságú középponti szög a színezéssel kiemelt derékszögű háromszögben jelenik meg. A főtengelyek jobbsodratú KR-ének megszerkesztésekor a $\tau_{zx} = -60$ MPa feszültség irányába mértük fel a $\varphi = \varphi_{1x}$ szöget az elemi kockát szemléltető ábrarészleten.

Bár valamennyi érték leolvasható a kördiagramról, a keresett mennyiségek a megszerkesztett kördiagram alapján, a (6.27a,b,c) képletek értelemszerű alkalmazásával, számíthatók is. Az

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{zx}^2} = \sqrt{\left(\frac{48+16}{2}\right)^2 + 60^2} = 68\,\text{MPa}$$

sugár birtokában

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} + R = \frac{48-16}{2} + 68 = 84\,\text{MPa}\,, \quad \sigma_3 = \frac{\sigma_z + \sigma_x}{2} - R = \frac{48-16}{2} - 68 = -52\,\text{MPa}$$

a két hiányzó főfeszültség. A σ_1 normálfeszültség ismeretében

$$\tan\varphi_{1x} = \frac{\sigma_1 - \sigma_x}{\tau_n} = \frac{84-48}{60} = 0.6\,, \quad \text{azaz} \quad \varphi_{1x} = \varphi = \arctan 0.6 = 0.540\,42\,\text{radián} = 30.964^\circ\,.$$

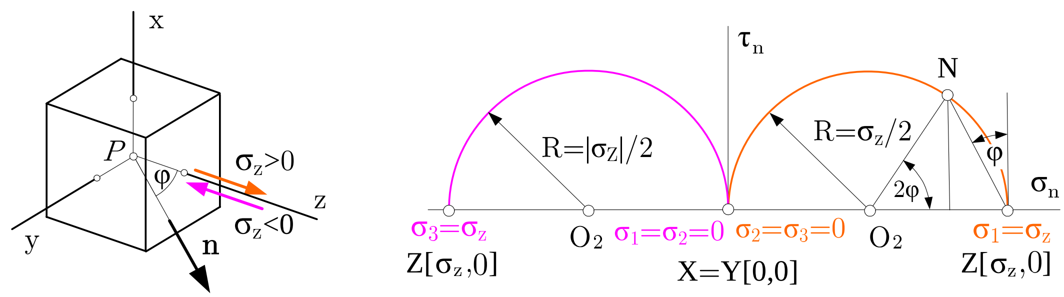
Következésképp

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{0.6}{\sqrt{1+0.36}} = 0.514\,496 \quad \text{és} \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+0.36}} = 0.857\,493\,.$$

Ezekkel az eredményekkel azonnal adódnak a keresett főtengelyek irányvektorai:

$$\mathbf{e}_1 = \cos\varphi\,\mathbf{e}_x - \sin\varphi\,\mathbf{e}_z = 0.857\,493\,\mathbf{e}_x - 0.514\,496\,\mathbf{e}_z$$
$$\mathbf{e}_3 = \sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_z = 0.514\,496\,\mathbf{e}_x + 0.857\,493\,\mathbf{e}_z\,.$$

6.6. Rajzoljuk meg, húzott és nyomott rúd esetén a teljes feszültségi Mohr-féle kördiagramot.



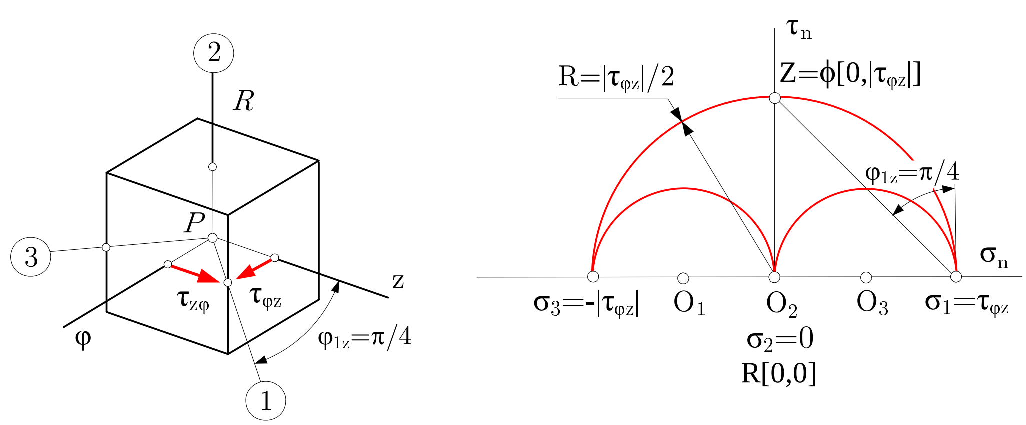
6.25. ábra.

A 6.25. ábra baloldali részlete mind húzott, mind pedig nyomott rúd esetén szemlélteti a feszültségi állapotot az elemi kockán. Lelolvasható, az elemi kockáról, hogy a koordinátatengelyek főtengelyek. Húzás esetén $\sigma_1 = \sigma_z$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, következésképp a (σ_1, σ_2), (σ_1, σ_3) főkörök egybeesnek, a (σ_2, σ_2) főkör pedig ponttá zsugorodik. Mivel nyomás esetén $\sigma_3 = \sigma_z$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, a (σ_1, σ_3), (σ_2, σ_3) főkörök esnek egybe míg, a (σ_1, σ_3) főkör ponttá zsugorodik. A jobboldali ábrarészlet, a későbbiek kedvéért – előreutalunk itt Mohr-féle redukált feszültség fogalmát értelmező 7.2.2 szakaszra – azzal a feltételezéssel szemlélteti a vonatkozó két Mohr kört, hogy azonos a σ_z normálfeszültség abszolut értéke.

Húzást feltételezve feltünteti az ábra az 1 jelű főtengellyel az yz síkban φ szöget bezáró $\mathbf{n}$ normális esetén az $N[\sigma_n, \tau_n]$ pont szerkesztését. Leolvasható a jobboldali Mohr körről, hogy

$$\sigma_n = \frac{\sigma_z}{2}(1 + \cos 2\varphi)\,, \qquad \tau_n = \frac{\sigma_z}{2}\sin 2\varphi\,.$$

6.7. Rajzoljuk meg csavart kör-, vagy körgyűrűkeresztmetszetű rúd esetén a teljes feszültségi Mohr-féle kördiagramot az (R, φ, z) HKR-ben tekintve a feszültségi állapotot.



6.26. ábra.

A 6.26. ábra baloldala pozitív M_c csavarónyomaték feltételezése mellett szemlélteti a csavart rúd egy P pontjában az elemi kocka segítségével a feszültségi állapotot. Nyilvánvaló, hogy az R irány főirány, a $\sigma_R = 0$ feszültség pedig főfeszültség. Következésképp a szerkesztési séma p, q, r irányainak az φ, z, R irányok felelnek meg. Az R főirány felől tekintve az elemi kockát első lépésben megrajzoljuk a $\boldsymbol{\rho}_z$ és $\boldsymbol{\rho}_\varphi$ feszültségvektorok $Z[\tau_{\varphi z},0]$, $\Phi[\tau_{z\varphi},0]$ képeit a σ_n, τ_n síkon. Mivel a két pont egybeesik a KR τ_n tengelyén a két ponton áthaladó főkör közepe az egybeeső két ponton keresztül húzott függőleges és a σ_n tengely metszéspontja (a σ_n, τ_n KR origója), sugara pedig $\tau_{\varphi z}$. A főkör megrajzolása után annak figyelembevételével szerkeszthető meg a másik két főkör, hogy az origó a $\sigma_R = 0$ főfeszültség képe.

A szerkesztés eredménye a 6.26. ábra jobboldalán látható. Leolvasható az ábráról, hogy

$$\sigma_1 = |\tau_{\varphi z}|\,, \quad \sigma_2 = 0\,, \quad \text{és} \quad \sigma_3 = -|\tau_{\varphi z}|$$

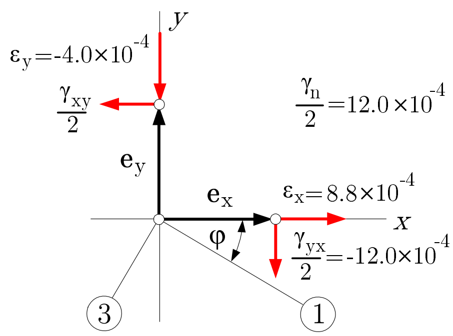
a három főfeszültség. Az is látszik, hogy $\varphi_{1z} = \pi/4$ az 1 jelű főtengely z tengellyel bezárt szöge. Az elemi kockán megrajzoltuk, $\tau_{\varphi z}$ irányába mérve fel első lépésben a φ_{1z} szöget, a főtengelyek jobbsodratú KR-ét. Könnyű belátni, hogy a Mohr kör, és a főfeszültségek képletei negatív M_c csavarónyomaték (negatív $\tau_{\varphi z}$) esetén is érvényben maradnak. A főtengelyek meghatározását erre az esetre az olvasóra hagyjuk.

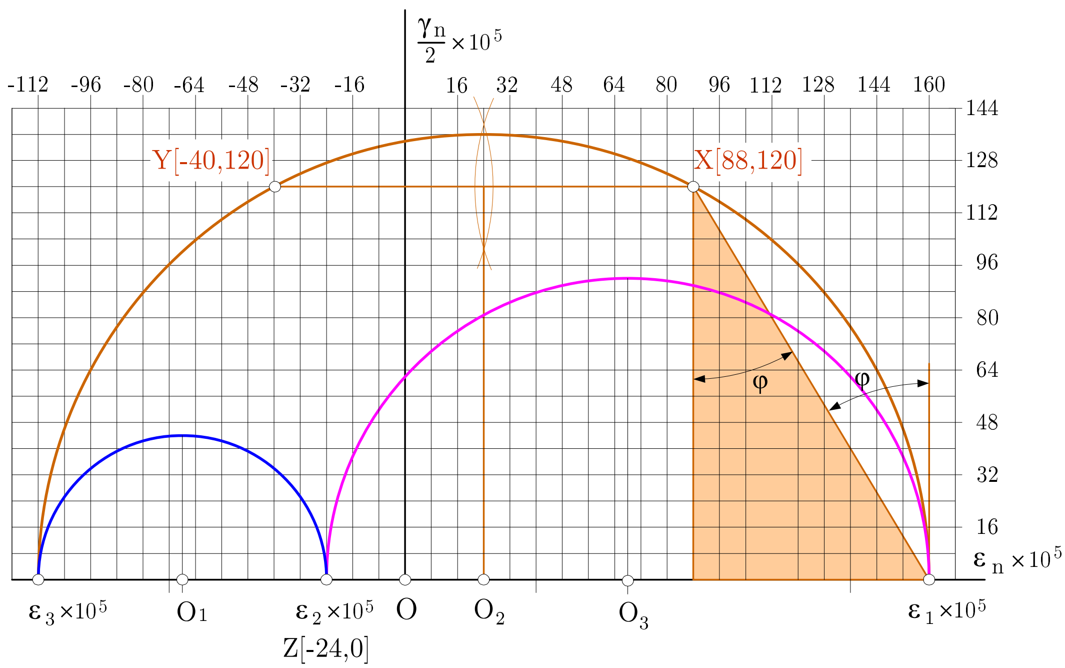
6.8. Ismertes a vizsgálat tárgyát képző test valamely P pontjában az alakváltozási tenzor mátrixa az (x, y, z) KR-ben.

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 8.8 & -12.0 & 0 \\ -12.0 & -4.0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.4 \end{bmatrix} \times 10^{-4}\,.$$

Határozza meg Mohr-féle alakváltozási kördiagram segítségével a főnyúlásokat és az alakváltozási főirányokat.

A megoldás során értelemszerűen követjük a 6.2.4. szakaszban közölt sémát, illetve a 6.5. Mintafeladat gondolatmenetét. Nyilvánvaló, hogy a z irány főirány. A p, q, r irányoknak tehát most rendre az x, y, z irányok felelnek meg. Első lépésként





6.27. ábra.

mindig megrajzoljuk az alakváltozási állapotot szemléltető elemi triédert az ismert főirány felől nézve, oly módon, hogy a p irány vízszintes legyen. A 6.27. ábra baloldali felső része a pozitív z tengely, vagyis az ismert főirány felől nézve szemlélteti az elemi triéderen az $\boldsymbol{\alpha}_x$ és $\boldsymbol{\alpha}_y$ alakváltozási vektorokat. Leolvasható az elemi triéderről, hogy $\gamma_n/2 = 12.0 \times 10^{-4}$ MPa. Az alakváltozási kördiagramot szerkesztve első lépésben megrajzoljuk az $\boldsymbol{\alpha}_x$ és $\boldsymbol{\alpha}_y$ alakváltozási vektorokhoz tartozó $X[88{,}120]$ és $Z[-40{,}12]$ pontokat (Figyelem: az ábrán a tényleges értékek 10^5 hatvánnyal való szorzatai szerepelnek!). Az X, Y pontokat összekötő vízszintes felező merőlegese kimetszi a ε_n tengelyből az X, Y pontokon áthaladó főkör középpontját, (később látni fogjuk, hogy ez az O_2 pont). Az O_2, X pontok közötti távolsággal, mint R sugárral megrajzolt O_2 középpontú kör és az ε_n tengely két metszéspontja megadja a hiányzó (a jelen esetben a ε_1 és ε_3) főnyúlásokat. A három főnyúlás birtokában megszerkeszthető a másik két, azaz az $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ és $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ főkör és az is világossá válik, miért használtuk az O_2 jelölést. Az 1 jelű főtengely és az x tengely által bezárt $\varphi = \varphi_{1x}$ szög az $[\varepsilon_1{,}0]$ és az $X[88, 120]$ pontok által meghatározott körívhez tartozó kerületi szög. A főtengelyek jobbsodratú KR-ének megszerkesztésekor a $\gamma_{yx}/2 = -12.0\times$ szögtorzulás irányában mértük fel a $\varphi = \varphi_{1x}$ szöget az elemi triédert szemléltető ábrarészleten. Ennek az az oka, hogy a γ_{yx} az ábrán a növekvő fajlagos nyúlás irányába mutat (ugyanúgy, mint ahogy a τ a növekvő σ irányába mutat).

Ugyan valamennyi érték leolvasható a kördiagramról, de a keresett mennyiségek a megszerkesztett kördiagram alapján számíthatók is. Az

$$R = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{yx}}{2}\right)^2} = 10^{-5}\sqrt{\left(\frac{88+40}{2}\right)^2 + 120^2} = 13.6\times 10^{-4}$$

sugár birtokában

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{2} + R = \left(\frac{88-40}{2} + 136\right)\times 10^{-5} = 16.0\times 10^{-4}\,,$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon_z + \varepsilon_x}{2} - R = \left(\frac{88-40}{2} - 136\right)\times 10^{-5} = -11.2\times 10^{-4}$$

a keresett két főnyúlás. A ε_1 főnyúlás ismeretében a színezéssel kiemelt derékszögű háromszögből

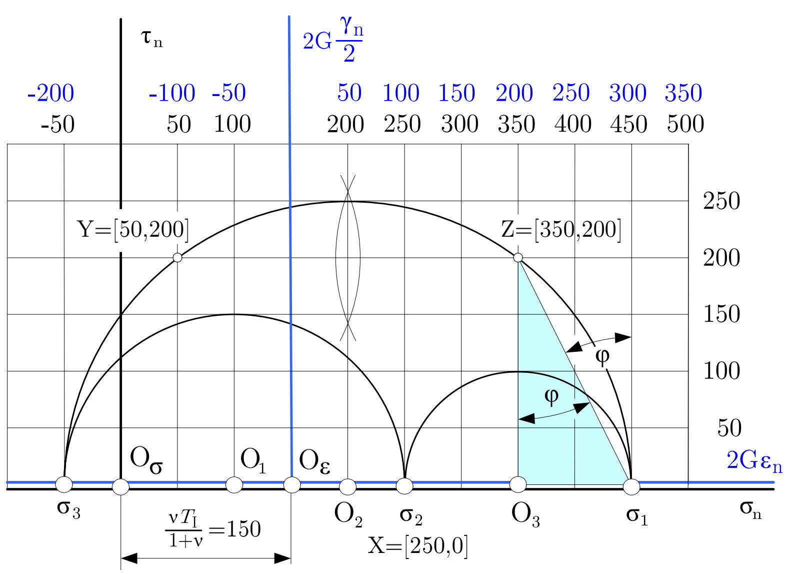
$$\tan\varphi_{1x} = \frac{2\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_x)}{\gamma_n} = \frac{160-88}{60} = 1.2\,, \quad \text{azaz} \quad \varphi_{1x} = \varphi = \arctan 1.2 = 0.876\,058 \text{ radián} = 50.1944^\circ\,.$$

Következésképp

$$\sin\varphi = \frac{\tan\varphi}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{1.2}{\sqrt{1+1.44}} = 0.768\,221 \quad \text{és} \quad \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+1.44}} = 0.640\,184\,.$$

Ezekkel az eredményekkel azonnal megkapjuk a keresett főtengelyek irányvektorait:

$$\mathbf{e}_1 = \cos\varphi\,\mathbf{e}_x - \sin\varphi\,\mathbf{e}_y = 0.640\,184\,\mathbf{e}_x - 0.768\,221\,\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{e}_3 = \sin\varphi\,\mathbf{e}_x + \cos\varphi\,\mathbf{e}_z = 0.768\,221\,\mathbf{e}_x + 0.640\,184\,\mathbf{e}_y\,.$$



6.28. ábra.

