

KONTINUUMMECHANIKA

GYAKORLATI ANYAGOK

Összeállította:

Szeidl György és Baksa Attila

2004.

1. GYAKORLAT

TENSORSZÁMÍTÁS ELEMEI, ISMÉTLÉS

1.1. Tenzorokról röviden

Tenzor fogalma: Homogén lineáris vektor-vektor függvény, illetve az általa leírt leképezés. Skalár függvények esetén mit is jelent a homogén, ill. a lineáris?

$$\begin{array}{ll} y = f(x) & \text{homogén ha} & y(0) = f(0) = 0 \\ y = f(x) & \text{lineáris ha} & y(\lambda x) = f(\lambda x) = \lambda f(x) \end{array}$$

melyet például az $y = ax$ egyváltozós skalár függvény teljesít.

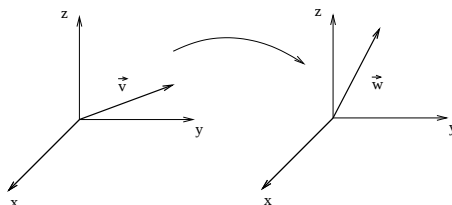
Tekintük a homogén lineáris *vektor-vektor* függvényhez tartozó $\underline{\underline{T}}$ **tenzort**.

$$\vec{v} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z \xrightarrow{\text{hom.lin.}} \vec{w} = w_x \vec{e}_x + w_y \vec{e}_y + w_z \vec{e}_z$$

$$\vec{w} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}$$

ahol

$$\begin{aligned} w_x &= t_{xx}v_x + t_{xy}v_y + t_{xz}v_z \\ w_y &= t_{yx}v_x + t_{yy}v_y + t_{yz}v_z \\ w_z &= t_{zx}v_x + t_{zy}v_y + t_{zz}v_z \end{aligned}$$



1.1. ábra. A $\underline{\underline{T}}$ által végzett leképezés

Tenzor többféle felírási módja:

- *vektorok* segítségével:

$$\begin{aligned} \vec{t}_x &= t_{xx} \vec{e}_x + t_{yx} \vec{e}_y + t_{zx} \vec{e}_z \\ \dots \quad \vec{t}_y \text{ és } \vec{t}_z &\text{ hasonlóan} \\ \vec{w} &= v_x \vec{t}_x + v_y \vec{t}_y + v_z \vec{t}_z \end{aligned}$$

- *mátrixával*

$$[\underline{\underline{T}}] =$$

A tenzor mátrixának ismeretében a

$$\vec{w} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{v}$$

szorzatnak a lenti mátrixszorzat felel meg:

$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

1

melyből

$$w_x = t_{xx}v_x + t_{xy}v_y + t_{xz}v_z$$

A mátrix felírása a kartéziuszi KR egységvektoraihoz tartozó képvektorok ismeretét igényli.

- *diádok* segítségével, amelynek két vektoron értelmezett szorzási művelet $\vec{a} \circ \vec{b} = \underline{\underline{D}}$. Ez a művelet a diádon értelmezett további műveletek révén kap gyakorlati értelmet:

$$\begin{aligned} (\vec{a} \circ \vec{b}) \cdot \vec{c} &= \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ \vec{c} \cdot (\vec{a} \circ \vec{b}) &= \vec{b} (\vec{c} \cdot \vec{a}) \end{aligned}$$

A diádikus szorzatnak a

$$[\underline{\underline{D}}] = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_x & b_y & b_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{bmatrix}$$

mátrixszorzat az analogonja.

A tenzor által létesített leképezés a következő formában is felírható:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{t}_x v_x + \vec{t}_y v_y + \vec{t}_z v_z = \vec{t}_x (\vec{e}_x \cdot \vec{v}) + \vec{t}_y (\vec{e}_y \cdot \vec{v}) + \vec{t}_z (\vec{e}_z \cdot \vec{v}) = \\ &= (\vec{t}_x \circ \vec{e}_x) \cdot \vec{v} + (\vec{t}_y \circ \vec{e}_y) \cdot \vec{v} + (\vec{t}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{v} = (\vec{t}_x \circ \vec{e}_x + \vec{t}_y \circ \vec{e}_y + \vec{t}_z \circ \vec{e}_z) \cdot \vec{v} \\ \underline{\underline{T}} &= \vec{t}_x \circ \vec{e}_x + \vec{t}_y \circ \vec{e}_y + \vec{t}_z \circ \vec{e}_z \end{aligned}$$

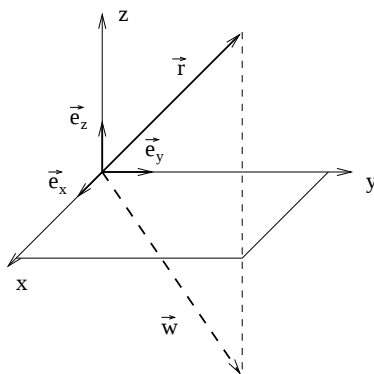
1.2. Feladatok

1.1

Írja fel annak a leképezésnek a mátrixát, amely egy helyvektorhoz

- az (xy) síkra való tükröképét rendeli:

Megoldás:



1.2. ábra. Tükrözés az xy felületre

$$\vec{v} = \vec{r}$$

Tekintsük a három egymásra merőleges bázisvektort, és határozzuk meg ezek képét:

$\vec{v}:$	$\vec{w}:$	
$\vec{e}_x$	$\vec{e}_x$	melyből a leképezést megvalósító tenzor könnyedén felírható:
$\vec{e}_y$	$\vec{e}_y$	
$\vec{e}_z$	$-\vec{e}_z$	

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- az (xz) síkra való tükröképét rendeli: hasonlóan belátható, mint az előző esetben

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- az (yt) síkra való tükröképét rendeli:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1.2

Legyen $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$ az origón átmenő S sík normálisa. Mutassa meg, hogy az $\vec{r}$ radiusvektor S síkba eső $\vec{r}_{\perp}$ összetevője az $\vec{r}_{\perp} = \underline{\underline{T}} \cdot \vec{r}$ leképzéssel számítható, ahol

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} 1 - n_x n_x & -n_x n_y & -n_x n_z \\ -n_y n_x & 1 - n_y n_y & -n_y n_z \\ -n_z n_x & -n_z n_y & 1 - n_z n_z \end{bmatrix}$$

Megoldás:

$$\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}, \quad \vec{r}_{\parallel} = (\vec{r} \cdot \vec{n}) \vec{n}$$

mely alapján $\vec{r}_{\perp}$ felírható

$$\vec{r}_{\perp} = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \vec{n}) \vec{n} = \vec{r} - \vec{r} \cdot (\vec{n} \circ \vec{n}) = \underline{\underline{I}} \cdot \vec{r} - (\vec{n} \circ \vec{n}) \cdot \vec{r} = (\underline{\underline{I}} - \vec{n} \circ \vec{n}) \cdot \vec{r}$$

melyből

$$\underline{\underline{T}} = (\underline{\underline{I}} - \vec{n} \circ \vec{n}) = \underline{\underline{I}} - \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - n_x n_x & -n_x n_y & -n_x n_z \\ -n_y n_x & 1 - n_y n_y & -n_y n_z \\ -n_z n_x & -n_z n_y & 1 - n_z n_z \end{bmatrix}$$

2. GYAKORLAT

INDEXES JELÖLÉSMÓD ALKALMAZÁSA I.

2.1. Indexek jelentése

Adja meg az alábbiakban felsorolt kifejezések részletesen kiírt alakját. Ha valamelyik kifejezésben hibás az indexhasználat, akkor magyarázza el röviden, hogy miért.

- (a.) $A_i = B_i$ (c.) $k_r = b_r + c_{rr}a^r$
(b.) $f_i = d_i + h_{ij}a^j$ (d.) $a_r = d_l$

Megoldás:

(a.)

$$A_1 = B_1 \quad A_2 = B_2 \quad A_3 = B_3$$

(b.)

$$\begin{aligned} f_1 &= d_1 + h_{11}a^1 + h_{12}a^2 + h_{13}a^3 \\ f_2 &= d_2 + h_{21}a^1 + h_{22}a^2 + h_{23}a^3 \\ f_3 &= d_3 + h_{31}a^1 + h_{32}a^2 + h_{33}a^3 \end{aligned}$$

- (c.) A kifejezés hibás, mert **ugyanaz az index alsó indexpozícióban csak egyszer szerepelhet** és így a

$$c_{rr}a^r$$

tag a jobboldalon rossz!

- (d.) A kifejezés hibás, mert nem áll fenn az indexegyensúly. (Az indexegyensúly elve azt mondja ki, hogy a jobb és baloldalon minden összeadandóban a szabad indexek száma, betűjele és indexpozíciója azonos kell, hogy legyen.) Most egy a szabadindexek száma, azonos az indexpozíció, de a **betűjel különböző!**

2.2. Állítás igazolása

Mutassa meg, hogy a

$$\lambda^k \vec{g}_k = \vec{0}$$

egyenletnek csak triviális megoldása van λ^k -ra. Ha

$$x^i = x^i(y^1, y^2, y^3)$$

megfordítható, azaz létezik az

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3)$$

inverz leképezés. (Illetve lássuk be, hogy a $\vec{g}_k$ vektorok lineárisan függetlenek!)

Megoldás:

Mivel

$$\vec{r} = y^k \vec{i}_k = y^1 \vec{i}_1 + y^2 \vec{i}_2 + y^3 \vec{i}_3$$

és ennek alapján

$$\vec{g}_k = \frac{\partial y^l}{\partial x^k} \vec{i}_l = \frac{\partial y^1}{\partial x^k} \vec{i}_1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^k} \vec{i}_2 + \frac{\partial y^3}{\partial x^k} \vec{i}_3$$

a kovariáns bázisvektorok alakja következik, hogy

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} \lambda^1 + \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \lambda^2 + \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \lambda^3 &= 0 \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} \lambda^1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2} \lambda^2 + \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \lambda^3 &= 0 \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \lambda^1 + \frac{\partial y^3}{\partial x^2} \lambda^2 + \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \lambda^3 &= 0 \end{aligned}$$

a megoldandó egyenletrendszer. Ennek determinánsa

$$J_{y,x} = \frac{1}{J_{x,y}} \neq 0$$

Szavakban: az ER homogenitása miatt és a determináns zérustól különböző volta miatt csak a triviális megoldás létezik azaz

$$\lambda^1 = \lambda^2 = \lambda^3 = 0$$

A $\vec{g}_k$ vektorok pedig lineárisan függetlenek!

2.3. Állítás igazolása

Igazoljuk, hogy ortogonális görbevonalú koordinátarendszerben

$$\begin{aligned} g_{kl} &= 0 & k &\neq l \\ g_{kl} &\neq 0 & k &= l \quad (\text{nincs összegzés!}) \end{aligned}$$

Megoldás:

A görbevonalú koordinátarendszert akkor nevezzük ortogonálisnak, ha kölcsönösen merőlegesek egymásra az x^k koordinátavonalak. Mivel a $\vec{g}_k$ bázisvektorok az x^k koordinátavonalak érintői, a $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ bázisvektoroknak egymásra merőlegesnek kell lenniök. A metrikus tenzor (2.9)₂ alatti értelmezése alapján írható, hogy

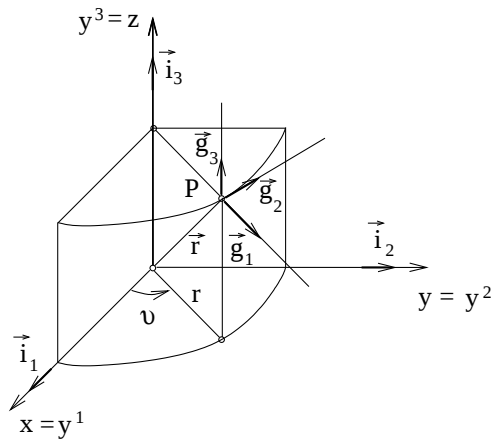
$$g_{kl} = \vec{g}_k \cdot \vec{g}_l = 0 \quad \text{ha} \quad k \neq l$$

és

$$g_{kk} = \vec{g}_k \cdot \vec{g}_k \neq 0.$$

Mivel $|\vec{g}_k| \neq 0$, a fenti feltételek teljesülése elégséges a görbevonalú KR ortogonalitásához.