6.9. Ismertes a feszültségi tenzor diadikus előállítása:

$$\boldsymbol{T} = 250\,\mathbf{e}_x\circ\mathbf{e}_x + $$
$$+ (50\mathbf{e}_y - 200\mathbf{e}_z)\circ\mathbf{e}_y + $$
$$+ (-200\mathbf{e}_y + 350\mathbf{e}_z)\circ\mathbf{e}_z \text{ MPa}$$

Írja fel a feszültségi tenzor mátrixát, majd szerkessze meg az egyesített Mohr-féle feszültségi és alakváltozási kördiagramot, ha $G = 80\times\times 10^3$ MPa és $\nu = 0.3$.

A feszültségi tenzor

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 250 & 0 & 0 \\ 0 & 50 & -200 \\ 0 & -200 & 350 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

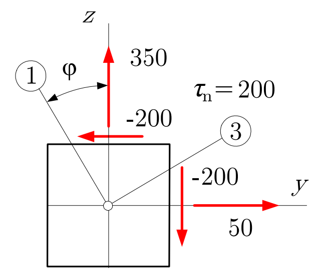
mátrixáról leolvasott adatokkal, követve a 6.5. Mintapélda lépéseit, könnyen megszerkeszthető a Mohr-féle feszültségi kördiagram. Ezért a szerkesztés lépéseit nem részletezzük. A kördiagramot szemléltető 6.28. ábráról leolvasható, hogy

$$\sigma_1 = 450\,\text{MPa}\,, \qquad \sigma_2 = 250\,\text{MPa}\,, \qquad \sigma_3 = -50\,\text{MPa}\,.$$

Az 1 jelű főtengely z tengellyel bezárt szöge:

$$\varphi_{1z} = \arctan\frac{\sigma_1-\sigma_z}{|\tau_{yz}|} = \arctan\frac{450-350}{|200|} = \arctan 0.5 = 0.463\,648\,\text{radián} = 26.565^o\,.$$

A főtengelyek KR-ét a megszokott módon az ismert főirány felől nézve szemlélteti a 6.29. ábra.



6.29. ábra.

A 6.4.3. szakasz szerint a megrajzolt Mohr-féle feszültségi kördiagram Mohr-féle alakváltozási kördiagramként is szolgál, ha eltoljuk az origót az abcissza tengelyen a

$$\frac{T_I\nu}{1+\nu} = \frac{(250+50+350)\times 0.3}{1+0.3} = 150\,\text{MPa}$$

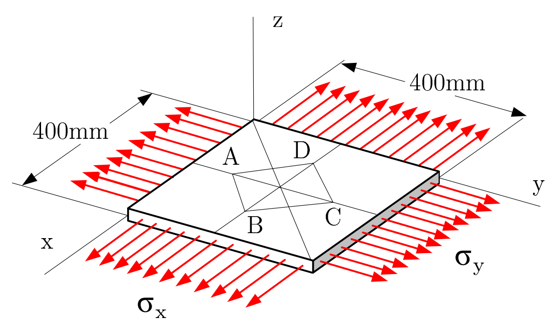
értékkel pozitív irányba, mivel $T_I\nu/(1+\nu) > 0$. Az O_ε origójú új KR kék szinű az ábrán. A vizszintes tengelyen σ_n helyett $2G\varepsilon_n$, a függőleges tengelyen pedig τ_n helyett $\gamma_n/2$ $2G$-szerese olvasható le. Eszerint

$$2G\varepsilon_i = \sigma_i - \frac{\nu}{1+\nu}T_I\,, \qquad i = 1,2,3\,,$$

azaz

$$2G\varepsilon_1 = 300\,\text{MPa}\,, \qquad 2G\varepsilon_1 = 100\,\text{MPa}\,, \qquad 2G\varepsilon_1 = -200\,\text{MPa}\,.$$

6.10. Az ábrán vázolt $b = 24$ mm vastag négyzetalakú aluminiumlemez felső lapjára (G=$0.26\times\times 10^5$MPa, $\nu = 1/3$) acéltűvel négyzetet karcoltunk, oly módon, hogy az $ABCD$ négyzet átlóinak 200 mm a hossza. Az átlók egybeesnek a felső lap szimmetriatengelyeivel. A lemez oldallapjain a lemez síkjával párhuzamos egyenletesen megoszló ER működik. Az y tengellyel párhuzamos x normálisú oldalélen $\sigma_x = 78$ MPa, az x tengellyel párhuzamos y normálisú oldalélen pedig $\sigma_y = 130$ MPa a megoszló ER sűrűsége. (A negatív x és y normálisú oldaléleken az ER-ek ellentettjei hatnak.) A felső és alsó palástok terheletlenek. Határozza meg, hogy mennyi (a) az l_{AC}, l_{BD} átlók hosszváltozása, (b) az l_{AB} oldalél hosszváltozása, (c) a lemez b vastagságának megváltozása és (d) a lemez V térfogatának megváltozása a terhelés hatására.



6.30. ábra.

A terhelés módjából adódik, hogy homogén a lemez feszültségi állapota és, hogy

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 78 & 0 & 0 \\ 0 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\,\text{MPa}$$

a feszültségi tenzor mátrixa. Mivel a feszültségi és alakváltozási tenzorok főirányai megegyeznek és az x, y és z tengelyek a feszültségi tenzor főtengelyei következik, hogy $\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$. A főnyúlások pedig a (6.35) Hooke törvény alapján számíthatók:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{2G}\Big[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu}T_I\Big] = \frac{1}{0.52\times10^5}\left(78-\frac{1}{4}\times 208\right) = 5.0\times10^{-4}\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{2G}\Big[\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu}T_I\Big] = \frac{1}{0.52\times10^5}\left(130-\frac{1}{4}\times 208\right) = 1.5\times10^{-3}\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{2G}\Big[\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu}T_I\Big] = \frac{1}{0.52\times10^5}\left(0.0-\frac{1}{4}\times 208\right) = -1.0\times10^{-3}
\end{aligned} \qquad (6.67)$$

A főnyúlások birtokában

$$\varepsilon_V = \varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z = 5.0\times10^{-4}+1.5\times10^{-3}-1.0\times10^{-3} = 0.001$$

a fajlagos térfogatváltozás. Az $\mathbf{e}_{AB} = e_{ABx}\mathbf{e}_x + e_{ABy}\mathbf{e}_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_y$ irányvektorral pedig

$$\varepsilon_{AB} = \mathbf{e}_{AB}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{e}_{AB} = e_{ABx}^2\varepsilon_x + e_{ABy}^2\varepsilon_y = \frac{1}{2}\left(5.0\times10^{-4}+1.5\times10^{-3}\right) = 0.001$$

az AB irányú fajlagos nyúlás. A kapott értékekkel

$$\lambda_{AC} = l_{AC}\,\varepsilon_x = 200\times 5.0\times 10^{-4} = 0.1\text{mm}\,,$$
$$\lambda_{BD} = l_{BD}\,\varepsilon_y = 200\times 1.5\times 10^{-3} = 0.3\text{mm}$$

és

$$\lambda_{AB} = l_{AB}\,\varepsilon_{AB} = \sqrt{100^2+100^2}\times 0.001 = 0.141\,421\text{mm}$$

a hosszváltozások,

$$\lambda_b = b\,\varepsilon_z = 24\times -1.0\times 10^{-3} = -0.024\text{mm}$$

a vastagság megváltozása és

$$\lambda_V = V\,\varepsilon_V = 400\times 400\times 24\times 0.001 = 3.\,84\times 10^3\text{mm}^3$$

a térfogatváltozás.

Gyakorlatok

6.1. Igazolja, hogy zérus térfogati terhelés estén egyensúlyi a

$$\sigma_x = 2GA\left[\frac{y^2+z^2}{r^3(r+z)} - \frac{x^2}{r^2(r+z)^2}\right]\,,\quad \sigma_x = 2GA\left[\frac{x^2+z^2}{r^3(r+z)} - \frac{y^2}{r^2(r+z)^2}\right]\,,\quad \sigma_z = -2GA\frac{z}{r^3}\,,$$
$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -2GA\frac{xy(z+2r)}{r^3(r+z)^2}\,,\quad \tau_{xz} = \tau_{zx} = -2GA\frac{x}{r^3}\,,\quad \tau_{yz} = \tau_{zy} = -2GA\frac{y}{r^3}$$

feszültségmező. A képletekben A állandó és $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

6.2. A vizsgálat tárgyát képző test adott P pontjában

$$\underline{\mathbf{T}}_P = \begin{bmatrix} 80 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & -40 \end{bmatrix}\text{[MPa]}\quad\text{és}\quad \mathbf{n} = \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{e}_z$$

a feszültségi tenzor mátrixa és egy a tekintett pontra illeszkedő felületelem normális egységvektora. Határozza meg a Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram segítségével szerkesztéssel, majd ezt követően számítással a σ_n és τ_n feszültségek értékét.

6.3. Ismertes a vizsgálat tárgyát képző test valamely P pontjában a feszültségi tenzor mátrixa és egy a tekintett pontra illeszkedő felületelem normális egységvektora:

$$\underline{\mathbf{T}}_P = \begin{bmatrix} 58.4 & 0.0 & -28.8 \\ 0.0 & -40.0 & 0.0 \\ -28.8 & 0.0 & 41.6 \end{bmatrix}\text{[MPa]}\quad\text{és}\quad \mathbf{n} = 0.7, \mathbf{e}_x + 0.1, \mathbf{e}_y + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{e}_z\,.$$

Határozza meg (a) a Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram segítségével szerkesztéssel a főfeszültségeket és a főirányokat, illetve a σ_n és τ_n feszültségeket és (b) az utóbbi két értéket, ellenőrzés céljából, számítsa is ki. (Érdemes az $\mathbf{n}$ vektort a főtengelyek KR-ébe transzformálni az N pont szerkesztése előtt.)

6.4. Határozza meg az alábbi, az (x, y, z) KR-ben mátrixaikkal adott feszültségi tenzorok esetén: (a) a Mohr-féle teljes feszültségi kördiagram megszerkesztése alapján a főfeszültségeket, (b) a főtengelyek KR-ét a főirányok elemi kockán történő bejelölésével, és (c) a főirányok irányvektorait.

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -30 \\ 0 & -30 & 32 \end{bmatrix}\text{[MPa]}\,,\qquad \underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 70 & 40 & 0 \\ 40 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 50 \end{bmatrix}\text{[MPa]}\,,$$
$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 44 & 0 & 60 \\ 0 & -12 & 0 \\ 60 & 0 & -20 \end{bmatrix}\text{[MPa]}\,,\qquad \underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -48 \\ 0 & 112 & 0 \\ -48 & 0 & 32 \end{bmatrix}\text{[MPa]}\,.$$

6.5. A vizsgálat tárgyát képző test adott P pontjában

$$\underline{\mathbf{A}}_P = \begin{bmatrix} 10.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 4.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & -2.0 \end{bmatrix}\times 10^{-3}\quad\text{és}\quad \mathbf{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathbf{e}_x + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_y + \frac{1}{2}\,\mathbf{e}_z$$

az alakváltozási tenzor mátrixa és egy a tekintett ponthoz kötött irányvektor. Határozza meg a Mohr-féle teljes alakváltozási kördiagram segítségével szerkesztéssel és ezt követően számítással az ε_n és $\gamma_n/2$ alakváltozások értékét.

6.6. Határozza meg az alábbi, az (x, y, z) KR-ben mátrixaikkal adott alakváltozási tenzorok esetén: (a) a Mohr-féle teljes alakváltozási kördiagram megszerkesztése alapján a főnyúlásokat, (b) a főtengelyek

KR-ét a főirányok elemi tiéderen történő bejelölésével, (c) az ismeretlen főirányok irányvektorait, és (b) a főfeszültségeket az általános Hooke törvény felhasználásával, ha $E=2\times 10^5$ MPa és $\nu=0.25$.

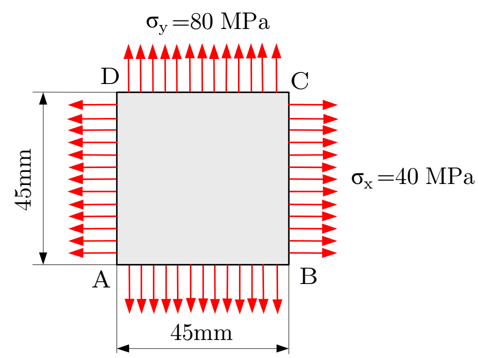
$$\underline{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} -12.0 & -30.0 & 0.0 \\ -30.0 & 20.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 60.0 \end{bmatrix}\times 10^{-5}\,, \quad \underline{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 32.0 & 0.0 & 20.0 \\ 0.0 & -36.0 & 0.0 \\ 20.0 & 0.0 & 2.0 \end{bmatrix}\times 10^{-5}\,,$$

$$\underline{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 5.6 & 0.0 & 6.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 6.0 & 0.0 & -0.8 \end{bmatrix}\times 10^{-3}\,, \quad \underline{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} -20.0 & 0.0 & -48.0 \\ 0.0 & -98.0 & 0.0 \\ -48.0 & 0.0 & 20.0 \end{bmatrix}\times 10^{-4}\,.$$

6.7. Szerkessze meg az egyesített Mohr-féle feszültségi és alakváltozási kördiagramot a 6.4. Gyakorlat feszültségtenzorai esetén, ha $G=0.8\times 10^5$ és $\nu=1/3$. Számítsa ki a kördiagram felhasználásával a főnyúlásokat és ezek ismeretében a fajlagos térfogatváltozást.

6.8. Szerkessze meg az egyesített Mohr-féle alakváltozási és feszültségi kördiagramot a 6.6. Gyakorlat alakváltozási tenzorai esetén. Számítsa ki a kördiagram felhasználásával a főfeszültségeket.

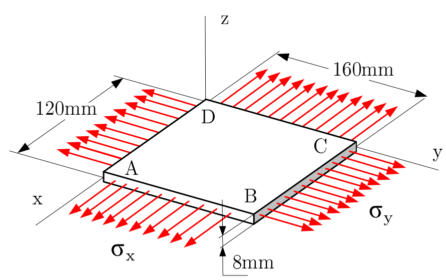
6.9. A 6.31. ábrán szemléltetett módon egy nyomástartó edény oldalára terheletlen állapotban acéltűvel $45\times 45\,\mathrm{mm}^2$ nagyságú négyzetet karcoltunk. Miután a nyomás elérte a tartós üzemi értéket az ábrán vázolt kéttengelyű feszültségi állapot alakult ki a négyzetben. Számítsa ki az AB és BC oldalélek, valamint az AC átló hosszváltozását, ha $G=0.8\times 10^5$ MPa és $\nu=1/3$ (vagyis acélból készült a tartály).



6.31. ábra.

6.10. A 6.32. ábrán szemléltetett acéllemezben ($G=0.8\times 10^5$ MPa, $\nu=1/3$) kéttengelyű a feszültségi állapot: $\sigma_x=80$ Mpa, $\sigma_y=120$ Mpa. Határozza meg az AB és BC oldalélek, valamint az AC átló hosszváltozását.

6.11. Tegyük fel, hogy a 6.32. ábrán szemléltetett acéllemezben kéttengelyű a feszültségi állapot: $\sigma_x=\sigma_o$, és emellett előírjuk, hogy zérus értékű a lemez hosszváltozása a y irányban. Mekkora σ_y és a σ_o/ε_y hányados értéke.



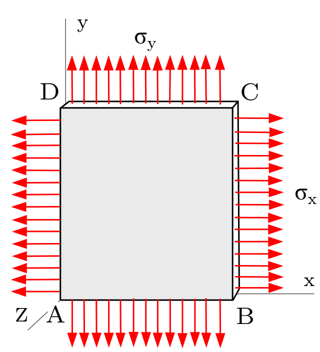
6.32. ábra.