2.4. Mintapélda



Határozza meg hengerkoordinátarendszerben

1. a kovariáns bázisvektorokat
2. a metrikus tenzorokat és
3. a kontravariáns bázisvektorokat.

Megoldás:

Az ábra jelöléseivel

$$\begin{aligned}x^1 &= r \\x^2 &= \vartheta \\x^3 &= y^3 = z\end{aligned}$$

A P pont $\vec{r}$ helyvektora

$$\vec{r} = y^1 \vec{i}_1 + y^2 \vec{i}_2 + y^3 \vec{i}_3 = \vec{i}_1 x^1 \cos x^2 + \vec{i}_2 x^1 \sin x^2 + \vec{i}_3 x^3$$

alakú, azaz

$$y^1 = x^1 \cos x^2 \quad y^2 = x^1 \sin x^2 \quad y^3 = x^3$$

Ezzel a Jacobi féle függvénydeterminánsra a

$$J_{y,x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \frac{\partial y^1}{\partial x^2} & \frac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^2}{\partial x^1} & \frac{\partial y^2}{\partial x^2} & \frac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial y^3}{\partial x^1} & \frac{\partial y^3}{\partial x^2} & \frac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x^2 & -x^1 \sin x^2 & 0 \\ \sin x^2 & x^1 \cos x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x^1 (\cos^2 x^2 + \sin^2 x^2) = x^1$$

eredményt kapjuk. Jól látszik, hogy $x^1 = R \neq 0$ esetén megfordítható a transzformáció.

A kovariáns bázisvektorok és kovariáns metrikus tenzor számítását az alábbiak részletezik – vö. (2.5)₂, (2.9)₂.

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^1} = \vec{i}_1 \cos x^2 + \vec{i}_2 \sin x^2 = \vec{e}_r \\ \vec{g}_2 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^2} = -\vec{i}_1 x^1 \sin x^2 + \vec{i}_2 x^1 \cos x^2 = x^1 \vec{e}_\vartheta \\ \vec{g}_3 &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^3} = \vec{i}_3\end{aligned}$$

$$[g_{kl}] = [\vec{g}_k \cdot \vec{g}_l] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A kontravariáns mértéktenzor a kovariáns mértéktenzor inverze:

$$g^{kl} = \frac{\text{adj}(g_{kl})}{G_0}, \quad G_0 = \det(g_{kl})$$

azaz

$$[g^{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(x^1)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A $(2.12)_2$ képlet felhasználásával adódik, hogy

$$\begin{aligned}\vec{g}^1 &= g^{1l} \vec{g}_l = g^{11} \vec{g}_1 = \vec{g}_1 \\ \vec{g}^2 &= g^{2l} \vec{g}_l = g^{22} \vec{g}_2 = \frac{\vec{g}_2}{(x^1)^2} \\ \vec{g}^3 &= g^{3l} \vec{g}_l = g^{33} \vec{g}_3 = \vec{g}_3.\end{aligned}$$

2.5. Szorgalmi feladat:

1. Igazolja, hogy

$$g_{mr} = \frac{1}{2(\gamma^0)^2} e_{mkl} e_{rpq} g^{pk} g^{ql}$$

2. Igazolja, hogy

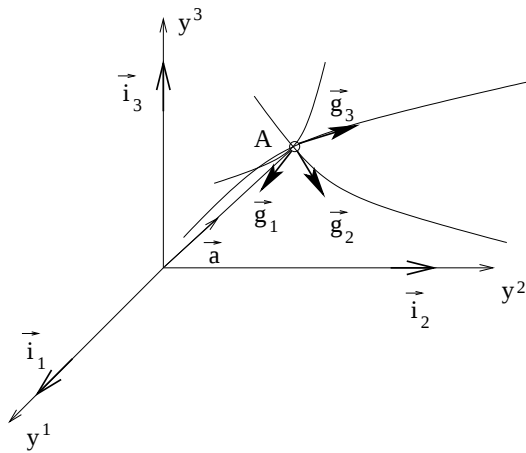
$$\varepsilon^{pqr} = \varepsilon_{klm} g^{kp} g^{lq} g^{mr}$$

(A $(40)_2$ képletre vezető gondolatmenetet kell felhasználni.)

3. GYAKORLAT

INDEXES JELÖLÉSMÓD ALKALMAZÁSA II.

3.1. Számpélda az indexes jelölésrendszerben



Ismertek valamilyen görbevonali koordináta-rendszer A pontbeli kovariáns bázisvektorai az y KR-ben. Ismert továbbá az $\vec{a}$ három kovariáns koordinátája.

$$\vec{g}_1 = \vec{i}_1$$

$$\vec{g}_2 = \vec{i}_1 + \vec{i}_2$$

$$\vec{g}_3 = \vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3$$

$$[\vec{a}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Feladatok:

- Határozza meg a bázisvektorok által kifeszített tetraéder térfogatát! $\gamma_0 = ?$
- Számítsa ki a kovariáns és a kontravariáns metrikus tenzor elemeit! $[g_{kl}] = ?$ illetve $[g^{pq}] = ?$
- Írja fel a görbevonali koordináta-rendszer kontravariáns bázisvektorait! $\vec{g}^k = ?$
- Írja fel a fenti $\vec{a}$ vektort a görbevonali koordináta-rendszer kovariáns bázisvektorai segítségével!

Megoldás:

A tetraéder térfogata a $\vec{g}_k$ vektorok vegyesszorzatából számolható ki:

$$V_{\vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_3} = \frac{1}{6} \gamma_0 \equiv \frac{1}{6}$$

$$\gamma_0 = [\vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_3] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

g_{kl} elemeinek kiszámítása:

$$[g_{kl}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Mivel g_{kl} szimmetrikus és $g_{kl} = \vec{g}_k \cdot \vec{g}_l$ így

$$\begin{aligned} g_{11} &= \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_1 = 1 \\ g_{12} &= \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = 1 \\ g_{13} &= \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_3 = 1 \\ g_{22} &= \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_2 = 2 \\ g_{23} &= \vec{g}_2 \cdot \vec{g}_3 = 2 \\ g_{33} &= \vec{g}_3 \cdot \vec{g}_3 = 3 \end{aligned}$$

g^{pq} elemeinek kiszámítása előtt számítsuk ki a kovariáns metrikus tenzor determinánsát:

$$g_0 = |g_{kl}| = 1 \cdot (2 \cdot 3 - 2 \cdot 2) - 1 \cdot (1 \cdot 3 - 1 \cdot 2) + 1 \cdot (1 \cdot 2 - 1 \cdot 2) = 1$$

mely egyébként az előadás alapján is következik a $g_0 = (\gamma_0)^2$ -ből.

$$[g^{pq}] = \frac{1}{g_0} \begin{bmatrix} G^{11} & G^{12} & G^{13} \\ G^{21} & G^{22} & G^{23} \\ G^{31} & G^{32} & G^{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

mivel

$$\begin{aligned} G^{11} &= 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 2 \\ G^{22} &= 1 \cdot 3 - 1 \cdot 1 = 2 \\ G^{33} &= 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1 \\ G^{12} &= -(1 \cdot 3 - 2 \cdot 1) = -1 = G^{21} \\ G^{13} &= 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 = 0 = G^{31} \\ G^{23} &= -(1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -1 = G^{32} \end{aligned}$$

Ellenőrzés képpen számítsuk ki a $g_{kl}g^{pq}$ szorzatot, mely egységmátrixon kell hogy adjon!

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Számítsuk ki a kontravariáns bázisvektorokat:

$$\begin{aligned} \vec{g}^1 &= g^{1l} \vec{g}_l = 2 \cdot \vec{g}_1 + (-1) \cdot (\vec{g}_1 + \vec{g}_2) + 0 = \vec{g}_1 - \vec{g}_2 \\ \vec{g}^2 &= g^{2l} \vec{g}_l = (-1) \cdot \vec{g}_1 + 2 \cdot (\vec{g}_1 + \vec{g}_2) + (-1) \cdot (\vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3) = \vec{g}_2 - \vec{g}_3 \\ \vec{g}^3 &= g^{3l} \vec{g}_l = 0 + (-1) \cdot (\vec{g}_1 + \vec{g}_2) + 1 \cdot (\vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3) = \vec{g}_3 \end{aligned}$$

Végül határozzuk meg az $\vec{a}$ koordinátáit a $\vec{g}_k$ bázisban!

$$\vec{a} = a^1 \vec{g}_1 + a^2 \vec{g}_2 + a^3 \vec{g}_3$$

Az ismert képletekkel a fenti előállításban lévő a^i -k értéke az alábbiak szerint adódik:

$$\begin{aligned} a^1 &= g^{1s} a_s = g^{11} a_1 + g^{12} a_2 + g^{13} a_3 = 2 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) = 0 \\ a^2 &= g^{21} a_1 + g^{22} a_2 + g^{23} a_3 = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 4 \\ a^3 &= g^{31} a_1 + g^{32} a_2 + g^{33} a_3 = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -3 \end{aligned}$$

3.2. Bizonyítsa be

hogy a következő egyenlet fennáll

$$g^{mr} = \frac{1}{2\gamma_0^2} e^{mkl} e^{rpq} g_{pk} g_{ql}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} g^{mr} &= \vec{g}^m \cdot \vec{g}^r = \frac{1}{4\gamma_0^2} e^{mkl} e^{rpq} (\vec{g}_k \times \vec{g}_l) \cdot (\vec{g}_p \times \vec{g}_q) = \frac{1}{4\gamma_0^2} e^{mkl} e^{rpq} \vec{g}_k \cdot [\vec{g}_l \times (\vec{g}_p \times \vec{g}_q)] = \\ &= \frac{1}{4\gamma_0^2} e^{mkl} e^{rpq} \vec{g}_k \cdot [g_{lq} \vec{g}_p - g_{lp} \vec{g}_q] = \frac{1}{4\gamma_0^2} e^{mkl} e^{rpq} (g_{kp} g_{lq} - g_{kq} g_{lp}) \end{aligned}$$

itt

$$e^{mkl} e^{rpq} g_{kq} g_{lp} = -e^{mkl} e^{rpq} g_{kp} g_{lq}$$

Végül

$$g^{mr} = \frac{1}{2\gamma_0^2} e^{mkl} e^{rpq} g_{pk} g_{ql}$$

mely az adjungált!

4. GYAKORLAT

INDEXES JELÖLÉSMÓD ALKALMAZÁSA III.