6.12. Gyakorta előfordul, hogy adott normálisú felületen zérus a feszültségvektor. Ilyen esetet szemléltet a 6.33. ábra téglalapalakú $ABCD$ lemeze. Ekkor az adott normálisra merőleges síkban ébredő síkfeszültségi állapotról beszélünk. Tegyük fel, hogy összhangban az ábrával a kérdéses normális a z tengellyel esik egybe. Tegyük fel továbbá, hogy ez esetben mérésekkel meghatároztuk a felületen az ε_x és ε_y fajlagos nyúlásokat. Mutassa meg, hogy a megmért fajlagos nyúlások ismeretében a

$$\sigma_x=\frac{2G}{1-\nu}\left(\varepsilon_x+\nu\varepsilon_y\right)\,, \qquad \sigma_y=\frac{2G}{1-\nu}\left(\varepsilon_y+\nu\varepsilon_x\right)\,,$$

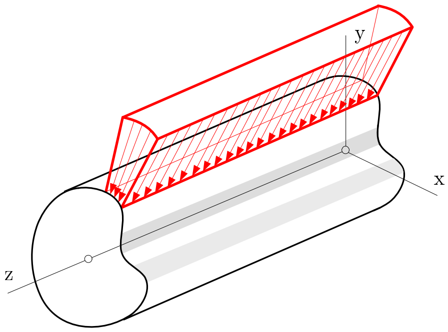
$$\varepsilon_z=-\frac{\nu}{1-\nu}\left(\varepsilon_x+\varepsilon_y\right) \tag{6.68}$$

képletekből számítható σ_x, σ_y és ε_z értéke.



6.33. ábra.

6.13. Igazolja, hogy homogén izotróp test esetén egybeesnek az alakváltozási és feszültségi tenzor főirányai.



6.34. ábra.

6.14. Az alkalmazott támaszok (kényszerek) megakadályozhatják, hogy egy adott irányra – legyen ez a z irány – merőleges metszeteit tekintve állandó keresztmetszetű test egyetlen pontja se mozduljon el ebbe az irányba. Ez esetben síkalakváltozási állapotról beszélünk, hiszen a test adott irányra merőleges valamennyi metszete sík marad és csak a saját síkjában változtatja alakját. Következőleg zérus értékű az adott irányú fajlagos nyúlás és az adott irány és a keresztmetszetek síkjai között a fajlagos szögtorzulás: $\varepsilon_z = \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$. Mutassa meg, hogy ez esetben

$$\sigma_z = -\nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \ ,$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2G}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \ , \ \ \varepsilon_y = \frac{1}{2G}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right] \ . \tag{6.69}$$

Milyen megszorításnak kell a test terhelésének síkalakváltozást feltételezve eleget tenni? (A viszonyokat szemléltető 6.34. ábra nem tünteti fel a véglapok tengelyirányú mozgását megakadályozó kényszereket.)

6.15. Mutassa meg, hogy HKR-ben

$$u = \frac{1}{2}\boldsymbol{T}\cdot\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}\left(\sigma_R\varepsilon_R + \sigma_\varphi\varepsilon_\varphi + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{R\varphi}\gamma_{R\varphi} + \tau_{\varphi z}\gamma_{\varphi} + \tau_{zR}\gamma_{zR}\right) \ . \tag{6.70}$$

a fajlagos alakváltozási energia.

6.16. Igazolja, hogy HKR-ben

$$u = \frac{1}{4G}\left[\sigma_R^2 + \sigma_\varphi^2 + \sigma_z^2 - \frac{\nu}{1+\nu}\Big(\sigma_R + \sigma_\varphi + \sigma_z\Big)^2 + 2\left(\tau_{R\varphi}^2 + \tau_{\varphi z}^2 + \tau_{zR}^2\right)\right] \tag{6.71}$$

a fajlagos alakváltozási energia a feszültség-koordinátákkal kifejezve.

6.17.* Mutassa meg, hogy az alakváltozási tenzor ismeretében a

$$u = \frac{1}{4G}\left[\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 + \frac{\nu}{1-2\nu}\Big(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\Big)^2 + \frac{1}{2}\left(\tau_{xy}^2 + 2\tau_{yz}^2 + 2\tau_{zx}^2\right)\right] \tag{6.72}$$

módon számítható a fajlagos alakváltozási energia.

6.18.* Igazolja az előző képlet felhasználásával, hogy csak akkor pozitív a fajlagos alakváltozási energia, ha teljesülnek a $G > 0$ és $0 \le \nu < 0.5$ egyenlőtlenségek. Miben áll a két egyenlőtlenség jelentősége?

6.19.* Mutassa meg, hogy homogén izotróp testek esetén a G/E hányados eleget tesz az $1/3 < G/E < 1/2$ egyenlőtlenségnek.

6.20.* Igazolja, kiindulva a fajlagos alakváltozási energia (6.71) alatti képletéből, hogy a

$$\sigma_n = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_n} \ , \qquad \text{és} \qquad \tau_{mn} = \frac{\partial u}{\partial \gamma_{mn}/2}$$

deriváltak – $m, n = x, y, z$, $m \neq n$ – az általános Hooke törvény skaláregyenleteit adják vissza. Mi lehet ennek az eredménynek a jelentősége?

7. FEJEZET

Az ellenőrzés és méretezés egyes kérdései

7.1. Bevezetés

7.1.1. Az ellenőrzés és méretezés fogalma. A 3.2.7. című szakaszban rámutattunk arra a körülményre, hogy megtervezett vagy megépített szerkezetek, gépek, vagy géprészek esetén is felmerülhet az a kérdés, hogy képes-e a megtervezett, avagy az elkészült szerkezet az üzemelés közben fellépő terheléseket olyan károsodás nélkül elviselni, amely megakadályozza a rendeltetésszerű használatot. Ezt a mérnöki feladatot *ellenőrzésnek* neveztük.

Adott funkció megvalósítására szolgáló új szerkezet, vagy gép tervezése során kitüntetett figyelmet érdemel a szerkezet, illetve részei anyagának és a geometriai méretek megválasztásának problémája, mivel az üzemeltetés illetve a használat közben fellépő terhelések nem okozhatnak tönkrementelt, vagyis olyan károsodást, amely megakadályozza a rendeltetésszerű használatot. Ezen mérnöki feladat megoldását *méretezésnek* hívtuk.

Húzás (nyomás), azaz egytengelyű feszültségi állapot esetén, az idézett 3.2.7. számú szakasz tisztázza az n_t tényleges és az $n = n_e$ előírt biztonsági tényező szerepét, értelmezi az anyag tönkremenetelére jellemző σ_{jell} normálfeszültséget, továbbá bevezeti a σ_{meg} megengedett normálfeszültség fogalmát.

Mivel tiszta hajlítás esetén is egytengelyű a feszültségi állapot a fenti fogalmak értelemszerűen alkalmazhatók erre az esetre is.

A 4.2.3. szakasz kör és körgyűrű keresztmetszetű rudak csavarására (vagyis egy speciális kéttengelyű feszültségi állapotra) nézve tekinti át a méretezés és ellenőrzés kérdéskörét. Bevezeti a tönkremenetelre jellemző τ_{jell} nyírófeszültséget, és a τ_{meg} megengedett nyírófeszültség fogalmát. A biztonsági tényező fogalmát ugyanolyan módon értelmezi, mint fentebb az egytengelyű feszültségi állapot esetén.

Közös sajátosság a felsorolt három egyszerű igénybevétel tekintetében az, hogy az ellenőrzés, méretezés (a keresztmetszeti méretek helyes megválasztása, vagy a méretek megválasztása helyességének ellenőrzése) egy számított feszültségérték és egy megengedett feszültségérték összehasonlításán nyugszik.

Bár a biztonsági tényező és ennek révén a megengedett feszültség értékét befolyásoló körülményeket részletesen megvizsgáltuk – visszautalunk itt a 3.2.7. szakasz utolsó bekezdését megelőző felsorolásra – számos további körülményt nem vettünk figyelembe az ellenőrzés és méretezés eddig áttekintett feladatai kapcsán. Feltételeztük ui., hogy (a) állandó (időfüggetlen) a terhelés (b) állandó keresztmetszetű a vizsgált rúd (rúdszakasz) (d) ez a rúd (rúdszakasz) a Saint-Venant elvnek megfelelően távol van a terelés bevezetésének helyétől (d) speciális (nem háromtengelyű) a feszültségi állapot.

Elvi fontosságú az a kérdés is, hogy mikor tekinthető két különböző feszültségi állapot (pl. a húzás, nyomás estén fellépő egytengelyű, a csavarásnál kialakuló kéttengelyű feszültségi állapot, vagy valamilyen háromtengelyű feszültségi állapot) egyformán veszélyesnek.

7.1.2. Az ellenőrzés és méretezés célja. A fentiek tanúsága szerint az ellenőrzés és méretezés célja annak biztosítása, hogy valamely gép vagy teherhordó szerkezet a mindennapi használatban fellépő üzemszerű erőhatásokat (terheléseket) kellő biztonsággal, adott esetben meghatározott ideig képes legyen úgy elviselni, hogy a szerkezet állapotában a terhelések hatására bekövetkező változások (pl. repedések, maradó alakváltozások, kopás hatása etc.) ne akadályozzák meg a rendeltetésszerű használatot.

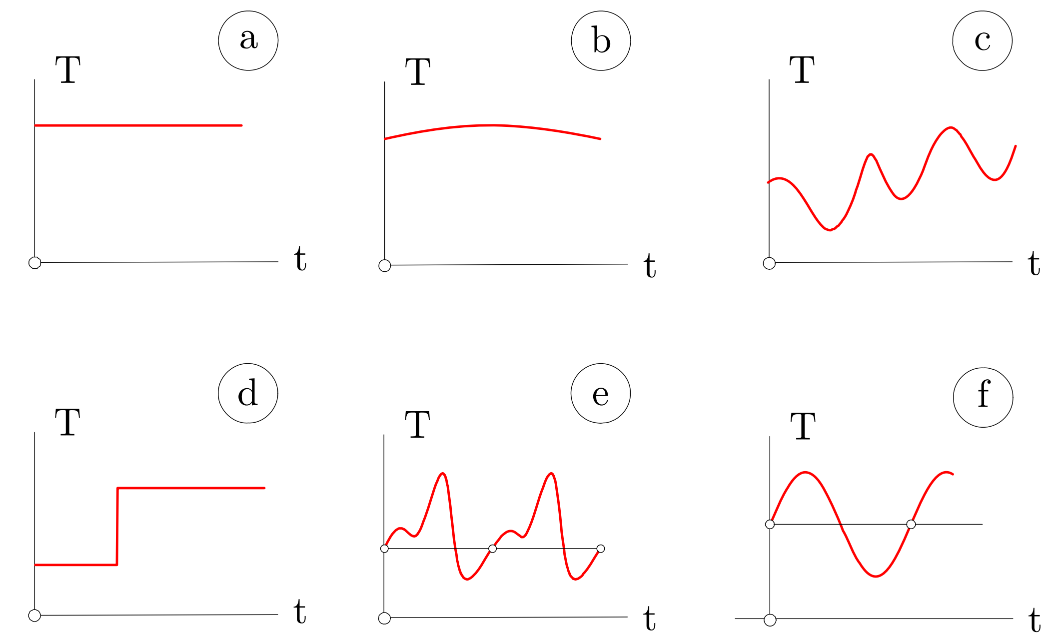
Mivel a méretezés ellenőrzés meglehetősen összetett feladat világosan látnunk kell, hogy melyek azok a körülmények, amelyek döntően befolyásolják a feladat megoldását.

A teljesség igénye nélkül két csoportra osztjuk azokat a körülményeket, amelyek figyelembevétele nélkül nem lehetséges az ellenőrzési vagy méretezési feladat megoldása.

1. A szerkezetet jellemző adatok, részletezve:
   (a) A szerkezet rendeltetése (épület, gép, közúti jármű, hajó, repülőgép, hajtómű, daruszerkezet etc.).
   (b) A szerkezet geometriai kialakítása (nagysága, arányai, összetettsége).
   (c) A szerkezet illetve részeinek anyaga (ezek viselkedése terhelés alatt: anyagegyenletek, az anyagok terhelhetősége etc.)
   (d) A károsodás, illetve a tönkremenetel lehetséges módja (repedés, törés vagy szakadás, túlzott mértékű maradó alakváltozás illetve kopás, nem megengedhető nagyságú rugalmas alakváltozás).
   (d) Környezeti hatások (hőmérsékletváltozás, korrózió, kopást okozó hatások).
2. A terhelés jellege (térbeli megoszlása, időbeli változása, nagysága).

Megjegyezzük, hogy terhelésnek kell tekinteni a hőmérsékletmező egyenlőtlen térbeli megoszlásának vagy a hőmérsékletváltozásnak hatását (az utóbbira a 3.5. szakasz mutat be példát).

A terhelés térbeli megoszlása, a terhelés nagysága sokféle lehet (koncentrált erők alkotta ER, térfogaton, felületen avagy vonal mentén megoszló terhelés.)



7.1. ábra.

Ami a terhelés időbeli lefolyását illeti különbséget teszünk (a) statikus (időben állandó pl. a szerkezetek önsúlya), (b) időben lassan változó, (c) időben véletlenszerűen változó (pl. az útról a járműkerekekre átadódó erő), (d) lökésszerű (pl. kovácsológépek), (e) időben periódikusan változó és (f) tisztán szinuszos terhelés között. Arra az esetre, amikor egy számmal jellemezhető a terhelés nagysága (egyparaméteres a terhelés) a 7.1. ábra szemlélteti a felsorolt eseteket.

A fentiek összefoglalásszerűen áttekintették a méretezés és ellenőrzés kapcsán felmerülő kérdésköröket. Ezek egy jelentős része kívül esik a Szilárdságtan (tágabb értelemben a Műszaki Mechanika) által vizsgált szakterületeken, megoldásuk további mérnöki tudományok pl. Anyagtudomány, Gépelemek, Szerszámgépek, Hő-, és Áramlástani gépek ismertét igényli. A jelen könyv a méretezés és ellenőrzés kérdésköreit tekintve elsősorban a szilárdságtani vonatkozású problémák megoldására helyezi a hangsúlyt, megjegyezve, hogy a szerkezeti anyagok gyors fejlődése miatt még ebben a tekintetben sem törekedhet a teljességre.

7.2. Méretezés statikus terhelésre

7.2.1. Méretezési szemléletek. Mivel a terhelések rendszerint változnak az időben a statikus terhelésre történő méretezés akkor jogosult, ha a terhelési és a leterhelés egyaránt lassú (elhanyagolhatók a dinamikai hatások), míg az üzemeltetés közbeni terhelési szint jó közelítéssel állandónak tekinthető.

Az ellenőrzés és méretezés során két alapvető szemléletet szokás egymástól megkülönböztetni: ellenőrzés, méretezés

(a) *lokális feszültségjellemző* alapján, avagy

(b) a *teljes szerkezet viselkedésére jellemző* valamilyen *mennyiség* alapján.

A *lokális feszültségjellemző* alapján történő számítás során a szerkezet valamennyi pontjában meg kell vizsgálni a feszültségi állapotot, majd el kell dönteni ezek összehasonlításával, hogy mely pontokban tekinthető az a legveszélyesebbnek. Ha a szerkezet megfelel, akkor a ezekben a pontokban is elegendő a biztonság (megegyezik az előírt értékkel, vagy nagyobb annál) a maradó károsodást és így üzemképtelenséget okozó feszültségi állapothoz képest. Mivel a szerkezet egyes pontjaiban egymástól általában különböző feszültségi állapotok alakulnak ki, ezek összehasonlítása megkívánja egy a feszültségi állapot veszélyességének jellemzésére használható paraméter, azaz az egyenértékű, vagy elterjedtebb nevén *redukált feszültség* fogalmának bevezetését. A feszültségjellemző alapján történő számítást a fentiek alapján *feszültségcsúcsra történő ellenőrzésnek, illetve méretezésnek nevezzük.*

Szerkezeti jellemzőnek tekintjük és elsősorban jól alakítható anyagokból készült szerkezetek esetén alkalmazzuk

(α) a szerkezet ún. *teherbírását* megadó terhelési paramétert (terhelést),

(β) a szerkezet előírt korlátnál nagyobb *elmozdulását, alakváltozását* okozó terhelést,

(γ) valamint a szerkezet *stabilitásvesztését* okozó terhelést.

A szerkezet *teherbírásán* általában azt a terhelési paramétert (terhelést) értjük, amely a szerkezet egyes részein jelentős maradó elmozdulásokat, alakváltozásokat okoz. Megfordítva és a fogalom világossá tétele érdekében megjegyezzük, hogy az olyan terhelést, amely csak lokálisan, a szerkezet egy kis részére kiterjedően okoz maradó alakváltozást kicsiny, elhanyagolható mértékű elmozdulások mellett számos esetben nem kell a szerkezet üzemszerű használatát megakadályozó maradó károsodást okozó terhelésnek tekinteni. Nyilvánvaló, hogy teherbírásra történő mértezés, illetve ellenőrzés során a biztonságot a szerkezetjellemző terhelési paraméterre kell vonatkoztatni.

A gépészmérnöki gyakorlatban gyakorta előfordul, különösen nagy pontosságú megmunkálógépek esetén, hogy a feszültségcsúcsra történő méretezés követelményeinek teljesülése mellett a megmunkálás pontosságának biztosítására előírjuk a gép egyes részein az adott terheléshez tartozó rugalmas elmozdulások (alakváltozások) maximumát. A gépnek elegendően merevnek kell tehát lennie ahhoz, hogy a megmunkálás során fellépő terhelések hatására bekövetkező mozgások ne akadályozzák meg munkadarab előírt pontossággal történő elkészítését. A tapasztalat szerint a merevségi követelmények sokszor sokkal szigorúbbak, mint a feszültségcsúcsra történő méretezés követelményei. Ha a merevségi követelmények teljesítése az elsődleges szempont akkor *előírt elmozdulásra, illetve merevségre* történő méretezésről, ellenőrzésről beszélünk.

Könnyen ellenőrizhető, hogy a két végén tengelye mentén nyomott hosszú vékony (karcsú) vonalzó nagyobb nyomás esetén kihajlik. A jelenség arra utal, hogy egy adott terhelés mellett az egyenes és a kihajlott alak egyaránt egyensúlyi alak lehet. A kihajlás bekövetkezése a vékony vonalzó (karcsú rúdalakú test) ún. *stabilitásvesztése.* Mivel a kihajlás bekövetkezésekor a nyomás mellett megjelenik a hajlítás is a jelenség igen veszélyes. Következésképp vizsgálni kell a vékony nyomott rudak ellenőrzése (mértezése) során, hogy felléphet-e adott terhelés esetén a *stabilitásvesztés* jelensége.

Ha a fenti három szerkezetjellemző valamelyikére méretezünk vagy ellenőrzünk, akkor szerkezetjellemzőre történik a méretezés, ellenőrzés.

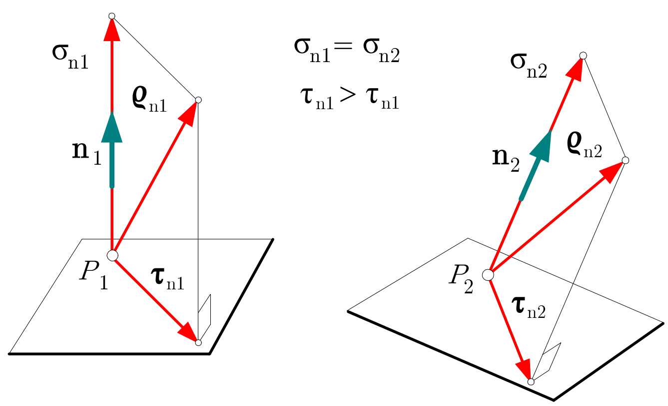
7.2.2. Méretezés, ellenőrzés feszültségcsúcsra: a redukált feszültség és szerepe. Az előző szakaszban rámutattunk, hogy a feszültségcsúcsra történő ellenőrzés és méretezés kulcslépése a vizsgálat tárgyát képező test (szerkezet) egyes pontjaiban ébredő feszültségi állapotok veszélyességének összehasonlítása és ezt követően a veszélyes pont(ok) kiválasztása. Az összehasonlítás során egy-, illetve többtengelyű (két-, és háromtengelyű) feszültségi állapotokat kell szemügyre venni.

Az egytengelyű feszültségi állapotra az jellemző, hogy a főtengelyek KR-ében egyetlen főfeszültség különbözik zérustól. Húzott rúd esetén pozitív a nem zérus főfeszültség és mivel a rúd hossztengelye párhuzamos az 1 jelű főtengellyel a főtengelyek koordinátarendszerében $\sigma_1 \geq 0$, és $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Nyilvánvaló az is, hogy a tönkremenetelt okozó σ_1 mérésekkel meghatározható.

A fentieken alapul a *redukált, vagy más nevén egyenértékű feszültség* fogalmának bevezetése: A tetszőleges két-, vagy háromtengelyű feszültségi állapottal a veszélyesség szempontjából egyenértékű egytengelyű feszültségi állapothoz tartozó $\sigma_1 > 0$ főfeszültséget (húzófeszültséget) *redukált (egyenértékű) feszültségnek* nevezzük, és a σ_{red} vagy σ_e módon jelöljük. (Az utóbbi jelölés kevésbé elterjedt.)

A redukált feszültség meghatározására alkalmas számítási formula felállítása a tönkremenetellel kapcsolatos *feszültségelméletek* eredményein alapul és részint kísérleti, részint pedig elvi megfontolásokat igényel. A szakirodalom több egymástól valamelyest eltérő eredményre vezető redukált feszültséget ismer. Ennek az a magyarázata, hogy a szerkezeti anyagok tulajdonságai eltérnek egymástól (fémek tekintetében különbséget teszünk például a lágy, jól alakítható, a szívós, avagy a rideg anyagok között) és emiatt nem túl valószínű olyan egységes elmélet létezése, amely minden esetben működik. A továbbiak a fémek esetén leggyakrabban használt két elmélet, a Mohr-féle elmélet, valamint a Huber-Mises-Hencky-féle elmélet bemutatására szorítkoznak.

A Mohr-féle elmélet. Mohr lágyacél próbatesteken végzett nagyszámú kísérlet. Megfigyelései szerint – érdemes ehelyütt emlékeztetni az olvasót a 3.4. ábra kis széntartalmú acélokkal kapcsolatos diagramjára: a folyás kezdete és a szakadás élesen elkülönül – szét kell választani a folyás és a vele társuló maradó alakváltozás bekövetkezését, valamint a törés (szakadás) megindulását.

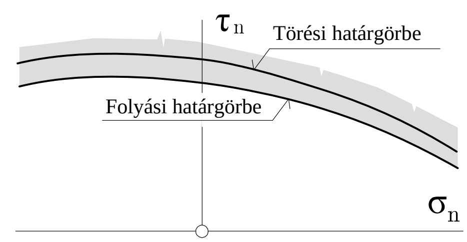


7.2. ábra.

A folyás felléptekor az egyes anyagi részecskék elcsúsznak egymáson, az anyagi részecskék egymástól való elválása azonban nem alakul ki. Ezzel szemben a törés általában valamilyen mikrorepedésből indul ki, oly módon, hogy egy terhelési szint felett az elkezd tovább növekedni: beindul a szomszédos anyagrészek elválása. A fentiek alapján Mohr két feltevést fogalmazott meg:

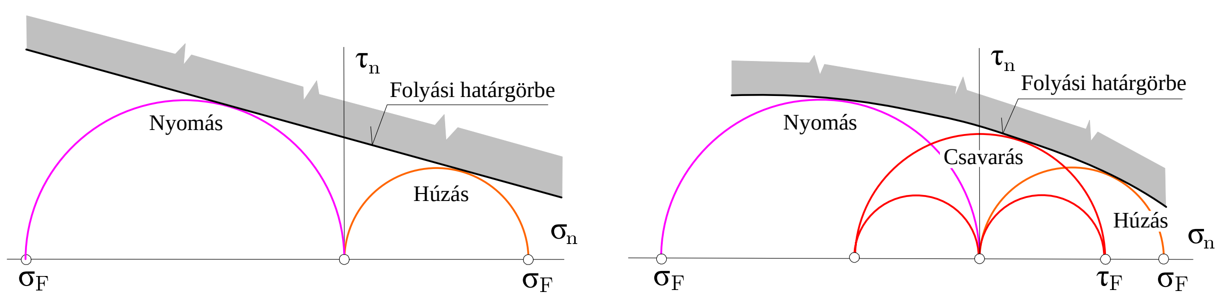
1. Valamely felületelemen ébredő feszültségvektor $\boldsymbol{\rho}_n = \sigma_n \mathbf{n} + \boldsymbol{\tau}_n$ felbontásában a σ_n normálfeszültség és a $\tau_n = |\boldsymbol{\tau}_n|$ nyírófeszültség határozza meg, hogy bekövetkezik a felületelemen a csúszás (a maradó alakváltozás), vagy a felületelemen lévő pontok egymástól való elválása (törés).
2. Tekintsük a P_1 és P_2 pontokban az $\mathbf{n}_1$ és $\mathbf{n}_2$ normálisú felületelemeken ébredő $\boldsymbol{\rho}_{n1}$ és $\boldsymbol{\rho}_{n2}$ feszültségvektorokat – v.ö.: 7.2. ábra. Ha $\sigma_{n1} = \sigma_{n2}$ és $\tau_{n1} > \tau_{n2}$, továbbá a P_1 pontban nem lép fel csúszás (törés), akkor a P_2 pontban sem következik be csúszás (törés).

Nyilvánvaló a fentiek alapján, hogy adott szerkezeti anyag esetén valamely σ_n normál feszültséghez tartozik egy olyan τ_n nyírófeszültség, amely elérésekor megindul a csúszás (a maradó alakváltozás), illetve a törés. A csúszás fellépéséhez tartozó $[\sigma_n, \tau_n]$ pontpárok a folyási határgörbét, a törés bekövetkeztéhez tartozó $[\sigma_n, \tau_n]$ pontpárok pedig a törési határgörbét határozzák meg a teljes feszültségi Mohr kör (σ_n, τ_n) síkján. Mivel a teljes feszültségi Mohr kör körívháromszöge úgy szemlélteti az adott pont feszültségi állapotát, hogy a tetszőleges $\mathbf{n}$ normálisú felületelemen ébredő $\boldsymbol{\rho}_n$ feszültségvektor σ_n és τ_n koordinátái a körívháromszög belsejébe, vagy annak peremére esnek veszélyesnek tekinthető a feszültségi állapot, ha a teljes feszültségi Mohr kör legnagyobb köríve metszi (belemetsz), vagy érinti, a folyási (törési) határgörbét. Ez azt jelenti, hogy a folyási határgörbe az egymástól különböző de a folyást éppen előidéző feszültségi állapotok Mohr köreinek burkoló görbéje a (σ_n, τ_n) síkon.



7.3. ábra.

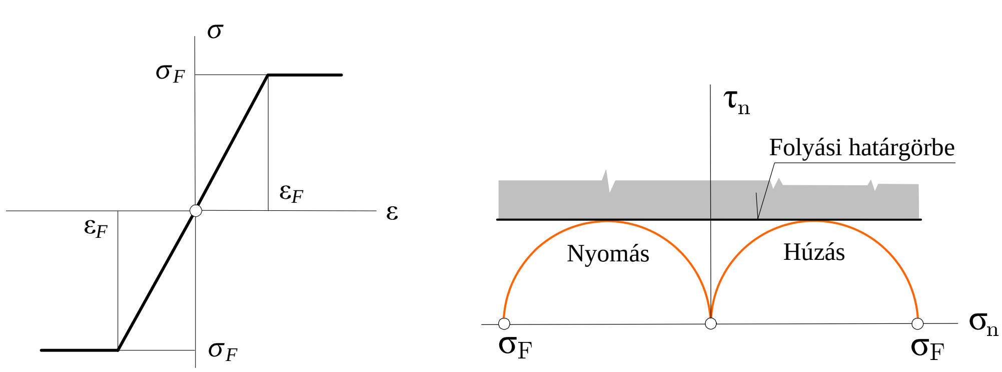
A folyási határgörbe felvétele kísérleti eredmények felhasználásával történhet. Ha két kísérlet (húzás, nyomás) eredményét ismerjük, akkor a vonatkozó két feszültségi Mohr kör közös érintőjével közelíthetjük a folyási (törési) határgörbe gyakorlat számára legfontosabb szakaszát.



7.4. ábra.

Ha három kísérlet (húzás, nyomás, vékonyfalú cső csavarása) eredményeit ismerjük, akkor az ezekhez tartozó Mohr körök közös burkológörbéje már valamivel pontosabban közelíti a keresett határgörbét. A 7.4. ábra a mondottakkal összhangban szemlélteti rideg anyagokra (ezek húzásra kevésbé terhelhetők mint nyomásra) a folyási határgörbe szerkesztését.

Különös figyelmet érdemelnek az olyan szerkezeti anyagok (lágyacél, lágy fémek – pl. alumínium etc.), amelyek húzásra és nyomásra a terhelés egy tartományában ideálisan rugalmas képlékeny testként viselkednek. Ebben az esetben, amint az jól látható a 7.5. ábrán megrajzolt



7.5. ábra.

$\sigma - \epsilon$ diagramon (ez a 3.9. ábra felidézése), hogy húzásra és nyomásra azonos nagyságú az anyag folyáshatára. Következőleg, amint azt az fenti ábra jobboldala világosan szemlélteti, vízszintes egyenes a folyási határgörbe. Ez egyben azt is jelenti, hogy egyformán veszélyesnek (vagy veszélytelennek) tekinthetők a tekintett szilárd test különböző pontjaiban ébredő feszültségi állapotok, ha azonos a hozzájuk tartozó Mohr körök legnagyobb átmérője. A mondottak alapján a kérdéses Mohr körök átmérőjét adó

$$\boxed{\sigma_{\text{red Mohr}} = |\sigma_1 - \sigma_3|} \tag{7.1}$$

feszültséget *Mohr-féle redukált (vagy egyenértékű) feszültségnek* nevezzük. Vegyük azt is észre, hogy a redukált feszültség a maximális nyírófeszültség kétszerese.

A fentiek fényében hasonlítva össze a vizsgálat tárgyát képező szerkezet pontjaiban ébredő feszültségi állapotokat megállapíthatjuk, hogy a szerkezet azon pontja (vagy pontjai) tekinthető(k) a legveszélyesebbnek a feszültségcsúcsra történő ellenőrzés, illetve méretezés során, amelyekben maximális értékű a redukált feszültség. Jelölje ezt $\sigma_{\text{red max}}$. Ennek az értéknek eleget kell tennie a

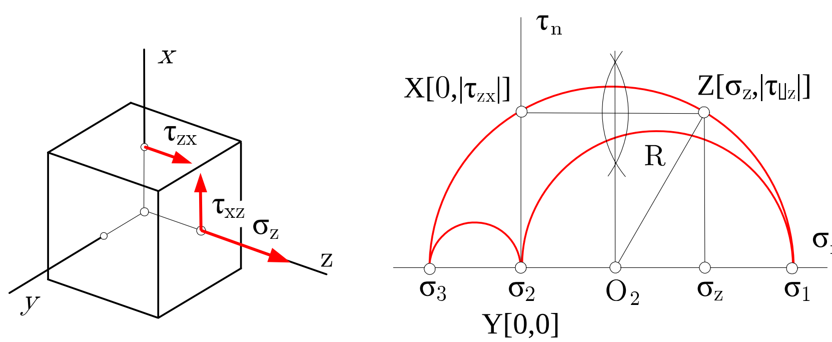
$$\sigma_{\text{red max}} \leq \sigma_{\text{meg}} = \frac{\sigma_{\text{jell}}}{n} \tag{7.2}$$

egyenlőtlenségnek, ahol a 3.2.7. szakaszban mondottakkal összhangban, σ_{jell} vagy a folyáshatár, vagy a szakítószilárdság, míg n az előírt biztonsági tényező.

Mivel a valós szerkezetek terhelésének ismeretében a szerkezet feszültségi állapotát általában ismertnek vehetjük maga az ellenőrzés a fenti reláció fennállásának ellenőrzését jelenti.

A méretezés folyamán a szerkezet feltételezett terhelése és feltételezett geometriai kialakítása (méretei), valamint választott anyagának jellemzői ismeretében kell teljesíteni a (7.2) egyenlőtlenséget, amelyben a $\sigma_{\text{red max}}$ tehát a szerkezet paramétereinek (terhelés, geometriai méretek, anyagjellemzők etc.) függvénye. Néhány speciális esettől (pl. tömör körkeresztmetszetű rúd csavarása) eltekintve az ismeretlen feladatparaméterek (ezek többnyire geometriai méretek) száma általában nagyobb, mint egy. Az ilyen esetekben egyéb tervezési szempontok szempontok figyelembevétele mellett kell kielégíteni többnyire valamely geometriai jellemző alkalmas megválasztásával a fenti egyenlőtlenséget.

Kiolvasható a (7.2) alatti értelmezésből, hogy a Mohr-féle redukált feszültség számítása a legnagyobb és legkisebb főfeszültség ismeretét igényli. Mivel a rudakból felépített szerkezetekben gyakran előfordul, hogy a veszélyes pontokban (a) zérus értékű az egyik koordinátasíkon ébredő



7.6. ábra.

feszültségvektor, és (b) eltűnik emellett egy másik normálfeszültség is, ezért ez az eset külön figyelmet érdemel. A viszonyokat szemléltető 7.6. ábrán zérus értékű a $\boldsymbol{\rho}_y$ feszültségvektor és a σ_x normálfeszültség. Leolvasható a Mohr-féle feszültségi kördiagramról, hogy a jelen esetben

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_z}{2} \pm R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}\,.$$

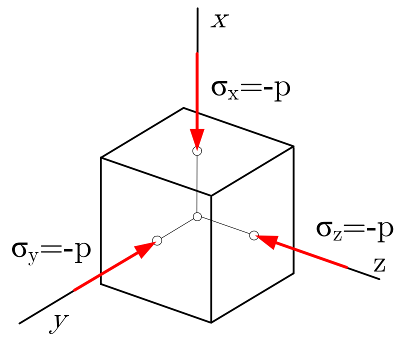
Következésképp

$$\sigma_{\text{red Mohr}} = |\sigma_1 - \sigma_3| = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\,, \tag{7.3}$$

ahol most $\sigma = \sigma_z$ és $\tau = \tau_{xz}$.