4.1. Mutassa meg

hogy igaz a következő determinánsokra vonatkozó összefüggés:

$$|a^{ir}| = g^0 |a_u^r|$$

Megoldás:

A determináns definíciója alapján:

$$\begin{aligned} |a^{ir}| &= \frac{1}{3!} e_{ijk} e_{rst} a^{ir} a^{js} a^{kt} \stackrel{\text{index süllyesztés}}{\downarrow} = \frac{1}{3!} e_{ijk} e_{rst} g^{iu} a_u^r g^{jv} a_v^s g^{kw} a_w^t = \\ &= \stackrel{\text{def.: } e_{rst} a_u^r a_v^s a_w^t = e_{uvw} |a_u^r|}{=} \frac{1}{3!} e_{ijk} e_{uvw} g^{iu} g^{jv} g^{kw} |a_u^r| = \\ &= \stackrel{\text{def.: } e_{uvw} g^{iu} g^{jv} g^{kw} = e^{ijk} |g^{iu}|}{=} \frac{1}{3!} \underbrace{e_{ijk} e^{ijk}}_{3!} \underbrace{|g^{iu}|}_{g^0} |a_u^r| \end{aligned}$$

azaz

$$\boxed{|a^{ir}| = g^0 |a_u^r|}$$

Hasonlóan belátható, hogy

$$|a_{ir}| = g_0 |a_u^r| = g_0 |a_r^u|$$

$$\begin{aligned} |a_{ir}| &= \frac{1}{3!} e^{ijk} e^{rst} a_{ir} a_{js} a_{kt} \stackrel{\text{index emelés}}{\uparrow} = \frac{1}{3!} e^{ijk} e^{rst} g_{iu} a_r^u g_{jv} a_s^v g_{kw} a_t^w = \\ &= \stackrel{\text{def.: } e^{rst} a_r^u a_s^v a_t^w = e^{uvw} |a_r^u|}{=} \frac{1}{3!} e^{ijk} e^{uvw} g_{iu} g_{jv} g_{kw} |a_r^u| = \\ &= \stackrel{\text{def.: } e^{uvw} g_{iu} g_{jv} g_{kw} = e_{ijk} |g_{iu}|}{=} \frac{1}{3!} \underbrace{e^{ijk} e_{ijk}}_{3!} \underbrace{|g_{iu}|}_{g_0} |a_r^u| = \boxed{g_0 |a_r^u|} \end{aligned}$$

amiből az is látható, hogy

$$|a_u^r| = |a_r^u|$$

4.2. Mutassa meg

hogy igaz a

$$g^0 = (\gamma^0)^2$$

egyenlet!

Megoldás:

Az előadás 33. o. 5.4. szakasza alapján

$$\vec{g}^1 = g^{1k} \vec{g}_k \quad \vec{g}^2 = g^{2l} \vec{g}_l \quad \vec{g}^3 = g^{3m} \vec{g}_m$$

és így

$$\gamma^0 \underbrace{e^{123}}_1 = \gamma^0 = [\vec{g}^1 \quad \vec{g}^2 \quad \vec{g}^3] = g^{1k} g^{2l} g^{3m} \underbrace{[\vec{g}_k \quad \vec{g}_l \quad \vec{g}_m]}_{\substack{\varepsilon_{klm} = \gamma^0_{\frac{1}{\gamma^0}} e_{klm}}}$$

azaz

$$(\gamma^0)^2 = \underbrace{e_{klm} g^{1k} g^{2l} g^{3m}}_{g^0}$$

vagyis

$$\boxed{(\gamma^0)^2 = g^0}$$

4.3. Láss be

hogy

$$e_{klm} e^{kpq} = \begin{vmatrix} \delta_l^p & \delta_l^q \\ \delta_m^p & \delta_m^q \end{vmatrix}$$

Megoldás:

A permutációs szimbólumok szorzata alapján (előadás 17-18. o. 23. képlet):

$$e_{klm} e^{kpq} = e_{1lm} e^{1pq} + e_{2lm} e^{2pq} + e_{3lm} e^{3pq}$$

- ezen fennti kifejezés csak akkor különbözik zérustól, ha

$$l = p \quad m = q \quad l \neq m \implies +1$$

hiszen ekkor az alsó és felső indexsor egyszerre páros vagy páratlan permutáció (de csak egy tag nem zérus)

- vagy ha

$$l = q \quad m = p \quad l \neq m \implies -1$$

hiszen ekkor az alsó és felső indexsor különböző (ha az egyik páros a másik páratlan és viszont) permutáció (csak egy tag nem zérus a jobboldalon)

- minden más esetben zérus!

Ezen fennti kifejezés értéke az előadás alapján:

$$e_{klm} e^{kpq} = \delta_l^p \delta_m^q - \delta_m^p \delta_l^q$$

mely nem más mint a fennti állításban szereplő determináns értéke!

4.4. Igazolja

hogy teljesül a következő determinánsokra vonatkozó összefüggés!

$$|a^{kl}| = \frac{1}{3!} e_{ijk} e_{pqr} a^{ip} a^{jq} a^{kr}$$

Megoldás:

A determináns definíciója alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} |a^{kl}| &= e_{ijk} a^{i1} a^{j2} a^{k3} = \\ &= a^{11} (a^{22} a^{33} - a^{32} a^{23}) \\ &+ a^{21} (a^{32} a^{13} - a^{12} a^{33}) \\ &+ a^{31} (a^{12} a^{23} - a^{22} a^{13}) \end{aligned}$$

amit tehát az első oszlop szerint fejtettünk ki.

Indexcsere által kapjuk, hogy

$$-|a^{kl}| = e_{jik} a^{j1} a^{i2} a^{k3} = e_{ijk} a^{i2} a^{j1} a^{k3}$$

Mely a második oszlop szerinti kifejtést jelenti.

$$\underbrace{e^{213}}_{-1} |a^{kl}| = e_{ijk} a^{i2} a^{j1} a^{k3}$$

Ebből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \boxed{e^{pqr} |a^{kl}| = e_{ijk} a^{ip} a^{jq} a^{kr}} & \quad \Big| \quad \cdot e_{pqr} \\ \underbrace{e^{pqr} e_{pqr}}_{3!=6} |a^{kl}| &= e_{ijk} e^{pqr} a^{ip} a^{jq} a^{kr} \end{aligned}$$

Tehát amit igazolni kellett:

$$\boxed{|a^{kl}| = \frac{1}{3!} e_{ijk} e_{pqr} a^{ip} a^{jq} a^{kr}}$$

4.5. Szorgalmi feladatok:

- Igazolja, hogy

$$A_{ir} = \frac{1}{2} e_{ijk} e_{rst} a^{sj} a^{tk}$$

- Igazolja, hogy

$$A_i{}^r = \frac{1}{2} e_{ijk} e^{rst} a_s{}^j a_t{}^k$$

- Igazolja, hogy

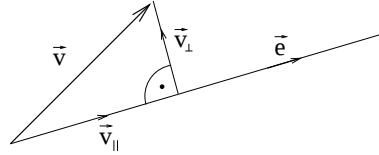
$$e^{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_1^p & \delta_1^q & \delta_1^r \\ \delta_2^p & \delta_2^q & \delta_2^r \\ \delta_3^p & \delta_3^q & \delta_3^r \end{vmatrix}$$

5. GYAKORLAT

INDEXES JELÖLÉSMÓD ALKALMAZÁSA IV.

5.1. Állítsa elő a projektor tenzorokat

Írja fel azokat a másodrendű tenzorokat melyek a $\vec{v}$ vektorhoz a vektor $\vec{e}$ irányú és arra merőleges összetevőit rendelik ($|\vec{e}| = 1$).



5.1. ábra. Vektor összetevői

Megoldás:

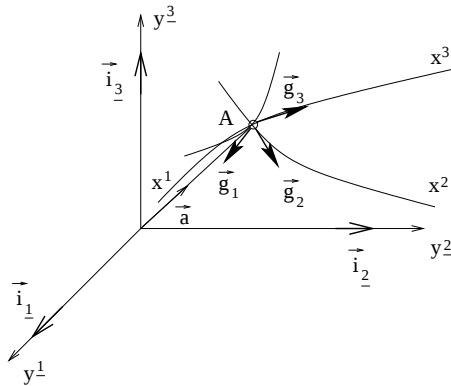
- az $\vec{e}$ irányba eső vetület:

$$\vec{v}_{||} = (\vec{v} \cdot \vec{e}) \vec{e} = \vec{e} (\vec{e} \cdot \vec{v}) = \underbrace{(\vec{e} \circ \vec{e})}_{\underline{\underline{P_{||}}}} \cdot \vec{v}$$

- az $\vec{e}$ irányra merőleges vetület:

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v} - \vec{v}_{||} = \underbrace{(\underline{\underline{I}} - \vec{e} \circ \vec{e})}_{\underline{\underline{P_{\perp}}}} \cdot \vec{v}$$

5.2. Számpélda az indexes jelölésrendszerben



Ismertek valamilyen görbevonalú koordináta-rendszer A pontbeli kovariáns bázisvektorai az y KR-ben. Ismert továbbá a GVK-ban az $\vec{a}$ három kovariáns koordinátája.

$$\vec{g}_1 = \vec{i}_1$$

$$\vec{g}_2 = \vec{i}_1 + \vec{i}_2$$

$$\vec{g}_3 = \vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3$$

$$[\vec{a}] = [a_k] = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Feladatok:

- Számítsa ki a t_k^l és τ_m^n transzformációs tenzorokat!

- Transzformálja az $\vec{a}$ vektort az $\underline{y}$ KR-be!
- Transzformálja a g^{kl} és g_{rs} tenzorokat az $\underline{y}$ KR-be!

Megoldás:

A 3.1 példában már meghatároztuk a reciprok bázisvektorokat:

$$\begin{aligned}\vec{g}^1 &= \vec{i}_1 - \vec{i}_2 \\ \vec{g}^2 &= \vec{i}_2 - \vec{i}_3 \\ \vec{g}^3 &= \vec{i}_3\end{aligned}$$

Ezek alapján:

$$t_{\underline{k}}^l = \vec{g}_{\underline{k}} \cdot \vec{g}^l = \vec{i}_{\underline{k}} \cdot \vec{g}^l = \begin{bmatrix} t_1^1 & t_1^2 & t_1^3 \\ t_2^1 & t_2^2 & t_2^3 \\ t_3^1 & t_3^2 & t_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}t_1^1 &= \vec{i}_1 \cdot \vec{g}^1 = \vec{i}_1 \cdot (\vec{i}_1 - \vec{i}_2) = 1 & t_2^1 &= \vec{i}_2 \cdot \vec{g}^1 = \vec{i}_2 \cdot (\vec{i}_1 - \vec{i}_2) = -1 \\ t_1^2 &= \vec{i}_1 \cdot \vec{g}^2 = \vec{i}_1 \cdot (\vec{i}_2 - \vec{i}_3) = 0 & t_2^2 &= \vec{i}_2 \cdot \vec{g}^2 = \vec{i}_2 \cdot (\vec{i}_2 - \vec{i}_3) = 1 \\ t_1^3 &= \vec{i}_1 \cdot \vec{g}^3 = \vec{i}_1 \cdot \vec{i}_3 = 0 & t_2^3 &= \vec{i}_2 \cdot \vec{g}^3 = \vec{i}_2 \cdot \vec{i}_3 = 0 \\ t_3^1 &= \vec{i}_3 \cdot \vec{g}^1 = \vec{i}_3 \cdot (\vec{i}_1 - \vec{i}_2) = 0 \\ t_3^2 &= \vec{i}_3 \cdot \vec{g}^2 = \vec{i}_3 \cdot (\vec{i}_2 - \vec{i}_3) = -1 \\ t_3^3 &= \vec{i}_3 \cdot \vec{g}^3 = \vec{i}_3 \cdot \vec{i}_3 = 1\end{aligned}$$

Hasonló megfontolásokkal kapjuk, hogy

$$\tau_m^{\underline{n}} = \vec{g}_m \cdot \vec{g}^{\underline{n}} = \vec{g}_m \cdot \vec{i}^{\underline{n}} = \begin{bmatrix} \tau_1^1 & \tau_1^2 & \tau_1^3 \\ \tau_2^1 & \tau_2^2 & \tau_2^3 \\ \tau_3^1 & \tau_3^2 & \tau_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Mivel

$$\vec{i}_{\underline{k}} = \vec{i}^{\underline{k}}$$

ezért

$$\begin{aligned}\tau_1^1 &= \vec{g}_1 \cdot \vec{i}^1 = \vec{i}_1 \cdot \vec{i}^1 = 1 & \tau_2^1 &= \vec{g}_2 \cdot \vec{i}^1 = (\vec{i}_1 + \vec{i}_2) \cdot \vec{i}^1 = 1 \\ \tau_1^2 &= \vec{g}_1 \cdot \vec{i}^2 = \vec{i}_1 \cdot \vec{i}^2 = 0 & \tau_2^2 &= \vec{g}_2 \cdot \vec{i}^2 = (\vec{i}_1 + \vec{i}_2) \cdot \vec{i}^2 = 1 \\ \tau_1^3 &= \vec{g}_1 \cdot \vec{i}^3 = \vec{i}_1 \cdot \vec{i}^3 = 0 & \tau_2^3 &= \vec{g}_2 \cdot \vec{i}^3 = (\vec{i}_1 + \vec{i}_2) \cdot \vec{i}^3 = 0 \\ \tau_3^1 &= \vec{g}_3 \cdot \vec{i}^1 = (\vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3) \cdot \vec{i}^1 = 1 \\ \tau_3^2 &= \vec{g}_3 \cdot \vec{i}^2 = (\vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3) \cdot \vec{i}^2 = 1 \\ \tau_3^3 &= \vec{g}_3 \cdot \vec{i}^3 = (\vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3) \cdot \vec{i}^3 = 1\end{aligned}$$

Ellenőrzésként vizsgáljuk meg, hogy vajon teljesül-e a

$$t_{\underline{k}}^l \tau_l^{\underline{s}} = \delta_{\underline{k}}^{\underline{s}}$$

reláció?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transzformáljuk az $\vec{a}$ vektort az $\underline{y}$ KR-be!

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \underbrace{a_1}_1 \vec{g}^1 + \underbrace{a_2}_2 \vec{g}^2 + \underbrace{a_3}_{-1} \vec{g}^3$$

$$\vec{a} = a_{\underline{1}} \vec{i}^{\underline{1}} + a_{\underline{2}} \vec{i}^{\underline{2}} + a_{\underline{3}} \vec{i}^{\underline{3}} \quad a_{\underline{i}} = ?$$

A számítás a következő módon történik:

$$a_{\underline{k}} = t_{\underline{k}}^l a_l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Másrészt pedig a 3.1 példa alapján tudjuk, hogy az $\vec{a}$ kontravariáns koordinátái

$$[\vec{a}] = [a^k] = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \vec{a} = \underbrace{a^1}_0 \vec{g}_1 + \underbrace{a^2}_4 \vec{g}_2 + \underbrace{a^3}_{-3} \vec{g}_3$$

$$a^{\underline{k}} = a^l \tau_l^{\underline{k}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Végül transzformáljuk a metrikus tenzorokat az $\underline{y}$ KR-be!

A 3.1 példa alapján

$$[g_{rs}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [g^{pq}] = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

a metrikus tenzor az (x) KR-ben.

Kontravariáns metrikus tenzor az (y) KR-ben:

$$g^{\underline{k}\underline{l}} = \tau_p^{\underline{k}} \tau_q^{\underline{l}} g^{pq} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Kovariáns metrikus tenzor az (y) KR-ben:

$$g_{\underline{k}\underline{l}} = t_{\underline{k}}^r t_{\underline{l}}^s g_{rs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A két metrikus tenzor skaláris szorzata az egységtenzort kell, hogy adja:

$$\delta_{\underline{r}}^{\underline{k}} = g^{\underline{k}\underline{l}} g_{\underline{l}\underline{r}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.3. Igazolja

hogy igaz a következő állítás!

$$t_{\underline{k}}^l \tau_l^s = \delta_{\underline{k}}^s$$

Megoldás:

Mivel

$$d\vec{r} = dx^l \vec{g}_l = dy^{\underline{k}} \vec{i}_{\underline{k}} \quad d\vec{r} = dx^l \vec{g}_l = dx^{\underline{k}} \vec{g}_{\underline{k}}$$

ahol

$$dx^l = \frac{\partial x^l}{\partial y^{\underline{k}}} dy^{\underline{k}} \quad dx^l = \frac{\partial x^l}{\partial x^{\underline{k}}} dx^{\underline{k}}$$

és

$$\vec{g}_l = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^l} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y^{\underline{s}}} \frac{\partial y^{\underline{s}}}{\partial x^l} = \frac{\partial y^{\underline{s}}}{\partial x^l} \vec{i}_{\underline{s}} \quad \vec{g}_l = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^l} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x^{\underline{s}}} \frac{\partial x^{\underline{s}}}{\partial x^l} = \frac{\partial x^{\underline{s}}}{\partial x^l} \vec{g}_{\underline{s}}$$

amit a $d\vec{r}$ fenti kifejezésébe visszaírva, majd a $dy^{\underline{k}}$ -t illetve $dx^{\underline{k}}$ -t mindkét oldalon elhagyva kapjuk, hogy

$$\frac{\partial x^l}{\partial y^{\underline{k}}} \frac{\partial y^{\underline{s}}}{\partial x^l} \vec{i}_{\underline{s}} = \vec{i}_{\underline{k}} \quad \frac{\partial x^l}{\partial x^{\underline{k}}} \frac{\partial x^{\underline{s}}}{\partial x^l} \vec{g}_{\underline{s}} = \vec{g}_{\underline{k}}$$

Egyenlőség csak akkor lehetséges, ha

$$\underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial y^{\underline{k}}} \frac{\partial y^{\underline{s}}}{\partial x^l}}_{t_{\underline{k}}^l \tau_l^s} = \delta_{\underline{k}}^s \quad \underbrace{\frac{\partial x^l}{\partial x^{\underline{k}}} \frac{\partial x^{\underline{s}}}{\partial x^l}}_{t_{\underline{k}}^l \tau_l^s} = \delta_{\underline{k}}^s$$

azaz ha

$$t_{\underline{k}}^l \tau_l^s = \delta_{\underline{k}}^s$$

Ezt kellett igazolni!

6. GYAKORLAT

INDEXES JELÖLÉSMÓD ALKALMAZÁSA V.

6.1. Igazolja

hogy a következő kifejezés az adjungált:

$$A^{ir} = \frac{1}{2} e^{ijk} e^{rst} a_{sj} a_{tk}$$

Megoldás

Vizsgáljuk meg a

$$2A^{IR} = e^{Ijk} e^{Rst} a_{sj} a_{tk}$$

kifejezés értékét feltételezve, hogy az IJK és RST is páros permutáció a kiinduláskor! (Ez a feltevés nem sérti az általánosságot):

$$2A^{IR} = a_{SJ} a_{TK} + a_{TK} a_{SJ} - a_{SK} a_{TJ} - a_{TJ} a_{SK} = 2(a_{SJ} a_{TK} - a_{SK} a_{TJ})$$

$$\text{Ha } \begin{matrix} I=3 & R=2 \\ J=1 & S=3 \\ K=2 & T=1 \end{matrix} \text{ akkor}$$

$$A^{32} = a_{31} a_{12} - a_{32} a_{11}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Vagy általánosabban

$$A^{ir} a_{rp} = \frac{1}{2} e^{ijk} e^{rst} \underbrace{a_{rp} a_{sj} a_{tk}}_{|a_{rp}| e_{pj k}} = \frac{1}{2} 2\delta_p^i |a_{rp}|$$

Ezt kellett igazolni!

6.2. Igazolás

$$|a_{kl}| = \frac{1}{3!} e^{ijk} e^{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr}$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} |a_{kl}| &= e^{pqr} a_{1p} a_{2q} a_{3r} = \\ &= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + \\ &+ a_{12} (a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33}) + \\ &+ a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) \end{aligned}$$

Néma indexcserékkel kapjuk, hogy

$$-|a_{kl}| = e^{qpr} a_{1p} a_{2q} a_{3r} = e^{pqr} a_{2p} a_{1q} a_{3r}$$

ami a determináns második oszlop szerinti kifejtést adja. Mivel $e_{213} = -1$ írható, hogy

$$e_{213} | a_{kl} | = e^{pqr} a_{2p} a_{1q} a_{3r}$$

vagy általános alakban (a 2 helyére i -t, az 1 helyére j -t, a 3 helyére k -t gondolva):

$$e_{ijk} | a_{kl} | = e^{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr} \quad \Big| e^{ijk}$$

Az e^{ijk} -val való szorzás a kívánt eredményre vezet:

$$\underbrace{e^{ijk} e_{ijk}}_{3!=6} | a_{kl} | = e^{ijk} e^{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr}$$

Végső alakban:

$$| a_{kl} | = \frac{1}{3!} e^{ijk} e^{pqr} a_{ip} a_{jq} a_{kr}$$

6.3. Tenzor transzformációk

Írja fel igazolással, majd foglalja táblázatba az $\underline{A}$ másodrendű tenzorra vonatkozó transzformáció képleteit, ha az $\underline{x}$ KR-ből az (x) KR-be történik a transzformáció!

$$\begin{aligned} a_{\underline{k}\underline{l}} \vec{g}^{\underline{k}} \circ \vec{g}^{\underline{l}} &= a_{pq} \vec{g}^p \circ \vec{g}^q \\ a_{\underline{k}\underline{l}} \frac{\partial x^{\underline{k}}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{\underline{l}}}{\partial x^q} \vec{g}^p \circ \vec{g}^q &= a_{pq} \vec{g}^p \circ \vec{g}^q \\ a_{\underline{l}}^{\underline{k}} \vec{g}_{\underline{k}} \circ \vec{g}^{\underline{l}} &= a_q^p \vec{g}_p \circ \vec{g}^q \\ a_{\underline{l}}^{\underline{k}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{\underline{k}}} \frac{\partial x^{\underline{l}}}{\partial x^q} \vec{g}_p \circ \vec{g}^q &= a_q^p \vec{g}_p \circ \vec{g}^q \\ a^{\underline{k}\underline{l}} \vec{g}_{\underline{k}} \circ \vec{g}_{\underline{l}} &= a^{pq} \vec{g}_p \circ \vec{g}_q \\ a^{\underline{k}\underline{l}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{\underline{k}}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{\underline{l}}} \vec{g}_p \circ \vec{g}_q &= a^{pq} \vec{g}_p \circ \vec{g}_q \end{aligned}$$

ezek alapján

$$\begin{aligned} a_{pq} &= a_{\underline{k}\underline{l}} \frac{\partial x^{\underline{k}}}{\partial x^p} \frac{\partial x^{\underline{l}}}{\partial x^q} = a_{\underline{k}\underline{l}} \tau_p^{\underline{k}} \tau_q^{\underline{l}} \\ a^{pq} &= a^{\underline{k}\underline{l}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{\underline{k}}} \frac{\partial x^q}{\partial x^{\underline{l}}} = a^{\underline{k}\underline{l}} t_{\underline{k}}^p t_{\underline{l}}^q \\ a_q^p &= a_{\underline{l}}^{\underline{k}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{\underline{k}}} \frac{\partial x^{\underline{l}}}{\partial x^q} = a_{\underline{l}}^{\underline{k}} t_{\underline{k}}^p \tau_q^{\underline{l}} \\ a_p^q &= a_{\underline{k}}^{\underline{l}} \frac{\partial x^{\underline{k}}}{\partial x^p} \frac{\partial x^q}{\partial x^{\underline{l}}} = a_{\underline{k}}^{\underline{l}} \tau_p^{\underline{k}} t_{\underline{l}}^q \end{aligned}$$

6.4. Mutassa meg

hogy g_0 skalár $M = 2$ súllyal.