A Huber-Mises-Hencky-féle elmélet. A szilárd test energetikai állapotával foglalkozó 6.5.2. szakaszban a (6.55) és (6.56) képletekkel két részre, fajlagos torzítási és fajlagos térfogatváltozási energiára bontottuk fel a teljes fajlagos alakváltozási energiát. A Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültség fogalmának értelmezése során, amint azt lentebb látni fogjuk, ez a felbontás alapvető szerepet játszik.

A kísérleti eredmények szerint hidrosztatikus nyomással, a vonatkozó hidrosztatikus feszültségi állapotot a 7.7. ábra szemlélteti, nem lehet maradó alakváltozást létrehozni. Hidrosztatikus feszültségi állapot esetén a feszültségi tenzornak bármely irány főiránya, és bármely irányban $-p$ értékű, azaz azonos a főfeszültség. Másként fogalmazva izotróp tenzor a feszültségi tenzor. (Visszautalunk itt egyrészről a 6.2.3. szakaszt megelőző utolsó bekezdésre, valamint az izotróp tenzor fogalmának az (1.75) képlet kapcsán történő bevezetésére.)



7.7. ábra.

A fentebb mondottak alapján hidrosztatikus nyomás esetén rugalmas marad az alakváltozás függetlenül az alkalmazott nyomás értékétől. Hidrosztatikus feszültségi állapot esetén az alakváltozási tenzorra felírt (6.31a) Hook törvény szerint az alakváltozási tenzor az izotróp feszültségi tenzor és az ugyancsak izotróp egységtenzor súlyozott összege. Következik tehát, hogy az alakváltozási tenzor is izotróp (gömbi) tenzor, amelyhez az előzőek alapján csak tiszta térfogatváltozás tartozik – nem jön létre torzulás a test geometriájában.

Következésképp magától értetődő az a feltevés, hogy csak akkor fejlődik ki maradó alakváltozás, ha a fajlagos torzítási energia egy az adott anyagra jellemző $u_{\mathrm{T\ jell}}$ értéket ér el.

A fajlagos torzítási energiát adó (6.55) képletben a főtengelyek KR-ében $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$, $\sigma_z = \sigma_3$ és $\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$. Ez azt jelenti, hogy háromtengelyű feszültségi állapotra

$$u_{\mathrm{T\ jell}} = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right] \tag{7.4a}$$

a fajlagos torzítási energia értéke a maradó alakváltozás kezdetekor. Egytengelyű feszültségi állapot esetén, feltéve hogy ez a feszültségi állapot is a maradó az alakváltozás kezdetéhez tartozik, ugyanez az érték a $\sigma_x=\sigma_1=\sigma_{\mathrm{red\ HMH}}$, $\sigma_y=\sigma_2=0$, $\sigma_z=\sigma_3=0$ és $\tau_{xy}=\tau_{yz}=\tau_{zx}=0$ helyettesítésekkel adódik a (6.55) képletől:

$$u_{\mathrm{T\ jell}} = \frac{1}{12G}2\sigma_1^2 = \frac{1}{12G}2\sigma_{\mathrm{red\ HMH}}^2\,. \tag{7.4b}$$

Itt $\sigma_{\mathrm{red\ HMH}}$ a Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültség. A (7.4) képletek egybevetése szerint

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{red\ HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right]}} \tag{7.5}$$

a Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültség formulája, ha a főtengelyek KR-ében vagyunk.

Hasonló gondolatmenettel adódik, hogy az (x, y, z) KR-ben

$$\sigma_{\mathrm{red\ HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)\right]} \tag{7.6}$$

a Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültség értéke. A 7.6. ábrán szemléltetett kéttengelyű feszültségi állapot esetén a fenti képletből

$$\sigma_{\mathrm{red\ HMH}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sigma_z^2+\sigma_z^2+6\tau_{xy}^2\right]} = \sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\,. \tag{7.7}$$

a Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültség. A (7.3) és (7.7) képletek egyesített formában is felírhatók:

$$\boxed{\sigma_{\mathrm{red}\ \substack{\mathrm{HMH}\\ \mathrm{Mohr}}} = \sqrt{\sigma^2+\beta\tau^2}\,, \qquad \beta = \left\{\begin{array}{ll} 3 & \mathrm{HMH} \\ 4 & \mathrm{Mohr} \end{array}\right.\,.} \tag{7.8}$$

Ismét felhívjuk az olvasó figyelmét, hogy ne feledkezzen meg a képlet alkalmazásának (a) és (b) feltételeiről.

7.2.3. A Mohr-, és Huber-Mises-Hencky-féle redukált feszültség összehasonlítása. A kétféle redukált feszültség értelemszerűen különböző értékeket szolgáltat. A 7.6. ábrán vázolt kéttengelyű feszültségi állapotra a (7.8) képlet szerint a HMH-féle redukált feszültség ad kisebb értéket. Az alábbiakban röviden áttekintjük hogyan változik általában a kétféle redukált feszültség aránya. A redukált feszültségeket értelmező (7.1) és (7.5) összefüggések egybevetése alapján

$$\frac{\sigma_{\text{red HMH}}}{\sigma_{\text{red Mohr}}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_3}\right)^2+\left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}\right)^2+\left(\frac{\sigma_3-\sigma_1}{\sigma_3-\sigma_1}\right)^2\right]} \tag{7.9}$$

a kétféle redukált feszültség aránya. Legyen

$$\chi = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3} \tag{7.10}$$

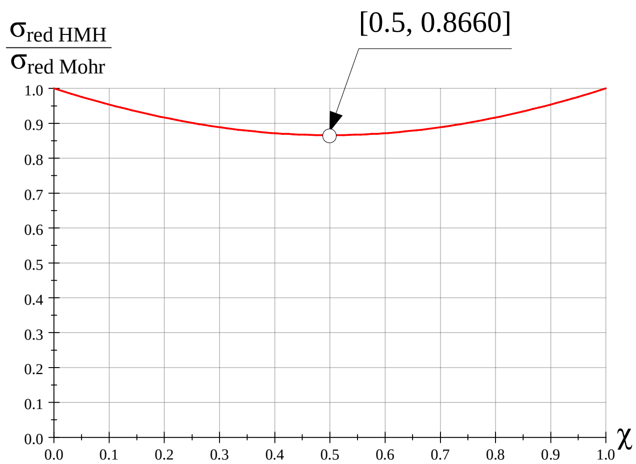
egy a feszültségi állapotra jellemző dimenziómentes paraméter. Adott σ_1 és σ_3 mellett $\sigma_2 \in [\sigma_3, \sigma_1]$. Következésképp χ a [0,1] intervallumban változik: $\sigma_2 = \sigma_3$-ra $\chi = 0$, $\sigma_2 = \sigma_1$ esetén pedig $\chi = 1$. Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_3} = \frac{\sigma_1-\sigma_3-\sigma_2+\sigma 3}{\sigma_1-\sigma_3} = 1-\chi. \tag{7.11}$$

A (7.10) és (7.11) képletek helyettesítése a redukált feszültségek viszonyszámát adó (7.9) összefüggésbe a

$$\frac{\sigma_{\text{red HMH}}}{\sigma_{\text{red Mohr}}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(1-\chi)^2+\chi^2+1\right]} = \sqrt{\chi^2-\chi+1} \tag{7.12}$$

eredményre vezet.



7.8. ábra.

Leolvasható a $\sigma_{\text{red HMH}}/\sigma_{\text{red Mohr}}$ hányadost a 7.8. ábrán a χ dimenziómentes paraméter függvényében szemléltető diagramról hogy χ=0.5 esetén maximális az eltérés értéke és ez 13.4%. Nem nehéz ellenőrizni, hogy a csavarási feladatban például pont ekkora a kétféle redukált feszültség eltérése.

8. FEJEZET

Összetett igénybevételek prizmatikus rudakban

8.1. Bevezetés

8.1.1. Az összetett igénybevétel fogalma. Egyenes középvonalú rudalakú testek esetén különbséget tettünk a 2.3.5 szakaszban az $\mathbf{e}_z$ normálisú keresztmetszeten megoszló $\boldsymbol{\rho}_z$ sűrűségvektorú belső ER $\mathbf{F}_S$ eredőjének és a keresztmetszet súlypontjára vett $\mathbf{M}_S$ nyomatékának felbontását tekintve az N ruderő, a T_x, T_y nyíróerő, továbbá az M_c csavarónyomaték és M_{hx}, M_{hy} hajlítónyomaték között. Az utóbbi, hatását és jellegét tekintve négyfajta (ruderő, nyíróerő, csavarónyomaték és hajlítónyomaték), mennyiséget igénybevételeknek neveztük. A ruderő, kör és körgyűrű keresztmetszetű rúd esetén a csavarónyomaték, valamint tiszta hajlítás esetén a hajlítónyomaték hatására kialakuló szilárdságtani állapotok meghatározásával a Szilárdságtan alapkísérletei I., II. és III. című fejezetekben foglalkoztunk.

Megjegyezzük hogy a húzást (nyomást), csavarást és tiszta hajlítást szokás *egyszerű igénybevételeknek* is nevezni.

A jelen fejezet azokra a mérnöki gyakorlatban előforduló esetekre fordítja figyelmét, amikor nem egy, hanem egynél több igénybevétel hatására kialakuló szilárdságtani állapot a vizsgálat tárgya. Az egyszerűbb szóhasználat kedvéért *összetett igénybevételekről* beszélünk, ha egynél több az igénybevételek száma. A figyelembevett igénybevételek száma és jellege alapján különbséget teszünk majd (1) húzás (nyomás) és egyenes hajlítás, (2) ferde hajlítás, (3) excentrikus húzás (nyomás), (4) húzás (nyomás) és csavarás, (5) hajlítás és csavarás, (6) húzás (nyomás), hajlítás és csavarás, valamint (7) hajlítás és nyírás között.

Zömök rúdról fogunk beszélni, ha a rúd hossza nem haladja meg a keresztmetszet maximális méretének mintegy 5∼10-szeresét. Ellenkező esetben karcsú a rúd. Karcsú rudak és negatív ruderő (nyomóerő) esetén különleges figyelemmel kell eljárni, mivel ekkor stabilitásvesztés (nem kívánatos kihajlás) léphet fel. Ilyen esetekben az összetett igénybevételek hatására kialakuló feszültségi állapotok meghatározása mellett azt a kérdést is vizsgálni kell, hogy valóban bekövetkezhet-e stabilitásvesztés.

8.1.2. A szuperpozíció elve. Visszaidézve, hogy a Szilárdságtan 6.6. szakaszban áttekintett alapegyenletei (a kinematikai egyenlet, a Hooke törvény és az egyensúlyi egyenlet) lineáris egyenletek és hogy az összetett igénybevételű rudak esetére érvényes összefüggések, valójában az említett szilárdságtani egyenletek megoldásai következik, hogy az összetett igénybevételű rudak elmozdulási, alakváltozási és feszültségi állapota az egyes igénybevételekhez tartozó elmozdulási, alakváltozási és feszültségi állapotok ismeretében az ún. *szuperpozíció elv* felhasználásával számíthatók. Az elv homogén lineáris egyenlettel (egyenletrendszerrel) leírható függvénykapcsolatok esetén alkalmazható, hiszen ezekre fennáll az (1.2) képlet (emlékeztetjük az olvasót a homogén lineáris függvény idézett képlethez tartozó értelmezésére is):

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2)\,.$$

Szavakban: a λ_1 súlyú x_1 és λ_2 súlyú x_2 hatások együttesének eredménye (f értéke a $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ helyen) az x_1 és x_2 hatások eredményeinek (az f_1 és f_2 értékeknek) λ_1 és λ_2-vel súlyozott összege.

Kis alakváltozások és elmozdulások esetén a rudak igénybevételei (a ruderő, nyíróerő, csavarónyomaték és hajlítónyomaték) a statika vonatkozó egyensúlyi egyenletei szerint homogén lineáris függvényei a rúdra működő külső erőknek. Ugyancsak homogén lineáris függvénye a Szilárdságtan alapkísérletei I., II. és III. fejezetek szerint az alakváltozási és feszültségi tenzorok valamennyi eleme a ruderőnek, illetve a csavaró-, és hajlítónyomatéknak. Ez azt jelenti, hogy két (vagy három) igénybevétel együttes hatása, összhangban a szuperpozíció elvvel, a külön-külön tekintett igénybevételek hatásainak összeadásával állítható elő. Jelölje rendre $\mathbf{A}'$, $\mathbf{T}'$ és $\mathbf{u}'$, továbbá $\mathbf{A}''$, $\mathbf{T}''$ és $\mathbf{u}''$ két különböző igénybevétel esetén az alakváltozási és feszültségi tenzort, illetve az elmozdulásmezőt. A szuperpozíció elvnek megfelelően

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' + \mathbf{A}''$$
$$\mathbf{T} = \mathbf{T}' + \mathbf{T}''$$
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}''$$

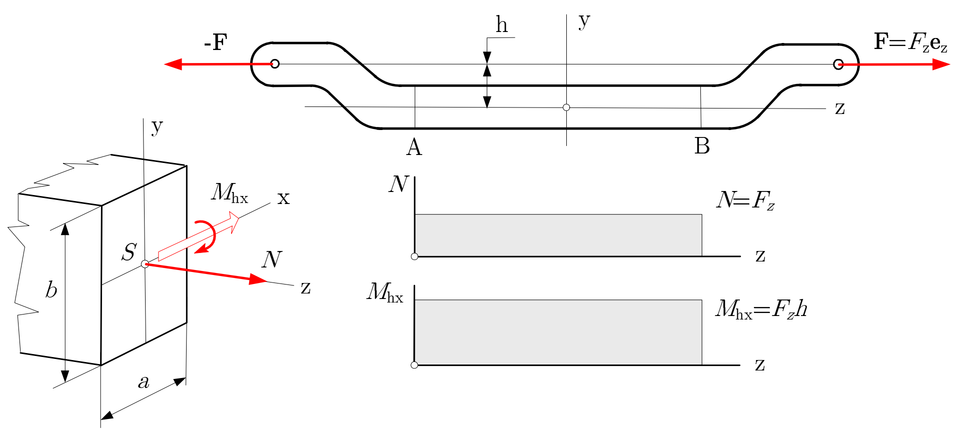
a két igénybevétel együttes hatására (a két igénybevétel mint összetett igénybevétel hatására) kialakuló alakváltozási és feszültségi tenzor, illetve elmozdulásmező. Több – három, vagy négy – együtt fellépő igénybevétel hatását értelemszerűen ugyancsak a szuperpozíció elv felhasználásával számítjuk.

Megjegyezzük, hogy a konkrét feladatokban a feszültségi állapotot határozzuk meg elsőként. Az alakváltozási viszonyokat többnyire a Hooke törvény felhasználásával tisztázzuk.

Érdemes felhívni arra is a figyelmet, hogy az energetikai állapotok tekintetében nem alkalmazható a szuperpozíció elv, mivel a (6.47) képlet szerint a fajlagos alakváltozási energia kvadratikus (és nem lineáris) függvénye a feszültségeknek (és rajtuk keresztül az igénybevételeknek).

8.2. Húzás (vagy nyomás) és egyenes hajlítás

Feltételezzük, hogy (a) a prizmatikus rudat terhelő tengelyirányú erő a rúd hossztengelye, valamint a keresztmetszetek egyik főtengelye által kifeszített síkban működik (b) a tengelyirányú erő hatásvonala nem esik egybe a rúd hossztengelyével. Ha szimmetriasík a rúd z hossztengelye és az y tengely által kifeszített sík, továbbá a szimmetriasíkban működő tengelyirányú erő hatásvonala különbözik a z tengelytől, akkor mindkét feltevés teljesül. A 8.1. ábrán szemléltetett és az yz síkra szimmetrikus téglalapkeresztmetszetű kart excentrikusan húzza az $\mathbf{F} = F_z\mathbf{e}_z$ erő. Az ábra feltünteti a kar AB szakaszának igénybevételi ábráit, valamint a $z=0$ keresztmetszetet, amelyen feltüntettük a belső erőrendszer $N = F_z$ eredőjét, továbbá súlyponti $M_{hx} = F_z h$ nyomatékát.



8.1. ábra.

Leolvasható az igénybevételi ábrákról, hogy az AB szakaszon húzás plusz hajlítás a kar igénybevétele. Mivel mindkét igénybevétel egytengelyű feszültségi állapotot hoz létre, és a z irányú normálfeszültség az egyedüli nem zérus feszültség, a (3.15) és $(5.15)_2$ képletek, valamint a szuperpozíció elv felhasználásával írhatjuk, hogy

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' ,$$

ahol

$$\sigma_z' = \frac{N}{A} ; \qquad \sigma_z'' = \frac{M_{hx}}{I_x} y .$$

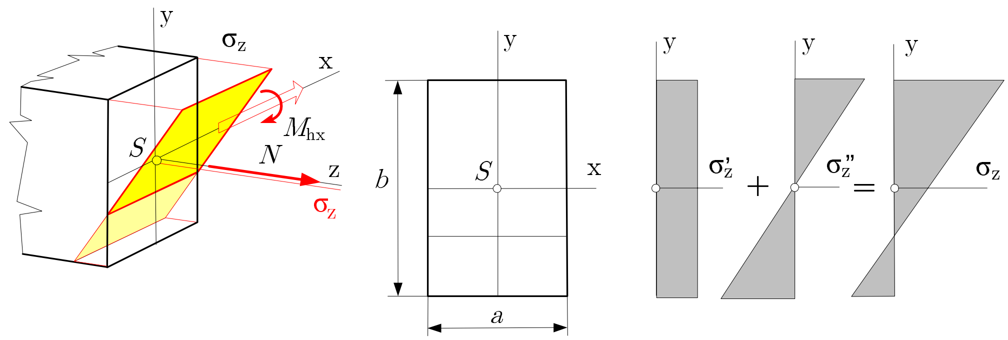
Következésképp

$$\boxed{\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y} \tag{8.1}$$

az egyetlen nem zérus feszültség képlete és

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}' + \underline{\mathbf{T}}'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

a feszültségi tenzor mátrixa. A 8.2. ábra szemlélteti, részint axonometrikusan a keresztmetszeten, részint pedig a szuperpozíció elvet is demonstrálva az y tengely mentén a σ_z normálfeszültségek



8.2. ábra.

megoszlását.