Megoldás:

$$\begin{aligned} g_0 &= e^{\underline{a}\underline{b}\underline{c}} g_{\underline{a}1} g_{\underline{b}2} g_{\underline{c}3} = e^{\underline{a}\underline{b}\underline{c}} t_{\underline{a}}^{\underline{k}} t_{\underline{1}}^p g_{kp} t_{\underline{b}}^{\underline{l}} t_{\underline{2}}^q g_{lq} t_{\underline{c}}^m t_{\underline{3}}^r g_{mr} = \\ &= \underbrace{e^{\underline{a}\underline{b}\underline{c}} t_{\underline{a}}^{\underline{k}} t_{\underline{b}}^{\underline{l}} t_{\underline{c}}^m}_{e^{klm} | t_{\underline{a}}^{\underline{k}} |} t_{\underline{1}}^p t_{\underline{2}}^q t_{\underline{3}}^r g_{kp} g_{lq} g_{mr} = \underbrace{t e^{klm} g_{kp} g_{lq} g_{mr}}_{g_0 e_{pqr}} t_{\underline{1}}^p t_{\underline{2}}^q t_{\underline{3}}^r = t g_0 \underbrace{e_{pqr} t_{\underline{1}}^p t_{\underline{2}}^q t_{\underline{3}}^r}_t = t^2 g_0 \end{aligned}$$

Ezt kellett bizonyítani.

6.5. Igazolja

hogy valódi skalár valamely két vektor skaláris szorzata!

Megoldás:

Egyszerű átalakításokkal kapjuk, hogy

$$a_{\underline{p}} b^{\underline{p}} = t_{\underline{p}}^r \underbrace{\tau_s^{\underline{p}}}_{\delta_s^r} a_r b^s = a_r b^r$$

6.6. Igazolja

hogy valódi vektor két valódi vektor vektoriális szorzata!

Megoldás:

$$\begin{aligned} c_{\underline{r}} &= \varepsilon_{\underline{p}\underline{q}\underline{r}} a^{\underline{p}} b^{\underline{q}} = \\ &= \varepsilon_{klm} t_{\underline{p}}^k t_{\underline{q}}^l t_{\underline{r}}^m \tau_u^{\underline{p}} \tau_v^{\underline{q}} a^u b^v = \\ &= \varepsilon_{klm} \delta_u^k \delta_v^l t_{\underline{r}}^m a^u b^v = \\ &= t_{\underline{r}}^m \underbrace{\varepsilon_{klm} a^k b^l}_{c_m} = t_{\underline{r}}^m c_m \end{aligned}$$

7. GYAKORLAT

INDEXES JELÖLÉSMÓD ALKALMAZÁSA VI.

7.1. Láss be

hogyan helyes az előadásanyagban kiadott

$$s_{pq} = \sqrt{g_0} \begin{bmatrix} 0 & -s^3 & s^2 \\ s^3 & 0 & -s^1 \\ -s^2 & s^1 & 0 \end{bmatrix}$$

képlet!

Megoldás:

Az előadásbeli (120) képlet alapján index átnevezéseket is alkalmazva írhatjuk, hogy

$$s_{pq} = -\varepsilon_{pqr} s^r_{(a)} = -\sqrt{g_0} e_{pqr} s^r_{(a)}$$

Nyilvánvaló, hogy

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = 0$$

A többi elem

$$\begin{aligned} s_{12} &= -\sqrt{g_0} e_{123} s^3_{(a)} = \pm \sqrt{g_0} s^3_{(a)} \\ s_{13} &= -\sqrt{g_0} e_{132} s^2_{(a)} = \pm \sqrt{g_0} s^2_{(a)} \\ s_{23} &= -\sqrt{g_0} e_{231} s^1_{(a)} = \mp \sqrt{g_0} s^1_{(a)} \end{aligned}$$

Ezt kellett igazolni.

7.2. Igazolja

hogyan

$$\underline{\underline{\mathcal{E}}} \cdot \vec{g}_k \circ \vec{g}_l = \varepsilon_{klr} \vec{g}^r$$

Az $\underline{\underline{\mathcal{E}}}$ tenzor kiírásával kapjuk, hogy

$$\varepsilon_{rpq} \vec{g}^r \circ \vec{g}^p \circ \vec{g}^q \vec{g}_k \circ \vec{g}_l = \varepsilon_{rpq} \vec{g}^r \delta^p_k \delta^q_l = \varepsilon_{klr} \vec{g}^r$$

Ezt kellett igazolni.

7.3. Láss be

hogyan igaz az előadáson felírt

$$\text{tr} (\underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{S}}) = \text{tr} (\underline{\underline{S}} \cdot \underline{\underline{D}})$$

formula!

Megoldás:

Egyrészt:

$$\underline{D} \cdot \underline{S} = d_k^l s_l^r \rightarrow \text{tr}(\underline{D} \cdot \underline{S}) = d_k^l s_l^k$$

másrészt:

$$\underline{S} \cdot \underline{D} = s_l^r d_r^p \rightarrow \text{tr}(\underline{S} \cdot \underline{D}) = s_l^r d_r^l$$

A néma indexek alkalmas átnevezésével azonnal kapjuk, hogy a két képlet azonos.

7.4. Mutassa meg

hogy az előadáson felírt

$$\text{tr}(\underline{D} \cdot \underline{S}^T) = \underline{S} \cdot \underline{D}$$

formula mindkét oldala ugyanazt az eredményt adja!

Megoldás:

Egyrészt

$$\begin{aligned} \text{tr}(\underline{D} \cdot \underline{S}) &= \text{tr}(d_{kl} \vec{g}^k \circ \vec{g}^l s^{pq} \vec{g}^p \circ \vec{g}^q) = \text{tr}(d_{kl} s_{pq} g^{lp} \vec{g}^k \circ \vec{g}^q) = \\ &= \text{tr}(d_{kl} s_q^l \vec{g}^k \circ \vec{g}^q) = d_{kl} g^{qk} s_q^l = d_l^q s_q^l \end{aligned}$$

másrészt pedig:

$$\underline{S} \cdot \underline{D} = s_{kl} \vec{g}^k \circ \vec{g}^l d_{pq} \vec{g}^p \circ \vec{g}^q = s_{kl} d_{pq} g^{kp} g^{lq} = s_k^q d_q^k$$

Q.u.e.d.

7.5. Sajátértékek vizsgálata

Legyen λ_1 és λ_2 a *karaktisztikus egyenlet* két különböző gyöke, azaz a sajátértékfeladat két különböző *sajátértéke*. Jelölje $\vec{n}_1$ és $\vec{n}_2$ a vonatkozó egységvektorokat. Ekkor

$$(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I}) \cdot \vec{n}_1 = 0 \quad \text{és} \quad (\underline{A} - \lambda_2 \underline{I}) \cdot \vec{n}_2 = 0.$$

Innen, első esetben az $\vec{n}_2$ -vel, második esetben pedig az $\vec{n}_1$ -el történő skaláris szorzással azonnal adódik, hogy

$$\vec{n}_2 \cdot \underline{A} \cdot \vec{n}_1 = \lambda_1 \vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1 \quad \text{és} \quad \vec{n}_1 \cdot \underline{A} \cdot \vec{n}_2 = \lambda_2 \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2.$$

A szimmetrikus tenzorokkal kapcsolatos összefüggések alapján

$$\vec{n}_2 \cdot \underline{A} \cdot \vec{n}_1 = \vec{n}_1 \cdot \underline{A} \cdot \vec{n}_2.$$

Ezen utóbbi egyenlet figyelembevételével képezve az fenti egyenletek különbségét, az

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \text{azaz az} \quad \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \text{tehát} \quad \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$$

eredményt kapjuk, ami azt jelenti, hogy a különböző sajátértékekhez tartozó főirányok merőlegesek egymásra.

Tegyük fel, hogy komplex szám a λ_1 sajátérték. Ekkor a vonatkozó főirányt adó

$$\underline{A} \cdot \vec{n}_1 = \lambda_1 \vec{n}_1$$

egyenletnek komplex a jobboldala. A baloldal pedig $\underline{A}$ valós volta miatt csak akkor lehet komplex, ha az $\vec{n}_1$ is komplex. Következésképpen az $\vec{n}_1$ felírható a

$$\vec{n}_1 = \vec{n}_{1\text{Re}} + i \vec{n}_{1\text{Im}}$$

alakban. Nyilvánvaló az is, hogy a $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 \neq \lambda_1$ – a felülvonás a komplex konjugáltat jelöli – ugyancsak sajátérték, a vonatkozó főirányt pedig ugyancsak konjugálással kapjuk azaz:

$$\underline{A} \cdot \vec{n}_1 = \bar{\lambda}_1 \vec{n}_1 \quad \text{vagyis} \quad \underline{A} \cdot \vec{n}_1 = \lambda_2 \vec{n}_1$$

Emellett

$$\vec{n}_2 = \overline{\vec{n}_1} = \vec{n}_{1\text{Re}} - i\vec{n}_{1\text{Im}}.$$

Mivel $\lambda_1 \neq \lambda_2$ fenn kell állnia az $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ egyenletnek. Ugyanakkor az $\vec{n}_1$ és $\vec{n}_2$ -t adó fenti képletek felhasználásával

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = (\vec{n}_{1\text{Re}} + i\vec{n}_{1\text{Im}}) \cdot (\vec{n}_{1\text{Re}} - i\vec{n}_{1\text{Im}}) = \vec{n}_{1\text{Re}} \cdot \vec{n}_{1\text{Re}} + \vec{n}_{1\text{Im}} \cdot \vec{n}_{1\text{Im}} = \|\vec{n}_1\|^2 \neq 0,$$

azaz nem zérus az $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2$ skalárszorzat. Az a feltevés tehát, hogy a λ_1 komplex ellentmondásra vezet. Következésképpen valóságok a λ_k ($k = 1, 2, 3$) sajátértékek.

7.6. Számpélda

Határozza meg a valamely görbevonali koordinátarendszerben egy adott pontjában az $\underline{\underline{A}}$ tenzor sajátértékeit és főirányait ha az adott pontban ortogonális egységbázisú a KR!

$$[a_{kl}] = \begin{bmatrix} 85 & 0 & 25 \\ 0 & -10 & 0 \\ 25 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

Vegyük észre, hogy a 2. koordinátavonal főirány hiszen $a_{12} = a_{32} = 0$. A vonatkozó sajátértéket jelölje $\lambda_{(a)}$. Ez nyilvánvalóan a második oszlop diagonális eleme: $\lambda_{(a)} = -10$. A karakterisztikus egyenlet

$$\begin{aligned} P_3(\lambda) &= -\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{I}}) = -\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda g_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda g_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda g_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= \lambda^3 - A_I \lambda^2 + A_{II} \lambda - A_{III} = \left(\lambda - \lambda_{(a)}\right) \left(\lambda - \lambda_{(b)}\right) \left(\lambda - \lambda_{(c)}\right) = 0 \end{aligned}$$

Mivel nem ismerjük a karakterisztikus értékek sorrendjét azokat jelölje ezeket egyszerűen $\lambda_{(a)}$, $\lambda_{(b)}$ és $\lambda_{(c)}$. A karakterisztikus polinom

$$P_3(\lambda) = -\begin{vmatrix} 85 - \lambda & 0 & 25 \\ 0 & -10 - \lambda & 0 \\ 25 & 0 & -35 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 40\lambda^2 - 4100\lambda - 36000 = 0$$

alakú, ahol

$$A_I = \lambda_{(a)} + \lambda_{(b)} + \lambda_{(c)} = 40, \quad A_{II} = -4100, \quad A_{III} = \lambda_{(a)} \lambda_{(b)} \lambda_{(c)} = 36000,$$

Itt a főtengelek KR-ét véve alapul és a későbbiek kedvéért kiírtuk képletszerűen is az A_I és A_{III} skalárinvariánsokat. Ha $\lambda \neq \lambda_{(a)}$ akkor átoszthatjuk a $P_3(\lambda) = 0$ karakterisztikus egyenletet a $\lambda - \lambda_{(a)}$ gyöktényezővel

$$\frac{P_3(\lambda)}{\lambda - \lambda_{(a)}} = \left(\lambda - \lambda_{(b)}\right) \left(\lambda - \lambda_{(c)}\right) = \lambda^2 - \left(\lambda_{(b)} + \lambda_{(c)}\right) \lambda + \lambda_{(b)} \lambda_{(c)} = 0.$$

Nem nehéz észrevenni, hogy

$$\lambda_{(b)} + \lambda_{(c)} = A_I - \lambda_{(a)} = 50 \quad \text{és} \quad \lambda_{(b)} \lambda_{(c)} = \frac{A_{III}}{\lambda_{(a)}} = -3600.$$

Következésképp a

$$\lambda^2 - \left(A_I - \lambda_{(a)}\right) \lambda + \frac{A_{III}}{\lambda_{(a)}} = \lambda^2 - 50\lambda - 3600 = 0$$

másodfokú egyenlet megoldása megadja a két hiányzó sajátértéket: $\lambda_{(b)} = 90$, $\lambda_{(c)} = -40$. Nagyság szerint rendezve

$$\lambda_{(1)} = \lambda_{(b)} = 90, \quad \lambda_{(2)} = \lambda_{(a)} = -10, \quad \lambda_{(3)} = \lambda_{(c)} = -40$$

Nyilvánvaló mostmár az is, hogy $\vec{g}_2 = \vec{n}_{(2)}$. Az $\vec{n}_{(1)}$ vektor az

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{(1)}^1 \\ n_{(1)}^2 \\ n_{(1)}^3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 85 - \lambda & 0 & 25 \\ 0 & -10 - \lambda & 0 \\ 25 & 0 & -35 - \lambda \end{vmatrix} \begin{bmatrix} n_{(1)}^1 \\ n_{(1)}^2 \\ n_{(1)}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ER megoldása. Független egyenletek választása után kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned} -5 n_{(1)}^1 + 25 n_{(1)}^3 &= 0 & \rightarrow & n_{(1)}^1 = 5 n_{(1)}^3 \\ -100 n_{(1)}^2 &= 0 & \rightarrow & n_{(1)}^2 = 0 \\ 25 n_{(1)}^1 - 125 n_{(3)}^3 &= 0 \end{aligned}$$

Mivel

$$[g_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a metrikus tenzor az $\vec{n}_{(1)}$ vektor normált koordinátáit illetően

$$n^k g_{kl} n^l = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 26$$

$$\vec{n}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{n^k g_{kl} n^l}} (5\vec{g}_1 + \vec{g}_3) = \frac{1}{\sqrt{26}} (5\vec{g}_1 + \vec{g}_3)$$

az eredmény. Ennek alapján az $\vec{n}_{(3)}$ kiszámítása egyszerűen történhet, ha figyelembe vesszük, hogy a sajátvektorok jobbsodratú ortogonális bázist kell, hogy alkossanak:

$$\vec{n}_{(3)} = \vec{n}_{(1)} \times \vec{n}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{26}} (5\vec{g}_1 + \vec{g}_3) \times \vec{g}_2 = \frac{1}{\sqrt{26}} (5\varepsilon_{123} \vec{g}^3 + \varepsilon_{312} \vec{g}^1) = \frac{\sqrt{g_o}}{\sqrt{26}} (5\vec{g}^3 - \vec{g}^1)$$

8. GYAKORLAT

SAJÁTÉRTÉK FELADAT VIZSGÁLATA

8.1. Szimmetrikus tenzor mátrixai

Az (x) görbevonallú KR $\underline{P}$ pontjában ismertek a

$$[g_{kl}] = \begin{bmatrix} 10 & 14 & 7 \\ 14 & 21 & 10 \\ 7 & 10 & 5 \end{bmatrix} \quad [g^{mn}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ -7 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

metrikus tenzorok.

A

$$\underline{\underline{B}} = b_{kl} \vec{g}^k \circ \vec{g}^l \quad [b_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

tenzor szimmetrikus.

Számítsuk ki a tenzor vegyes indesű és felső indexes koordinátáit!

Megoldás:

$$[b^k_l] = [g^{kn} b_{nl}] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ -7 & -2 & 14 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -42 & -91 \\ 0 & -8 & -20 \\ -7 & 76 & 170 \end{bmatrix}}_{\text{nem szimmetrikus a mátrix!}}$$

$$[b^l_k] = [b_{km} g^{ml}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 6 & 13 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ -7 & -2 & 14 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & -7 \\ -42 & -8 & 76 \\ -91 & -20 & 170 \end{bmatrix}}_{\text{nem szimmetrikus a mátrix!}}$$

$$[b^{kl}] = \underbrace{\begin{bmatrix} g^{kn} b_{nm} g^{ml} \\ b^k_m \end{bmatrix}}_{\text{szimmetrikus a mátrix!}} = \begin{bmatrix} 5 & -42 & -91 \\ 0 & -8 & -20 \\ -7 & 76 & 170 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -2 \\ -7 & -2 & 14 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 662 & 140 & -1225 \\ 140 & 32 & -264 \\ -1225 & -264 & 2277 \end{bmatrix}}_{\text{szimmetrikus a mátrix!}}$$

8.2. Ferdeszimmetrikus tenzor vizsgálata

Legyen

$$\underline{\underline{S}} = s_{pq} \vec{g}^p \circ \vec{g}^q$$

tenzor ferdeszimmetrikus. Határozzuk meg a tenzor skalárinvariánsait, sajátértékeit és a vonatkozó főirányokat.

Megoldás:

Az s_{pq} tenzor karakterisztikus egyenlete a sajátvektorokkal kapcsolatos ¹

$$(s_{pq} - \lambda g_{pq}) n^q = g_{pl} (s^l_q - \lambda \delta^l_q) n^q$$

egyenlet alapján

$$-|s_{pq} - \lambda g_{pq}| = -|g_{pl}| |s^l_q - \lambda \delta^l_q| = 0.$$

Melyből egyrésről:

$$\begin{aligned} -|s_{pq} - \lambda g_{pq}| &= \\ &= g_0 \lambda^3 - \\ &- \frac{1}{3!} e^{klm} e^{pqr} (s_{kp} g_{lq} g_{mr} + g_{kp} s_{lq} g_{mr} + g_{kq} g_{lq} s_{mr}) \lambda^2 + \\ &+ \frac{1}{3!} e^{klm} e^{pqr} (s_{kp} s_{lq} g_{mr} + s_{kp} g_{lq} s_{mr} + g_{kq} s_{lq} s_{mr}) \lambda - \\ &- \underbrace{\frac{1}{3!} e^{klm} e^{pqr} (s_{kp} s_{lq} s_{mr} + s_{kp} s_{lq} s_{mr} + s_{kq} s_{lq} s_{mr})}_{|s_{pq}|} \end{aligned}$$

másrésről:

$$g_0 (\lambda^3 - S_I \lambda^2 + S_{II} \lambda - S_{III}) = 0$$

A fentiek egybevetése alapján írható, hogy

$$S_I = \frac{1}{g_0} \left\{ \begin{vmatrix} s_{11} & g_{12} & g_{13} \\ s_{21} & g_{22} & g_{23} \\ s_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & s_{12} & g_{13} \\ g_{21} & s_{22} & g_{23} \\ g_{31} & s_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & s_{13} \\ g_{21} & g_{22} & s_{23} \\ g_{31} & g_{32} & s_{33} \end{vmatrix} \right\}$$

De hasonlóan felírható, hogy

$$\begin{aligned} S_I = s^k_k = g^{km} s_{mk} &= g^{11} \underbrace{s_{11}}_0 + g^{22} \underbrace{s_{22}}_0 + g^{33} \underbrace{s_{33}}_0 + \\ &+ \underbrace{(g^{12} s_{21} + g^{21} s_{12})}_0 + \underbrace{(g^{13} s_{31} + g^{31} s_{13})}_0 + \underbrace{(g^{23} s_{23} + g^{32} s_{23})}_0 = 0 \end{aligned}$$

Míg felírható az

$$S_{II} = \frac{1}{g_0} \left\{ \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & g_{13} \\ s_{21} & s_{22} & g_{23} \\ s_{31} & s_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & s_{12} & s_{13} \\ g_{21} & s_{22} & s_{23} \\ g_{31} & s_{32} & s_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s_{11} & g_{12} & s_{13} \\ s_{21} & g_{22} & s_{23} \\ s_{31} & g_{32} & s_{33} \end{vmatrix} \right\}$$

összefüggés is. Mivel $S_I = 0$ igaz, így fennáll az is, hogy

$$S_{II} = -\frac{1}{2} s^k_p s^p_k = -\frac{1}{2} s^{mn} s_{nm}$$

¹ Az hogy

$$s_{11} = s_{22} = s_{33} = 0, \quad \text{illetve} \quad s_{12} = -s_{21}, \quad s_{13} = -s_{31}, \quad s_{23} = -s_{32}$$

nem garantálja, hogy

$$s^1_1 = 0 \quad s^2_2 = 0 \quad \text{stb.}$$

hiszen például

$$s^1_1 = g^{1k} s_{k1} = g^{11} \underbrace{s_{11}}_{=0} + g^{12} s_{21} + g^{13} s_{31}$$

Az előjelviszonyok tisztázására tegyük fel, hogy ortogonális² a KR. Ekkor $g_{kl} = 0$ ha $k \neq l$ és $g_{kk} > 0$. Ortogonális KR-ben

$$s^1_{1} = g^{1l} s_{l1} = g^{11} s_{11} + g^{12} s_{21} + g^{13} s_{31} = 0$$

illetve hasonlóan adódik, hogy

$$s^2_{2} = s^3_{3} = 0.$$

Másrészt az is fennáll, hogy

$$s^{12} = g^{1l} s_l^{2} = g^{1l} g^{2k} s_{lk} = g^{11} g^{22} s_{12}$$

ugyanígy adódik, hogy

$$s^{13} = g^{11} g^{33} s_{13} \quad s^{23} = g^{22} g^{33} s_{23}.$$

Következésképpen

$$s^{ik} \quad \text{és} \quad s_{ik}$$

azonos előjelű. Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} S_{II} &= -\frac{1}{2} s^{mn} s_{nm} = \\ &= -\frac{1}{2} [s^{12} s_{21} + s^{21} s_{12} + \dots] = \\ &= \frac{1}{2} [s^{12} s_{12} + s^{21} s_{21} + \dots] > 0 \end{aligned}$$

$$S_{III} = \frac{1}{g_0} |s_{kl}| = \frac{1}{g_0} \begin{vmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & 0 & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{g_0} [s_{12} s_{23} s_{31} + s_{21} s_{32} s_{13}] = 0$$

Az invariánsokkal felírt karakterisztikus egyenlet

$$\lambda^3 + S_{II} \lambda = 0 \quad \lambda > 0$$

Következésképpen a $\lambda = 0$ az egyetlen valós sajátérték.