A legnagyobb húzó-, illetve nyomófeszültség az $y = b/2$ és $y = -b/2$ oldaléleken ébred. A (8.1) képletből, kihasználva a keresztmetszeti tényező (5.35) alatti értelmezését rendre

$$\sigma_{\text{max húzás}} = \left| \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{K_x} \right| \qquad \text{és} \qquad \sigma_{\text{max nyomás}} = \left| \frac{N}{A} - \frac{M_{hx}}{K_x} \right| \tag{8.3}$$

a legnagyobb húzó-, illetve nyomófeszültség értéke.

Mivel egytengelyű a feszültségi állapot érvényes az egyszerű Hooke törvény. Értelemszerűen alkalmazva a (3.16) és (3.14) képleteket, továbbá figyelembevéve emellett, hogy nincs szögtorzulás írhatjuk, hogy

$$\begin{gathered} \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}\,, \qquad \varepsilon_k = \varepsilon_x = \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_z\,. \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0\,. \end{gathered} \tag{8.4}$$

A fenti adatokkal

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -\nu\varepsilon_z & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\varepsilon_z & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \qquad \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x} y\right) \tag{8.5}$$

az alakváltozási tenzor mátrixa.

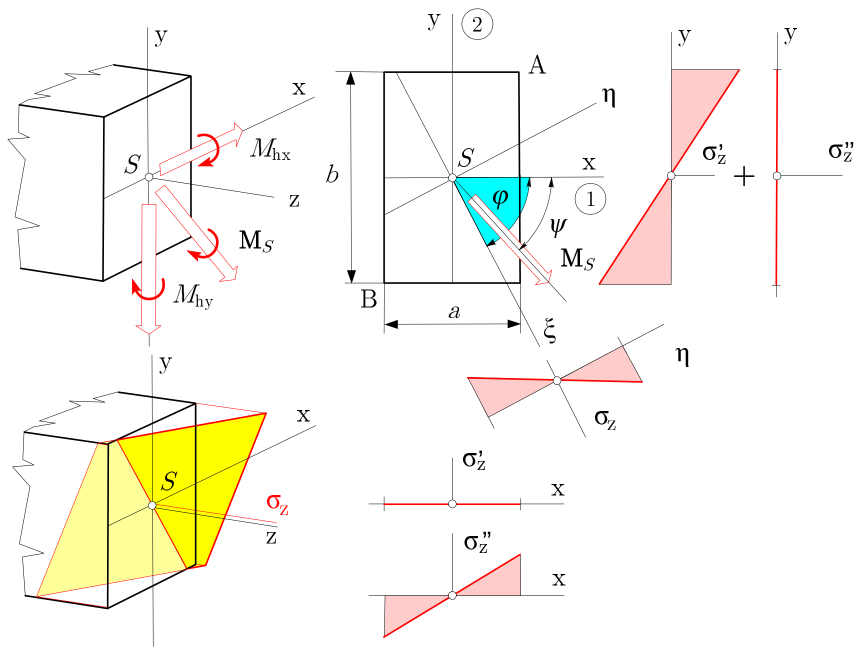
8.3. Ferde hajlítás

Az 5.3.1. szakaszban rámutattunk, hogy ferde hajlítás esete forog fenn, ha a rúd keresztmetszetén ébredő belső erőrendszer súlypontra számított $\mathbf{M}_S$ nyomatéka nem párhuzamos a keresztmetszet valamelyik főtengelyével. Az 5.3.5. szakasz megadja a feszültségek számításának képleteit is. Ha egybeesik a keresztmetszet súlypontjához kötöttnek gondolt x és y tengely a keresztmetszet 1 és 2 jelű főtengelyével, akkor az (5.81) összefüggéssel számítható ferde hajlítás esetén a σ_z a normálfeszültség értéke.

A jelen szakaszban a szuperpozíció elvét alkalmazva tekintjük át a ferde hajlítás esetét. Tegyük fel ismét, hogy a keresztmetszet súlypontjához kötöttnek gondolt x és y tengely egybeesik a keresztmetszet 1 és 2 jelű (vagy 2 és 1 jelű) főtengelyével. Jelölje összhangban az eddigiekkel σ_z' az x tengely, σ_z'' pedig az y tengely körüli egyenes hajlításból adódó normálfeszültséget. Nyilvánvaló, hogy a teljes normálfeszültség a kettő összege:

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' \tag{8.6}$$

Téglalapalakú keresztmetszet esetére a 8.3. ábra mutatja a viszonyokat. Feltünteti axonometrikus ábrázolásban a rúd kiragadott keresztmetsztét és a keresztmetszet súlypontjához kötötten szemlélteti a keresztmetszeten ébredő belső ER $\mathbf{M}_S$ nyomatékát a súlypontra. Feltünteti emellett



8.3. ábra.

a nyomatékvektor $\mathbf{M}_S = M_x\mathbf{e}_x + M_y\mathbf{e}_y = M_{hx}\mathbf{e}_x - M_{hy}\mathbf{e}_y$ felbontását is (pozitívnak tekintve az M_{hx} és M_{hy} hajlítónyomatékokat). Ha visszaidézzük, hogy az x tengely körüli egyenes hajlítás esetén az $(5.15)_2$ képlet szerint számítjuk a normálfeszültséget, majd értelemszerű betűcserékkel alkalmazzuk a képletet az y tengely körüli egyenes hajlításra (M_{hx} helyett M_{hy}-t, y helyett x-et, I_y helyett I_x-et kell írni), vagy ami ugyanaz a σ_z'' normálfeszültség számítására, akkor a (8.6) összefüggésből a korábbiakkal egyező

$$\boxed{\sigma_z = \underbrace{\frac{M_{hx}}{I_x}y}_{\sigma_z'} + \underbrace{\frac{M_{hy}}{I_y}x}_{\sigma_z''}} \tag{8.7}$$

képlet adódik a normálfeszültség számítására a keresztmetszeten. A fenti képletre vezető gondolatmenetben csak az játszott szerepet, hogy egyenes hajlításokat szuperponálunk: mindegy tehát, hogy az x és y tengelyek az 1 és 2 jelű, vagypedig a 2 és 1 jelű főtengelyekkel esnek egybe.

A teljesség kedvéért felírjuk a feszültségi tenzor mátrixát is:

$$\underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{M_{hx}}{I_x}y + \frac{M_{hy}}{I_y}x \end{bmatrix}. \tag{8.8}$$

A 8.3. ábra külön KR-ekben szemlélteti a σ_z', σ_z'' normálfeszültségek eloszlását az x és y tengelyek mentén, valamint axonometrikusan is ábrázolja a σ_z feszültségek megoszlását a keresztmetszet felett. Nyilvánvaló a (8.7) képletből, hogy síkfelület a $\sigma_z(x, y)$ felület – az ábra ezzel természetesen összhangban van.

A

$$\boxed{\sigma_z = 0 = \frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x} \tag{8.9}$$

egyenlet a keresztmetszet semleges tengelyének a zérusvonalnak az egyenlete. Ezt az egyenest, amely most a súlyponton is áthalad, ξ jelöli az ábrán. Az ábra feltünteti a zérusvonalra a súlypontban merőleges η tengely mentén ébredő feszültségek eloszlását is. Ezt ismét külön KR-ben rajzoltuk meg.

Felhasználva az ábra jelöléseit a

$$\tan\varphi = \frac{I_x}{I_y} \left| \frac{M_{hy}}{M_{hx}} \right| = \frac{I_x}{I_y} \tan\Psi = \frac{I_1}{I_2} \tan\Psi \tag{8.10}$$

alakban kapjuk a zérusvonal $\tan\varphi$ meredekségét. A φ és Ψ szögeket az x tengelytől mérjük. Mindkét szög ugyanabba a síknegyedbe esik.

Kiolvasható a fenti képletből, hogy általában különbözik a semleges tengely és az $\mathbf{M}_S$ hajlítónyomaték vektor meredeksége. Egybeesés csak akkor lehetséges, ha megegyezik a két főtehetetlenségi nyomaték, azaz ha $I_1 = I_2$. Ez esetben azonban bármely súlyponti tengelyre ugyanolyan értékű a tehetetlenségi nyomaték: minden tengely tehetetlenségi főtengely. Következésképp a hajlítás nem ferde, hanem egyenes. (Pl. körkeresztmetszetű vagy négyzetkeresztmetszetű rúd esetén.)

A normálfeszültségek $\sigma_{\max} = \max|\sigma_z|$ maximuma a zérus tengelytől legtávolabb fekvő pontokban ébred – az ábrán vázolt esetben az A és B pontokban. Ezek, valamint a megengedett feszültség(ek) ismeretében történhet meg a rúd méretezése, ellenőrzése. Megjegyezzük, hogy külön figyelmet igényel az az eset, amikor a rúd anyaga nem egyformán viselkedik húzásra, illetve nyomásra.

Mivel most is egytengelyű a feszültségi állapot érvényes az egyszerű Hooke törvény. Ez azt jelenti, hogy az

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\sigma_z = \frac{1}{E}\left(\frac{M_{hx}}{I_x} y + \frac{M_{hy}}{I_y} x \right) \tag{8.11}$$

fajlagos nyúlás ismeretében az alakváltozási tenzor elemei és mátrixa a Húzás (vagy nyomás) és egyenes hajlítás című szakaszban közölt (8.4) és $(8.5)_1$ képletekből számíthatók.

8.4. Zömök rúd excentrikus húzása (nyomása).

8.4.1. Igénybevételek és feszültségek. A vizsgálat tárgyát képező téglalapkeresztmetszetű rövid prizmatikus rudat a 8.4. ábra szemlélteti. Előre bocsátjuk, hogy a keresztmetszet alakja nem befolyásolja majd a feszültségeket adó képlet szerkezetét. A rudat a rúd z súlyponti tengelyével párhuzamos $\mathbf{F} = F_z\mathbf{e}_z$ és $-\mathbf{F}$ erők terhelik. Ezek közös hatásvonala az xy sík A pontján halad keresztül. Ennek koordinátáit rendre ξ és η jelöli. Előírjuk, hogy a koordináták közül legalább egy nem zérus (ellenkező esetben ui. zérus lenne az erő hatásvonalának excentricitása). Azt is kikötjük, hogy az x és y koordináta tengelyek a tekintett K keresztmetszet tehetetlenségi főtengelyei.

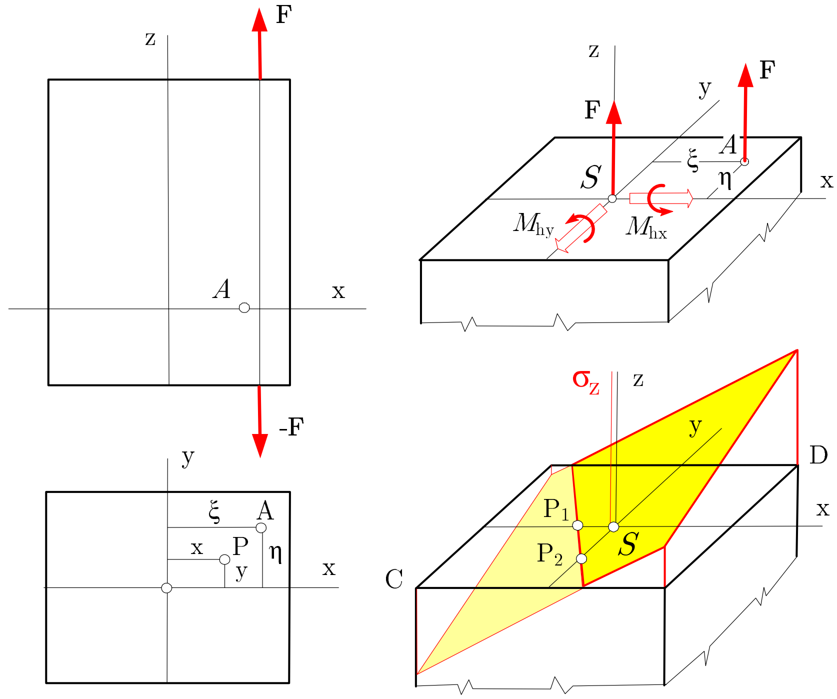
Ha elhagyjuk gondolatban a rúd K keresztmetszet feletti részét, és a K keresztmetszet S súlypontjába redukáljuk az elhagyott részen működő $\mathbf{F}$ erőt, akkor az találjuk, hogy

$$\mathbf{F}_S = F_z\mathbf{e}_z = N\mathbf{e}_z$$

az eredő, és

$$\mathbf{M}_S = M_{hx}\mathbf{e}_x - M_{hy}\mathbf{e}_y = \eta F_z\mathbf{e}_x - \xi F_z\mathbf{e}_y$$

az eredő nyomaték értéke. A redukció eredményét a jobboldali felső ábrarészlet szemlélteti. Vegyük észre, hogy a kapott eredmény független a K keresztmetszet helyétől: a rúd bármely K keresztmetszetét tekintve ugyanez lenne az eredő és az eredő nyomaték. Kiolvasható a fenti képletekből hogy a rúd igénybevételeit az N rúderő, valamint az M_{hx} és M_{hy} hajlítónyomatékok



8.4. ábra.

alkotják. Ez azt jelenti, hogy a P pont feszültségi állapota az N rúderőhöz, valamint az M_{hx} és M_{hy} hajlítónyomatékokhoz tartozó feszültségi állapotok szuperpozíciója. Mivel a felsorolt igénybevételek mindegyikéhez csak z irányú normálfeszültség tartozik következik, hogy ennek

$$\sigma_z = \sigma_z' + \sigma_z'' + \sigma_z''' \tag{8.12}$$

az értéke, ahol σ_z' az $F_z = N$ rúderőhöz, σ_z'' az M_{hx} hajlítónyomatékhoz, σ_z''' pedig az M_{hy} hajlítónyomatékhoz tartozó normálfeszültség.

Ezek értéke a (3.15) és a ferde hajlítással kapcsolatos (8.7) képlet alapján – az utóbbi esetben az ottani σ_z' és σ_z'' az itteni σ_z'' és σ_z'''-nak felel meg – írható fel:

$$\sigma_z' = \frac{N}{A}\,, \qquad \sigma_z'' = \frac{M_{hx}}{I_x}y\,, \qquad \sigma_z''' = \frac{M_{hy}}{I_y}x\,.$$

A fenti összefüggések felhasználásával a (8.11) összegből

$$\boxed{\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{I_x}y + \frac{M_{hy}}{I_y}x\,.} \tag{8.13}$$

a normálfeszültség képlete.

Tovább alakítható a (8.13) összefüggés, ha helyettesítjük az $M_{hx} = F\eta$ és $M_{hy} = F\xi$ értékeket és kiemeljük a képletből az F/A törtet:

$$\sigma_z = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{\eta y}{I_x}A + \frac{\xi x}{I_y}A\right)\,.$$

Vezessük be a keresztmetszet geometriájától függő

$$\boxed{i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad \text{és} \qquad i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}} \tag{8.14}$$

ún. *inerciasugarakat.* Ezek felhasználásával a

$$\sigma_z = \frac{F}{A}\left(1 + \frac{\eta y}{i_x^2} + \frac{\xi x}{i_y^2}\right)\,. \tag{8.15}$$

alakban írható fel a normálfeszültség képlete.

Nyilvánvaló a fenti képletek alapján, hogy lineárisan oszlik meg a σ_z normálfeszültség a keresztmetszet felett. A zérusvonal egyenletét úgy kapjuk meg, hogy zérust gondolunk a (8.15) képletben σ_z helyére:

$$\boxed{0 = 1 + \frac{\eta y}{i_x^2} + \frac{\xi x}{i_y^2}\,.} \tag{8.16}$$

Kiolvasható a fenti képletből, hogy (a) a zérusvonal helye csak az alkalmazott erő támadáspontjának ξ és η koordinátáitól függ (ez azt jelenti, hogy független a zérusvonal elhelyezkedése az erő nagyságától), (b) a zérusvonal nem megy át a keresztmetszet S súlypontján (a súlypontban a (8.15) képlet szerint F/A nagyságú feszültség ébred).