A hozzá tartozó $\vec{n}$ sajátvektorra nézve fennáll, hogy

$$(\underline{S} - \lambda \underline{I}) \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

azaz, hogy

$$\underline{S} \cdot \vec{n} = \vec{0}$$

De mivel

$$\underline{S} \cdot \vec{n} = \vec{s}_a \times \vec{n}$$

mely szerint $\vec{s}_a$ és $\vec{n}$ $\parallel$. A ferdeszimmetrikus tenzor vektorinvariánsa a tenzor főiránya.

² Ez nem sérti azz általánosságot, hiszen invariáns mennyiségről van szó.

9. GYAKORLAT

PÉLDÁK INDEXES JELÖLÉSRENDSZERBEN

9.1. Sajátértékek, sajátvektorok meghatározása

Valamely görbevonaliú KR egy $\underline{P}$ pontjában

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= \vec{i}_1, & \vec{g}_2 &= \frac{1}{2}\vec{i}_2, & \vec{g}_3 &= \vec{i}_3, \\ \vec{g}^1 &= \vec{i}^1, & \vec{g}^2 &= 2\vec{i}^2, & \vec{g}^3 &= \vec{i}^3\end{aligned}$$

a kovariáns és kontravariáns bázisvektorok következőleg

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [g^{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a metrikus tenzorok továbbá

$$[\tau_n^l] = [\vec{g}_n \cdot \vec{i}^l] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [t_l^k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a két transzformációs tenzor. Adott a $\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$ tenzor vegyesindexes alakjának mátrixa a görbevonaliú KR tekintett pontjában:

$$[B^p_q] = \begin{bmatrix} 104 & 30 & 0 \\ 120 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}$$

Ellenőrizze, hogy szimmetrikus-e a tenzor majd számítsa ki a tenzor sajátértékeit, sajátvektorait, illetve ha pozitív definit akkor a négyzetgyökét is!

Megoldás:

1. A tenzor szimmetriájának ellenőrzésére számítsuk ki a kontravariáns koordinátákat (összetevőket):

$$[B^{mn}] = [B^m_q g^{qn}] = \begin{bmatrix} 104 & 30 & 0 \\ 120 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 104 & 120 & 0 \\ 120 & 160 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix}$$

Mivel $B^{mn} = B^{nm}$ a tenzor szimmetrikus.

2. A karakterisztikus egyenlet az

$$\begin{aligned}-|B^p_q - \lambda \delta^p_q| &= -\left| \begin{bmatrix} 104 - \lambda & 30 & 0 \\ 120 & 40 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 48 - \lambda \end{bmatrix} \right| = (\lambda - 48) \left| \begin{bmatrix} 104 - \lambda & 30 \\ 120 & 40 - \lambda \end{bmatrix} \right| \\ &= (\lambda - 48) (\lambda^2 - 144\lambda + 560)\end{aligned}$$

alakban írható le, ahonnan

$$\lambda_1 = 140 \quad \lambda_2 = 48 \quad \text{és} \quad \lambda_3 = 4$$

a három sajátérték. Következésképp pozitív definit a tenzor és van négyzetgyöke.

3. Nyilvánvaló, hogy a $\vec{g}_3$ irány második főirány

$$\vec{n}_{(2)} = \vec{g}_3$$

Az első főirányt adó

$$\vec{n}_{(1)} = n_{(1)}^k \vec{g}_k$$

vektor a

$$(104 - \lambda_1) n_{(1)}^1 + 30 n_{(1)}^2 = -36 n_{(1)}^1 + 30 n_{(1)}^2 = 0$$

vagypedig a

$$120 n_{(1)}^1 + (40 - \lambda_1) n_{(1)}^2 = 120 n_{(1)}^1 - 100 n_{(1)}^2$$

egyenletekből számítható. Az eredmény

$$n_{(1)}^1 = \frac{5}{6} n_{(1)}^2$$

A főirányok merőlegessége miatt az is nyilvánvaló, hogy

$$n_{(1)}^3 = 0$$

A normálási feltétel szerint

$$n_{(1)}^k g_{kl} n_{(1)}^l = n_{(1)}^1 g_{11} n_{(1)}^1 + n_{(1)}^2 g_{22} n_{(1)}^2 = \left(\frac{25}{36} + \frac{1}{4} \right) n_{(1)}^2 n_{(1)}^2 = 1$$

ahonnan

$$n_{(1)}^2 = \frac{6}{\sqrt{34}} \quad \text{és} \quad n_{(1)}^1 = \frac{5}{\sqrt{34}}$$

Végeredményben

$$\vec{n}_{(1)} = \frac{1}{\sqrt{34}} (5\vec{g}_1 + 6\vec{g}_2) = \frac{1}{\sqrt{34}} \left(5\vec{g}^1 + \frac{6}{4}\vec{g}^2 \right)$$

A harmadik főirány abból a feltételből adódik, hogy jobbsodratú kartéziusz KR-t alkotnak a főirányok egységvektorai:

$$\begin{aligned} \vec{n}_{(3)} &= \vec{n}_{(1)} \times \vec{n}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{34}} (5\vec{g}_1 + 6\vec{g}_2) \times \vec{g}_3 = \frac{1}{\sqrt{34}} (5\varepsilon_{132} 5\vec{g}^2 + 6\varepsilon_{231} \vec{g}_1) = \\ &= \frac{\sqrt{g_o}}{\sqrt{34}} (6\vec{g}^1 - 5\vec{g}^2) = \frac{1}{\sqrt{136}} (6\vec{g}^1 - 5\vec{g}^2) = \frac{1}{\sqrt{136}} (6\vec{g}_1 - 20\vec{g}_2) . \end{aligned}$$

4. A főtengekelyk KR-ében

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}} &= \lambda_1 \vec{n}_{(1)} \circ \vec{n}_{(1)} + \lambda_2 \vec{n}_{(2)} \circ \vec{n}_{(2)} + \lambda_3 \vec{n}_{(3)} \circ \vec{n}_{(3)} = \\ &= 140 \vec{n}_{(1)} \circ \vec{n}_{(1)} + 48 \vec{n}_{(2)} \circ \vec{n}_{(2)} + 4 \vec{n}_{(3)} \circ \vec{n}_{(3)} \end{aligned}$$

a $\underline{\underline{B}}$ tenzor mátrixa és

$$\underline{\underline{V}} = \sqrt{140} \vec{n}_{(1)} \circ \vec{n}_{(1)} + \sqrt{48} \vec{n}_{(2)} \circ \vec{n}_{(2)} + 2 \vec{n}_{(3)} \circ \vec{n}_{(3)}$$

a tenzor négyzetgyöke, hiszen

$$\underline{\underline{V}}^2 = \underline{\underline{B}} .$$

5. Az (x) görbevonaliú KR-re térve át írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}\underline{V} &= \frac{\sqrt{140}}{34} (5\vec{g}_1 + 6\vec{g}_2) \circ \left(5\vec{g}^1 + \frac{6}{4}\vec{g}^2\right) + \sqrt{48}\vec{g}_3 \circ \vec{g}^3 + \frac{1}{68} (6\vec{g}_1 - 20\vec{g}_2) \circ (6\vec{g}^1 - 5\vec{g}^2) = \\ &= \left\{ \frac{\sqrt{140}}{34} (25\vec{g}_1 + 30\vec{g}_2) + \frac{1}{68} (36\vec{g}_1 - 120\vec{g}_2) \right\} \circ \vec{g}^1 + \\ &+ \left\{ \frac{3\sqrt{140}}{68} (5\vec{g}_1 + 6\vec{g}_2) - \frac{5}{68} (6\vec{g}_1 - 20\vec{g}_2) \right\} \circ \vec{g}^2 + \sqrt{48}\vec{g}_3 \circ \vec{g}^3\end{aligned}$$

azaz, hogy

$$\begin{aligned}\underline{V} &= \left\{ \frac{50\sqrt{140}+36}{68}\vec{g}_1 + \frac{60\sqrt{140}-120}{68}\vec{g}_2 \right\} \circ \vec{g}^1 + \\ &+ \left\{ \frac{15\sqrt{140}-30}{68}\vec{g}_1 + \frac{18\sqrt{140}+100}{68}\vec{g}_2 \right\} \circ \vec{g}^2 + \sqrt{48}\vec{g}_3 \circ \vec{g}^3\end{aligned}$$

Következésképp

$$[V_q^m] = \begin{bmatrix} \frac{50\sqrt{140}+36}{68} & \frac{15\sqrt{140}-30}{68} & 0 \\ \frac{60\sqrt{140}-120}{68} & \frac{18\sqrt{140}+100}{68} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{48} \end{bmatrix}$$

és amint az némi számolással ellenőrzésként adódik:

$$\begin{aligned}[V_q^m V_n^q] &= \begin{bmatrix} \frac{50\sqrt{140}+36}{68} & \frac{15\sqrt{140}-30}{68} & 0 \\ \frac{60\sqrt{140}-120}{68} & \frac{18\sqrt{140}+100}{68} & 0 \\ 0 & 0 & +\sqrt{48} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{50\sqrt{140}+36}{68} & \frac{15\sqrt{140}-30}{68} & 0 \\ \frac{60\sqrt{140}-120}{68} & \frac{18\sqrt{140}+100}{68} & 0 \\ 0 & 0 & +\sqrt{48} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 104 & 30 & 0 \\ 120 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 48 \end{bmatrix} = [B_n^m] .\end{aligned}$$

9.2. Határozzuk meg

hogy mi az összefüggés

$$a_{kl} \quad a_k^l \quad a^{mn} \quad a_l^m$$

determinánsai között!

Megoldás:

A determinánsok szorzástételét felhasználva

$$\begin{aligned}|a_{kl}| &= |g_{km} a_l^m| = g_0 |a_l^m| \\ &= |g_{km} a^{mn} g_{nl}| = g_0^2 |a^{mn}| \\ &= |a_k^n g_{nl}| = |a_k^n| g_0\end{aligned}$$

Következésképp

$$|a_k^n| = |a_l^m|$$

Ugyanígy írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}|a^{kl}| &= |g^{km} a_m^l| = g^0 |a_m^l| \\ &= |g^{km} a_{mn} g^{nl}| = (g^0)^2 |a_{mn}| \\ &= |a_n^k g^{nl}| = |a_n^k| g^0\end{aligned}$$

9.3. Poláris felbontás képzése

Valamely görbevonali KR egy $\underline{P}$ pontjában

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= \vec{i}_1, & \vec{g}_2 &= \frac{1}{2}\vec{i}_2, & \vec{g}_3 &= \vec{i}_3, \\ \vec{g}^1 &= \vec{i}^1, & \vec{g}^2 &= 2\vec{i}^2, & \vec{g}^3 &= \vec{i}^3\end{aligned}$$

a kovariáns és kontravariáns bázisvektorok következőleg

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [g^{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a metrikus tenzorok továbbá

$$[\tau_n^l] = [\vec{g}_n \cdot \vec{i}^l] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [t_l^k] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a két transzformációs tenzor. Adottak az $\underline{F}$ tenzor kontravariáns-kovariáns és kovariáns kontravariáns koordinátái az (x) görbevonali KR-ben:

$$[F_q^n] = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix} \quad [F_m^r] = \begin{bmatrix} 0 & -3.2 & -1.2 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 2.4 & 3.4 \end{bmatrix}$$

Határozza meg a tenzor poláris felbontásait!