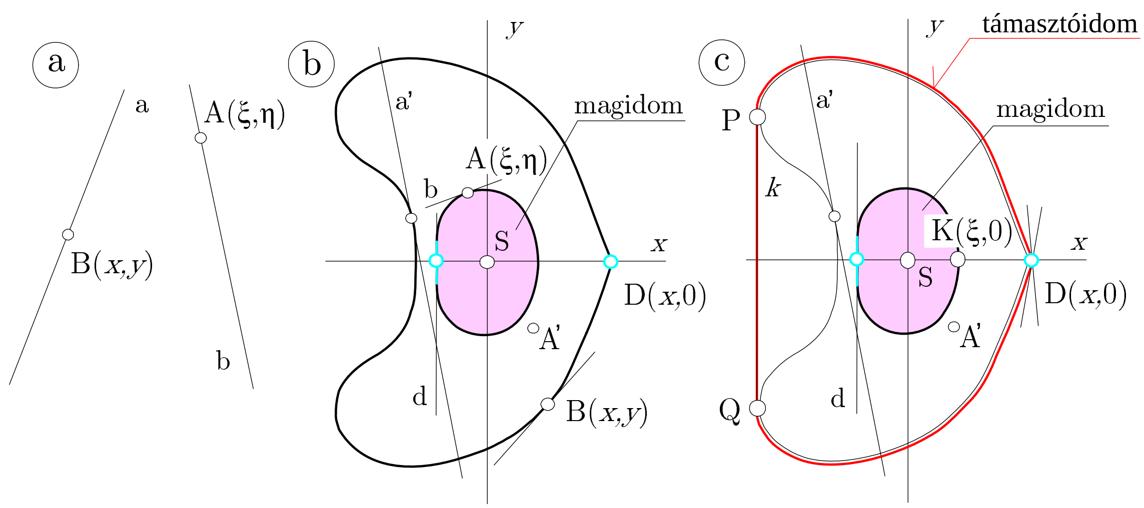
A 8.4. ábra jobboldali alulsó része a keresztmetszet felett szemlélteti a σ_z normálfeszültségeket. A zérusvonal a $P_1(x_1, y_1 = 0)$ és $P_2(x_2 = 0, y_2)$ pontokban metszi az x és y koordinátatengelyeket. Mivel zérus a P_1 pont y_1 és ugyanígy zérus a P_2 pont x_2 koordinátája következik a (8.16) egyenletből, hogy

$$x_1 = -\frac{i_y^2}{\xi} \qquad \text{és} \qquad y_2 = -\frac{i_x^2}{\eta}\,. \tag{8.17}$$

a nem zérus koordináták értéke. A fenti képletek szerint távolodik a zérusvonal az S súlyponttól, ha közeledik az $\mathbf{F}$ erő $A(\xi, \eta)$ támadáspontja (ha csökken a ξ, illetve η) a súlyponthoz.

Nyilvánvaló, hogy a legnagyobb (legkisebb) normálfeszültség a zérusvonaltól legtávolabb fekvő pontokban ébred. A jelen esetben ez a C és D pont. A méretezés és/vagy ellenőrzés során ezeket az értékeket kell összehasonlítani a vonatkozó megengedett feszültségekkel.

8.4.2. A keresztmetszet belső magidomja. A támasztóidom. Amint arra fentebb rámutattunk távolodik a zérusvonal a keresztmetszet S súlypontjától, ha közeledik az excentrikus húzó-, vagy nyomóerő A támadáspontja az S súlyponthoz. Ha elegendően közel van az A pont az S súlyponthoz, akkor az is előfordulhat, hogy a zérusvonal nem metsz bele a keresztmetszetbe (egybeesik a keresztmetszet peremének egy részét alkotó egyenesszakasszal, egy pontban érinti a keresztmetszetet, teljesen egészében kívül fekszik a keresztmetszeten[1]). Ebben az esetben azonos előjelű, azaz húzó-, vagy nyomó feszültségek ébrednek a a keresztmetszeten. Ha van(nak) közös pontja(i) a keresztmetszet peremének és a zérusvonalnak – visszautalunk itt a zérusvonal helyzetét illetően az előbbi zárójeles felsorolás első két lehetőségére –, akkor a feszültség zérus is lehet, ha pedig a zérusvonal teljes egészében a keresztmetszeten kívül van, akkor sehol sem tűnik el a feszültség.



8.5. ábra.

[1]Ha csak az említett három eset fordulhat elő, akkor konvex a keresztmetszet. Ez egyelőre feltevés, pontosabb magyarázatot a következő oldalon adunk.

Annak, hogy egynemű (húzó-, vagy nyomó) feszültségek ébrednek excentrikus húzás és nyomás esetén elsősorban akkor van jelentősége, ha a tekintett szerkezeti elem (rúd) anyaga nem viselkedik egyformán húzásra és nyomásra. Egyes szerkezeti anyagoknak, ilyen például a beton, vagypedig a kő, rendkívül kicsi a húzással szembeni ellenállásuk. Az ezekből készült pillérek, tartóoszlopok esetén nem engedhető tehát meg, hogy az excentrikus nyomás hatására húzófeszültségek alakuljanak ki a keresztmetszet felett. Ez csak úgy biztosítható, hogy a terhelő nyomóerő támadáspontja elegendő közel van a keresztmetszet súlypontjához. A kérdés ezek után az, hogy milyen közel.

A keresztmetszet adott pontjához tartozó zérusvonal alatt az adott pontban működő excentrikus erő által létrehozott feszültségeloszlás zérusvonalát értjük. A keresztmetszet azon résztartományát, amelynek pontjaihoz a keresztmetszetet nem metsző zérusvonal tartozik *belső magidomnak* nevezzük. A belső magidom meghatározásához vizsgáljuk meg a zérusvonal és az erő támadáspontja közötti összefüggést jelentő (8.16) egyenlet tulajdonságait.

Tegyük fel, hogy a keresztmetszet $A(\xi,\eta)$ pontjához tartozó a zérusvonal átmegy a keresztmetszet síkjának $B(x,y)$ pontján – lásd a 8.5.(a) ábrarészletet. Könnyű belátni, hogy a $B(x,y)$ ponthoz tartozó b zérusvonal pedig a keresztmetszet A pontján (a b zérusvonalat létrehozó erő támadáspontján) halad át. Az állítás belátásához vegyük figyelembe, hogy a ξ és x, valamint a η és y koordinátatengelyeket egymással egybeesőknek kell venni, majd tekintsük az a és b zérusvonalak

$$0=1+\frac{\eta_A y}{i_x^2}+\frac{\xi_A x}{i_y^2} \qquad \text{és} \qquad 0=1+\frac{\eta y_B}{i_x^2}+\frac{\xi x_B}{i_y^2}$$

egyenleteit, ahol a második egyenlet írásánál értelemszerűen felcseréltük a betűk jelentését (az erő támadáspontja latin betűvel, a futópont koordinátái pedig görög betűvel vannak jelölve). Ezt a cserét a zérusvonal egyenletének az ξ és x, valamint az η és y változókban megfigyelhető szimmetriája teszi lehetővé. Mivel az a egyenes feltevés szerint átmegy a B ponton fennáll, hogy

$$0=1+\frac{\eta_A y_B}{i_x^2}+\frac{\xi_A x_B}{i_y^2}$$

Ez az egyenlet azonban egybeesik a b egyenes egyenletével, ha abban ξ és η helyére rendre ξ_A-t és η_A-t írunk. Röviden: az A pont koordinátái kielégítik a b egyenes egyenes egyenletét, az tehát valóban átmegy az A ponton.

A fentiek alapján maga a magidom, elvben úgy határozható meg, hogy a keresztmetszet peremének valamennyi $B(x,y)$ pontjához megrajzoljuk a

$$0=1+\frac{\eta y_B}{i_x^2}+\frac{\xi x_B}{i_y^2}$$

egyenletű b zérusvonalat majd megszerkesztjük az így kapott egyenessereg közös burkolóját. Ez a magidom peremgörbéje. Megjegyezzük, hogy a 8.5.(b) ábra egy esetben szemlélteti a B pontot és a hozzá tartozó b egyenest. Az ismertetett eljárás hallgatólagosan feltételezi, hogy a keresztmetszet peremének pontjaihoz tartozó érintőknek mint zérusvonalaknak nincs közös pontjuk a keresztmetszet belsejével. Ez a feltevés azonban csak akkor igaz, ha konvex[2] síkidom a rúd keresztmetszete. Konkáv síkidom[3] esetén (ilyen a 8.5.(b) ábrán szemléltetett síkidom) vannak olyan érintői a peremgörbének (ilyen a 8.5.(b) ábrán az a' érintő), amely nem fekszik a síkidomon kívül.

A felvetett probléma a következőképpen oldható fel. Feszítsünk ki gondolatban egy fonalat a konkáv síkidom körül. Ez a fonál olyan konvex síkidom peremgörbéje, amelynek résztartománya az eredeti síkidom. A fonál által kifeszített síkidomot *támasztóidomnak* nevezzük és a továbbiakban a konvex támasztóidom magidomját tekintjük az eredeti konkáv síkidom estén magidomnak.

[2]Konvexnek nevezzünk valamely síkidomot, ha a peremgörbe bármely két különböző pontját összekötő egyenesszakasz (a peremgörbe minden húrja) vagy teljes egészében a síkidomon belül fekszik, vagypedig része a peremgörbének, azaz nincs pontja a síkidomon kívül.

[3]Konkávnak nevezzük a síkidomot, ha van olyan húrja a peremgörbének, amely a síkidomon kívül fekszik.

A 8.5.(c) ábra feltünteti a (b) ábrarészlet konkáv síkidomát (a peremgörbe vékony fekete vonallal van megrajzolva), valamint az azt körülölelő támasztóidomot (az utóbbi piros színnel van ábrázolva), illetve magát a magidomot is.

Érdemes még az alábbiakra külön is felhívni a figyelmet:

i. Ha a zérusvonal párhuzamos valamelyik koordináta tengellyel, akkor annak vagy

$$0=1+\frac{\eta y}{i_x^2} \qquad (x \text{ tengellyel párhuzamos zérusvonal})$$

vagypedig

$$0=1+\frac{\xi x}{i_y^2} \qquad (y \text{ tengellyel párhuzamos zérusvonal})$$

az egyenlete. A fenti képletekből azonnal megkapjuk a zérusvonalat létrehozó erő támadáspontjának koordinátáit:

$$\xi=0\,,\quad \eta=-\frac{i_x^2}{y}\,; \qquad (x \text{ tengellyel párhuzamos zérusvonal}), \tag{8.18a}$$

illetve

$$\xi=-\frac{i_y^2}{x}\,,\quad \eta=0\,; \qquad (y \text{ tengellyel párhuzamos zérusvonal}). \tag{8.18b}$$

A (8.18a,b) képleteknek akkor van szerepük, ha a támasztóidom peremének egy része valamelyik koordinátatengellyel párhuzamos egyenesszakasz (ilyen a 8.5.(c) ábra k jelű PQ szakasza), mivel a magidom vonatkozó pontját (az erő magidom peremére eső támadáspontját) ki tudjuk a segítségükkel számítani (ilyen pont a 8.5.(c) ábra $K(\xi,0)$ jelű pontja).

ii. Ha a támasztóidom peremének egy szakasza olyan egyenesszakasz, amely nem párhuzamos valamelyik koordinátatengellyel, akkor az egyenesszakasz koordinátatengelyekkel való $P_1(x_1, y_1=0)$ és $P_2(x_2=0, y_2)$ metszéspontjainak ismeretében a (8.17) képletek felhasználásával számítható a magidom vonatkozó pontja:

$$\xi=-\frac{i_y^2}{x_1} \qquad \text{és} \qquad \eta=-\frac{i_x^2}{y_2}\,. \tag{8.19}$$

iii. Gyakran fordul elő, hogy a támasztóidom peremén töréspont található (ilyen pont a 8.5.(c) ábra $D(x, y=0)$ jelű pontja). A magidom vonatkozó részét ez esetben a $D(x,y)$ törésponthoz tartózó és

$$0=1+\frac{\eta y_D}{i_x^2}+\frac{\xi x_D}{i_y^2} \tag{8.20}$$

egyenletű egyenes egy szakasza adja (a 8.5.(c) ábra esetében $\xi=-i_y^2/x_D=$ állandó a vonatkozó d jelű egyenesszakasz egyenlete), mivel a fenti egyenesre illeszkedő valamely ξ és η pontpárhoz mindig a

$$0=1+\frac{\eta y}{i_x^2}+\frac{\xi x}{i_y^2}$$

zérusvonal tartozik (hangsúlyozzuk, hogy ez esetben ξ és η a fentieknek megfelelően rögzített, a futópont koordinátáit pedig x és y adja), amely nyilvánvalóan átmegy a D ponton – gondoljunk x_D-t és y_D-t az x és y helyére majd vessük össze az eredményt a (8.20) képlettel .

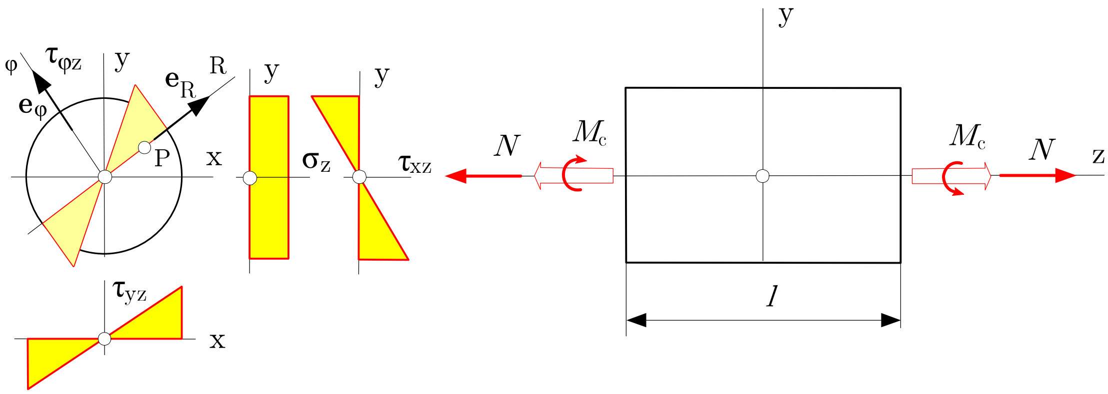
A fentiek segítségével a legtöbb esetben meg tudjuk határozni a magidomot.

8.5. Húzás (nyomás) és csavarás.

A jelen szakaszban kör-, vagy körgyűrű keresztmetszetű rudakat vizsgálunk. A rúd igénybevétele húzás (vagy nyomás) és csavarás lehet. Ha nyomóerő a tengelyirányú erő, akkor hallgatólagosan feltételezzük, hogy zömök a rúd. Jelölje $\boldsymbol{T}'$ a húzás (vagy nyomás) és $\boldsymbol{T}''$ a csavarás hatására kialakuló feszültségi tenzort. Nyilvánvaló, hogy

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}' + \boldsymbol{T}''$$

a húzás (vagy nyomás) és csavarás, mint összetett igénybevétel feszültségi tenzora.



8.6. ábra.

A viszonyokat szemléltető 8.6. ábra feltünteti (a) a rúd egy rövid l hosszúságú szakaszát, (b) a tekintett rúdszakasz egy kiragadott keresztmetszetét, (c) az N rúderő hatására kialakuló normálfeszültségek eloszlását az y tengely mentén, valamint (d) a nyírófeszültségek eloszlását az $(R\varphi z)$ HKR-ben magán a keresztmetszeten, illetve az x és y koordinátatengelyek mentén (az utóbbi két esetben külön KR-ben).

A szuperpozíció elvnek megfelelően

$$\underline{\mathbf{T}} = \underline{\mathbf{T}}' + \underline{\mathbf{T}}'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{\varphi z} \\ 0 & \tau_{z\varphi} & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{8.21a}$$

a feszültségi tenzor mátrixa HKR-ben, ahol a (3.15) és (4.45) összefüggések szerint

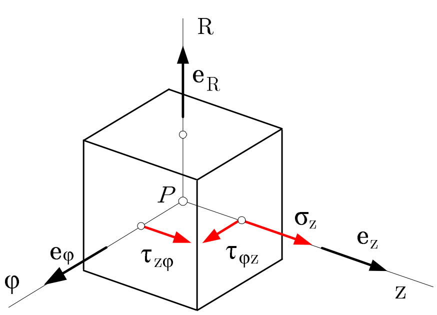
$$\sigma_z = \frac{N}{A} \qquad \text{és} \qquad \tau_{\varphi z} = \tau_{z\varphi} = \frac{M_c}{I_p} R \tag{8.21b}$$

a húzásból (nyomásból) adódó normálfeszültség és a csavarásból adódó nyírófeszültség.

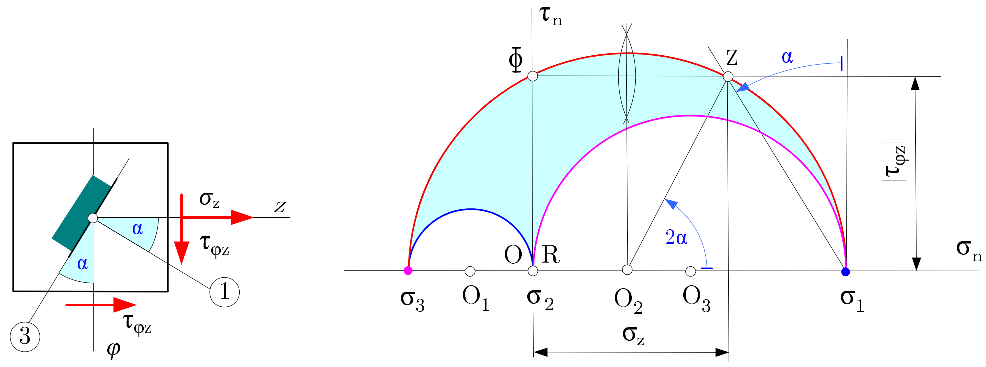
Mivel nem zérus értékű a $\tau_{\varphi z}$ nyírófeszültség következik, hogy húzás (nyomás) és csavarás esetén a 8.2., 8.3. és 8.4. szakaszokban áttekintett összetett igénybevételektől eltérően (ezekben az esetekben mindig egytengelyű volt a rúd feszültségi állapota) most többtengelyű a feszültségi állapot. Vegyük azt is észre, hogy a $\underline{\mathbf{T}}$ első oszlopának zérusok az elemei. Ez azt jelenti, hogy zérus értékű a $\boldsymbol{\rho}_R$ feszültségvektor, azaz feszültségi főirány az R irány. Ennek megfelelően

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{\rho}_\varphi \circ \mathbf{e}_\varphi + \boldsymbol{\rho}_z \circ \mathbf{e}_z = \tau_{z\varphi} \mathbf{e}_z \circ \mathbf{e}_\varphi + (\tau_{\varphi z} \mathbf{e}_\varphi + \sigma_z \mathbf{e}_z) \circ \mathbf{e}_z$$

a feszültségi tenzor diadikus alakja. Magát a feszültségi állapotot a 8.7. ábra szemlélteti.



8.7. ábra.



8.8. ábra.

A másik két főirány meghatározása érdekében a 6.2.4. szakasz lépéseit követve megszerkesztettük a fenti 8.8. ábra középső és jobboldali felén a teljes Mohr-féle feszültségi kördiagramot: (a) megrajzoltuk a $\boldsymbol{\rho}_R$, $\boldsymbol{\rho}_{\boldsymbol{\varphi}}$ és $\boldsymbol{\rho}_z$ feszültségvektorok $R(0{,}0)$, $\Phi(0,|\tau_{z\varphi}|)$ és $Z(\sigma_z,|\tau_{\varphi z}|)$ képeit, (b) megszerkesztettük a $\Phi(0,|\tau_{z\varphi}|)$ és $Z(\sigma_z,|\tau_{\varphi z}|)$ pontokat összekötő egyenesszakasz felező merőlegesét, amely kimetszi a σ_n tengelyen az O_2 körközéppontot – a vonatkozó főkörnek O_2Z a sugara, (c) megrajzoltuk a σ_n tengelyt a $[\sigma_1{,}0]$ és $[\sigma_3{,}0]$ pontokban metsző főkört és végül (d) megszerkesztettük a $[\sigma_3{,}0]$, $R(0{,}0)$ illetve $R(0{,}0)$ $[\sigma_1{,}0]$ átmérők fölé a még hiányzó O_1 és O_3 középpontú főköröket. Nyilvánvaló, hogy a még nem ismert másik két főirány az $\mathbf{e}_R$-re merőleges φ és z irányok által kifeszített síkban fekszik. A Mohr-féle feszültségi kördiagramon feltüntettük, összhangban a szerkesztés lépéseit bemutató és fentebb idézett szakasz 6. pontjával (167. o.), az 1 jelű főirány szerkesztését: a jelen esetben az 1 jelű főirány és a z irány által bezárt α szög a szerkesztés első lépésében megrajzolt főkör $[\sigma_1{,}0]$ $[\sigma_z,|\tau_{\varphi z}|]$ ívén nyugvó ($[\sigma_1{,}0]$ kezdőpontú kerületi szög)[középponti szög fele]. A 8.8. ábra baloldali része az R irány felől nézve szemlélteti az elemi kockát: az 1 jelű főirányt adó α szöget $\tau_{\varphi z}$ irányába mértük fel. A főfeszültségeket, az ábrán a vonatkozó megállapodással összhangban nagyság szerint rendezettnek tekintettük ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$).

Húzásból homogén feszültségeloszlás ébred a keresztmetszeten csavarás esetén pedig a kerületi pontok a veszélyesek. Ez azt jelenti, hogy húzás (nyomás) és csavarás esetén is a kerületi pontokban maximális a redukált feszültség értéke. Itt kell tehát fennállnia a $(8.21\text{b})_1$, a (4.46) és (4.47), a (7.2), valamint a (7.8) összefüggések egybevetése alapján írható

$$\sigma_{\text{red max}\ {\text{HMH} \atop \text{Mohr}}} = \sqrt{\sigma_z^2+\beta\tau_{\max}^2} = \sqrt{\left(\frac{N}{A}\right)^2+\beta\left(\frac{M_c}{K_p}\right)^2} \leq \sigma_{\text{meg}}\,, \quad \beta = \begin{cases} 3 & \text{HMH} \\ 4 & \text{Mohr} \end{cases} \tag{8.22}$$

egyenlőtlenségnek. A fenti képlet könnyen alkalmazható, ha ellenőrzés esete forog fenn. Mértezés esetén harmadfokú egyenlet adódik a keresett átmérőre, amelyet vagy a megoldó képlettel, vagy többszöri próbálkozással határozhatunk meg.

Az alakváltozási tenzor mátrixára nézve (a) HKR-ben tekintve a (6.31b) alapján az általános Hooke törvényt, (b) kihasználva az anyagállandók közötti a (4.27) összefüggést, valamint (c) figyelembe véve, hogy a jelen esetben csak a σ_z és $\tau_{\varphi z}=\tau_{Z\varphi}$ feszültségek különböznek zérustól (ezek értékei a (8.21b) képletekből adódnak) az alábbi eredményt kapjuk:

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_R & \frac{1}{2}\gamma_{R\varphi} & \frac{1}{2}\gamma_{Rz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{\varphi R} & \varepsilon_\varphi & \frac{1}{2}\gamma_{\varphi z} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zR} & \frac{1}{2}\gamma_{z\varphi} & \varepsilon_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2G}\begin{bmatrix} \sigma_R-\frac{\nu T_I}{1+\nu} & \tau_{R\varphi} & \tau_{Rz} \\ \tau_{\varphi R} & \sigma_\varphi-\frac{\nu T_I}{1+\nu} & \tau_{\varphi z} \\ \tau_{zR} & \tau_{z\varphi} & \sigma_z-\frac{\nu T_I}{1+\nu} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\nu\frac{\sigma_z}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu\frac{\sigma_z}{E} & \frac{\tau_{\varphi z}}{2G} \\ 0 & \frac{\tau_{z\varphi}}{2G} & \frac{\sigma_z}{E} \end{bmatrix}. \tag{8.23}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\varepsilon_R = \varepsilon_\varphi = -\nu \frac{\sigma_z}{E} = -\nu \frac{N}{AE}\,, \quad \varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{AE} \tag{8.24a}$$

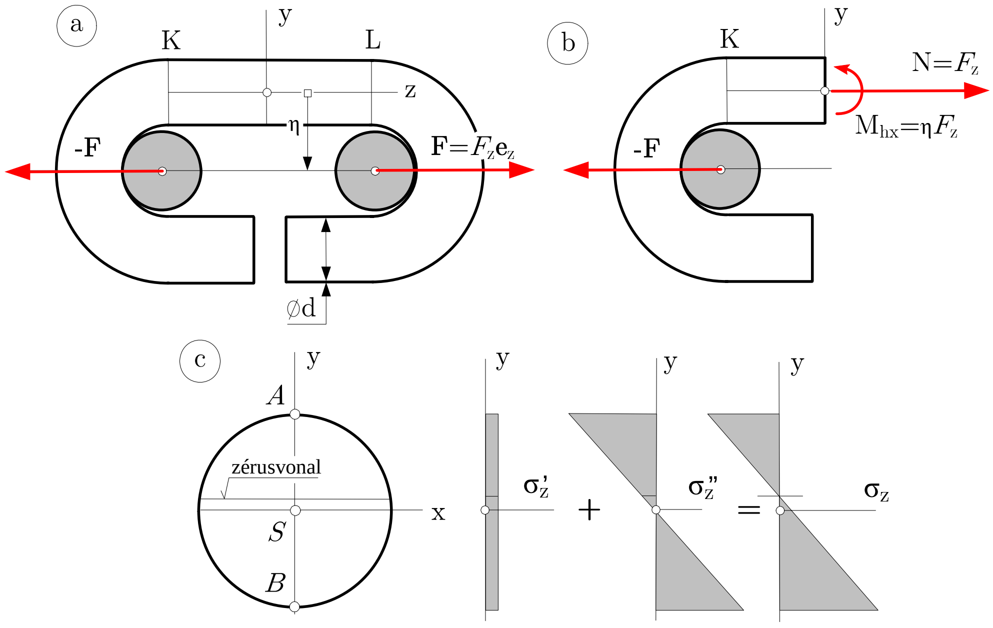
a fajlagos nyúlások és

$$\gamma_{z\varphi} = \gamma_{\varphi z} = \frac{\tau_{z\varphi}}{G} = \frac{\tau_{\varphi z}}{G} = \frac{M_c}{I_p G} R\,, \quad \gamma_{R\varphi} = \gamma_{\varphi R} = \gamma_{Rz} = \gamma_{zR} = 0 \tag{8.24b}$$

a fajlagos szögváltozások értéke.

8.6. Mintafeladatok

8.1. A 8.9.a. ábrarészlet nyitott láncszemű acéllánc egy láncszemét ábrázolja. A láncszem körkeresztmetszetű acélhuzalból készült, maga a lánc $F_z = 500$ N nagyságú terhet hordoz, $d = 8$ mm, $\eta = -10$ mm. Határozza meg a legnagyobb húzó-, és nyomófeszültséget a láncszem egyenes KL szakaszán belül, valamint a zérusvonal egyenletét.



8.9. ábra.

A 8.9.b. ábrarészlet a fél láncszemet szemlélteti. Kihasználva a feladat adatait is leolvasható erről az ábrarészletről hogy a kérdéses KL szakaszon $N = F_z = 500$ N a ruderő, és $M_{hx} = \eta F_z = -10 \times 500 = -5000$ Nmm a hajlítónyomaték. A (8.1) és (5.35) képletek alapján

$$\sigma_z = \frac{N}{A} \pm \frac{M_{hx}}{I_x}\frac{d}{2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_{hx}}{K_x} \tag{8.25}$$

a legkisebb és legnagyobb normálfeszültség. Figyelembe véve, hogy most

$$A = \frac{d^2\pi}{4} = \frac{8^2\pi}{4} = 50.2655 \text{ mm}^2\,, \quad I_x = \frac{d^4\pi}{64} = \frac{8^4\pi}{64} = 201.062 \text{ mm}^4$$

$$K_x = \frac{d^3\pi}{32} = \frac{8^3\pi}{32} = 50.2655 \text{ mm}^3$$

a (8.25) képletből azonnal kapjuk, hogy

$$\sigma_{\text{max húzás}} = |\sigma_z(B)| = \left|\frac{N}{A} - \frac{M_{hx}}{K_x}\right| = \left|\frac{500}{50.2655} + \frac{5000}{50.2655}\right| = 9.947 + 99.478 \simeq 109.4 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{\text{max nyomás}} = |\sigma_z(A)| = \left|\frac{N}{A} + \frac{M_{hx}}{K_x}\right| = \left|\frac{500}{50.2655} - \frac{5000}{50.2655}\right| = 99.478 - 9.947 \simeq 89.5 \text{ N/mm}^2$$

a legnagyobb húzó-, és nyomófeszültség értéke. A zérusvonal egyenlete a (8.1) összefüggés és a fentiek alapján

$$0 = \frac{F_x}{A} + \frac{\eta F_x}{I_x} y$$

alakú. A konkrét értékekkel:

$$y = -\frac{I_x}{\eta A} = \frac{201.062}{10 \times 50.2655} = 0.4 \text{ mm} = \text{állandó}\,.$$

Figyeljük meg, hogy a zérusvonal helye független az F_x erő nagyságától.

A 8.9.c. ábrarészlet a szuperpozíció elvét is bemutatva mutatja szemlélteti a feszültségeloszlást az y tengely mentén.

A. FÜGGELÉK

Kulcsok a gyakorlatokhoz

5. fejezet

5.2. (a) $\eta_S = 115$ mm; $I_x = 5.672 \times 10^7$ mm^4;
$\sigma_{\max} \approx 42.3\,\text{MPa}$

$$\underline{\mathbf{T}}_O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -42.3 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$\rho \approx 124.08\,\text{m}$; $\varphi_{xC} = 6.448 \times 10^{-3}\,\text{rad}$

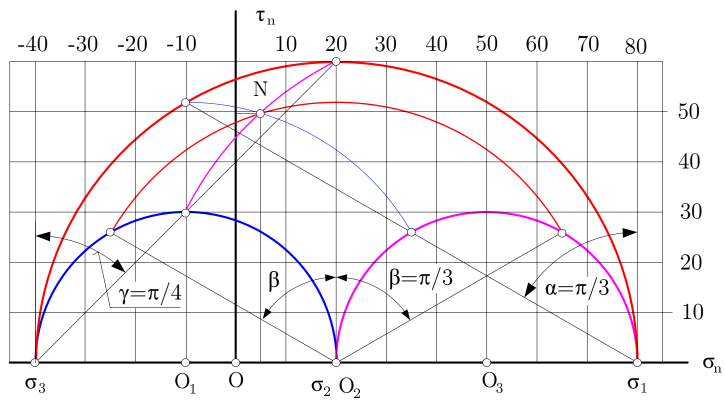
(b) $\eta_S = 100$ mm; $I_x = 3.264 \times 10^7$ mm^4;
$\sigma_{\max} \approx 92\,\text{MPa}$

$$\underline{\mathbf{T}}_O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -92 \end{bmatrix} \text{MPa}$$

$\rho \approx 76.16\,\text{m}$; $\varphi_{xC} = 7.878 \times 10^{-3}\,\text{rad}$

6. fejezet

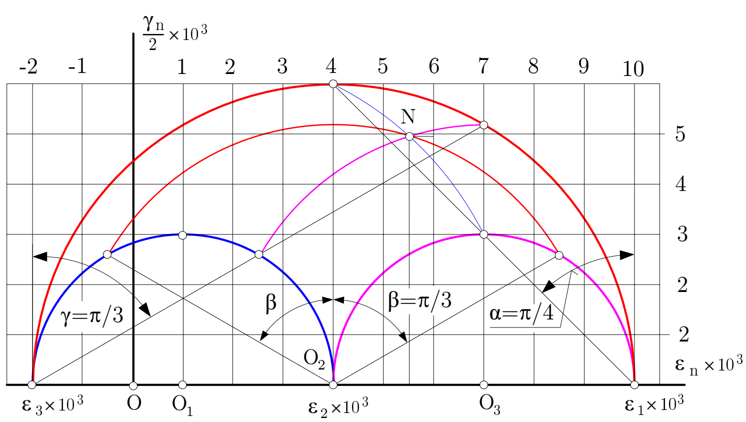
6.1.



1.1. ábra.

Az ábráról: $\sigma_n \approx 5$ MPa, $\tau_n \approx 49$ MPa; számítással: $\sigma_n = 5.0$ MPa, $\tau_n = 48.990$ MPa.

6.5.



1.2. ábra.

Az ábráról: $\varepsilon_n \approx 5.5 \times 10^{-3}$, $\gamma_n/2 \approx 4.9 \times 10^{-3}$; számítással: $\varepsilon_n = 5.5 \times 10^{-3}$, $\gamma_n/2 = 4.899 \times 10^{-3}$.

Irodalomjegyzék

[1] Ferdinand P. Beer and E. Russel Johnston JR. *Mechanics of Materials (Si Mertric Edition)*. McGraw-Hill, 1987.

[2] Csizmadia Béla, Nándori Ernő szerkesztők. *Mechanika Mérnököknek: Szilárdságtan*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1999.

[3] Kurutzné Kovács Márta. *Tartók statikája*. Műegyetemi Könyvkiadó, Budapest, 2003.

[4] Mutnyánszky Ádam. *Szilárdságtan*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[5] Stephen Thimoshenko. *Strength of Materials*. New York, Van Nostrand, 1953.

[6] Király Béla szerkesztésében. *Szilárdságtan I., Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc, Jegyzet*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.

[7] Kozák Imre. *Szilárdságtan V., Nehézipari Műszaki Egyetem, Miskolc, Jegyzet*. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967.