Megoldás:

1. Első lépésben a $\underline{C} = C_l^k \vec{g}_k \circ \vec{g}^l = \underline{F}^T \cdot \underline{F}$ tenzort számítjuk ki:

$$[C_l^k] = [(F^T)^k_s F_l^s] = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -3.2 & 0 & 2.4 \\ -1.2 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & 13 \end{bmatrix}$$

2. A karakterisztikus egyenlet mostmár a

$$\begin{aligned}-|C_q^p - \lambda C_q^p| &= -\left| \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 4-\lambda & 12 \\ 0 & 3 & 13-\lambda \end{bmatrix} \right| = (\lambda-1) \left| \begin{bmatrix} 4-\lambda & 12 \\ 3 & 13-\lambda \end{bmatrix} \right| = \\ &= (\lambda-1)(\lambda^2 - 17\lambda + 16)\end{aligned}$$

alakban írható fel, ahonnan

$$\lambda_1 = 16 \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

a három sajátérték. Következésképp pozitív definit a tenzor és van négyzetgyöke.

3. Nyilvánvaló, hogy a $\vec{g}_1$ irány a második főirány

$$\vec{n}_{(2)} = \vec{g}_1$$

Az első főirányt adó

$$\vec{n}_{(1)} = n_{(1)}^k \vec{g}_k$$

vektor a

$$(4-\lambda_1) n_{(1)}^2 + 12 n_{(1)}^3 = -12 n_{(1)}^2 + 12 n_{(1)}^3 = 0$$

vagypedig a

$$3 \underset{(1)}{n}^2 + (13 - \lambda_1) \underset{(1)}{n}^3 = 3 \underset{(1)}{n}^2 - 3 \underset{(1)}{n}^3$$

egyenletekből számítható. Az eredmény

$$\underset{(1)}{n}^2 = \underset{(1)}{n}^3$$

A főirányok merőlegessége miatt az is nyilvánvaló, hogy

$$\underset{(1)}{n}^1 = 0$$

A normálási feltétel szerint

$$\begin{aligned} \underset{(1)}{n}^k g_{kl} \underset{(1)}{n}^l &= \underset{(1)}{n}^2 g_{22} \underset{(1)}{n}^2 + \underset{(1)}{n}^3 g_{22} \underset{(1)}{n}^3 = (g_{22} + g_{33}) \underset{(1)}{n}^2 \underset{(1)}{n}^2 = \\ &= \left(\frac{1}{4} + 1 \right) \underset{(1)}{n}^2 \underset{(1)}{n}^2 = 1 \end{aligned}$$

ahonnan

$$\underset{(1)}{n}^2 = \underset{(1)}{n}^3 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Végeredményben

$$\vec{\underset{(1)}{n}} = \frac{2}{\sqrt{5}} (\vec{g}_2 + \vec{g}_3) = \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\frac{1}{4} \vec{g}^2 + \vec{g}^3 \right)$$

A harmadik főirány abból a feltételből adódik, hogy jobbsodratú kartézis KR-t alkotnak a főirányok egységvektorai:

$$\begin{aligned} \vec{\underset{(3)}{n}} &= \vec{\underset{(1)}{n}} \times \vec{\underset{(2)}{n}} = \frac{2}{\sqrt{5}} (\vec{g}_2 + \vec{g}_3) \times \vec{g}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} (\varepsilon_{213} \vec{g}^3 + \varepsilon_{312} \vec{g}^2) = \\ &= \frac{2\sqrt{g_0}}{\sqrt{5}} (\vec{g}^2 - \vec{g}^3) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\vec{g}^2 - \vec{g}^3) = \frac{1}{\sqrt{5}} (4\vec{g}_2 - \vec{g}_3) \end{aligned}$$

4. A főtengelyek KR-ében

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} &= \lambda_1 \vec{\underset{(1)}{n}} \circ \vec{\underset{(1)}{n}} + \lambda_2 \vec{\underset{(2)}{n}} \circ \vec{\underset{(2)}{n}} + \lambda_3 \vec{\underset{(3)}{n}} \circ \vec{\underset{(3)}{n}} = \\ &= 16 \vec{\underset{(1)}{n}} \circ \vec{\underset{(1)}{n}} + \vec{\underset{(2)}{n}} \circ \vec{\underset{(2)}{n}} + \vec{\underset{(3)}{n}} \circ \vec{\underset{(3)}{n}} \end{aligned}$$

a $\underline{\underline{C}}$ tenzor diádikus alakja és

$$\underline{\underline{U}} = 4 \vec{\underset{(1)}{n}} \circ \vec{\underset{(1)}{n}} + \vec{\underset{(2)}{n}} \circ \vec{\underset{(2)}{n}} + \vec{\underset{(3)}{n}} \circ \vec{\underset{(3)}{n}}$$

a tenzor négyzetgyöke, hiszen

$$\underline{\underline{U}}^2 = \underline{\underline{C}}.$$

5. Az is nyilvánvaló, hogy

$$\underline{\underline{U}}^{-1} = \frac{1}{4} \vec{\underset{(1)}{n}} \circ \vec{\underset{(1)}{n}} + \vec{\underset{(2)}{n}} \circ \vec{\underset{(2)}{n}} + \vec{\underset{(3)}{n}} \circ \vec{\underset{(3)}{n}}$$

6. Az (x) görbevonali KR-re áttérve írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \underline{\underline{U}} &= \frac{16}{5} (\vec{g}_2 + \vec{g}_3) \circ \left(\frac{1}{4} \vec{g}^2 + \vec{g}^3 \right) + \vec{g}_1 \circ \vec{g}^1 + \frac{1}{5} (4\vec{g}_2 - \vec{g}_3) \circ (\vec{g}^2 - \vec{g}^3) = \\ &= \vec{g}_1 \circ \vec{g}^1 + \left\{ \frac{4}{5} (\vec{g}_2 + \vec{g}_3) + \frac{1}{5} (4\vec{g}_2 - \vec{g}_3) \right\} \circ \vec{g}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{16}{5} (\vec{g}_2 + \vec{g}_3) - \frac{1}{5} (4\vec{g}_2 - \vec{g}_3) \right\} \circ \vec{g}^3 \end{aligned}$$

azaz, hogy

$$\underline{\underline{U}} = \vec{g}_1 \circ \vec{g}^1 + \left\{ \frac{8}{5} \vec{g}_2 + \frac{3}{5} \vec{g}_3 \right\} \circ \vec{g}^2 + \left\{ \frac{12}{5} \vec{g}_2 + \frac{17}{5} \vec{g}_3 \right\} \circ \vec{g}^3$$

Következésképp

$$[U^m_q] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix}$$

és amint az némi számolással ellenőrzésként adódik:

$$[U^m_q U^q_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & 13 \end{bmatrix} = [C^m_n] .$$

Az is adódik, némi számolással, hogy

$$\begin{aligned} \underline{\underline{U}}^{-1} &= \frac{1}{5} (\vec{g}_2 + \vec{g}_3) \circ \left(\frac{1}{4} \vec{g}^2 + \vec{g}^3 \right) + \vec{g}_1 \circ \vec{g}^1 + \frac{1}{5} (4\vec{g}_2 - \vec{g}_3) \circ (\vec{g}^2 - \vec{g}^3) = \\ &= \vec{g}_1 \circ \vec{g}^1 + \left\{ \frac{1}{20} (\vec{g}_2 + \vec{g}_3) + \frac{1}{5} (4\vec{g}_2 - \vec{g}_3) \right\} \circ \vec{g}^2 + \\ &+ \left\{ \frac{1}{5} (\vec{g}_2 + \vec{g}_3) - \frac{1}{5} (4\vec{g}_2 - \vec{g}_3) \right\} \circ \vec{g}^3 \\ \underline{\underline{U}}^{-1} &= \vec{g}_1 \circ \vec{g}^1 + \left\{ \frac{17}{20} \vec{g}_2 - \frac{3}{5} \vec{g}_3 \right\} \circ \vec{g}^2 + \left\{ -\frac{3}{5} \vec{g}_2 + \frac{2}{5} \vec{g}_3 \right\} \circ \vec{g}^3 \\ [(U^{-1})^m_q] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{20} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{20} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Valóban

$$[U^k_s (U^{-1})^s_l] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{17}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{20} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{20} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7. A forgató tenzor különböző alakjai pedig az alábbiak szerint adódnak:

$$\begin{aligned} [R^k_l] &= [F^k_s (U^{-1})^s_l] = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{20} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{20} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [R_{nm}] &= [g_{nk} R^k_m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [R_n^m] &= [R_{ns} g^{sm}] = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [R^n_m] &= [g^{np} R_p^m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ellenőrzésként számítsuk ki az $\underline{\underline{R}} \cdot \underline{\underline{R}}^T$ szorzatot:

$$[Q^k_r (Q^T)^r_p] = [Q^k_r Q_p^r] = \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Az (y) KR-ben

$$[R_{pq}] = [t_p^n R_{nm} t_q^m] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a forgató tenzor.

8. Végezetül a $\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{R}}^T$ képlet alapján kapjuk, hogy

$$[V^k_l] = [F^k_s (R^T)^s_l] = [F^k_s R_l^s] = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1.2 & 0 & 3.4 \end{bmatrix}$$

amivel

$$[V^k_l V^l_s] = \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1.2 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.6 & 0 & -1.2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1.2 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Másrésről, mivel $\underline{\underline{V}}^2 = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{F}}^T$ mód van az ellenőrzésre is:

$$[F^k_s (F^T)^s_l] = [F^k_s F_l^s] = \begin{bmatrix} 0 & -0.8 & -1.2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.6 & 3.4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 \\ -3.2 & 0 & 2.4 \\ -1.2 & 0 & 3.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Ezzel a feladatot megoldottuk.

9.4. Állítsunk elő ortogonális tenzort!

Az előállított geometriai kép alapján a $\det(Q^k_s) = 1$ esetben a $\underline{\underline{Q}}$ ortogonális tenzort forgatásnak, vagy forgató tenzornak nevezik és $\underline{\underline{R}}$ -el jelölik. Az $\underline{\underline{R}}$ forgató tenzorok az ortogonális tenzorok egy alcsoportját alkotják.

Ortogonalis tenzorok többféleképpen képezhetőek. Legyen $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ és $(\vec{e}_\xi, \vec{e}_\eta, \vec{e}_\zeta)$ két egymástól különböző ortonormális vektorhármas.

$$\vec{e}_x \cdot \vec{e}_x = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z = 1 \quad \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y = \vec{e}_y \cdot \vec{e}_z = \vec{e}_x \cdot \vec{e}_z = 0$$

$$\vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\xi = \vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_\eta = \vec{e}_\zeta \cdot \vec{e}_\zeta = 1 \quad \vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\eta = \vec{e}_\xi \cdot \vec{e}_\zeta = \vec{e}_\eta \cdot \vec{e}_\zeta = 0$$

Melyből a következő

$$\underline{\underline{Q}} = \vec{e}_x \circ \vec{e}_\xi + \vec{e}_y \circ \vec{e}_\eta + \vec{e}_z \circ \vec{e}_\zeta$$

tenzor ortogonális, hiszen

$$\underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} = (\vec{e}_\xi \circ \vec{e}_x + \vec{e}_\eta \circ \vec{e}_y + \vec{e}_\zeta \circ \vec{e}_z) \cdot (\vec{e}_x \circ \vec{e}_\xi + \vec{e}_y \circ \vec{e}_\eta + \vec{e}_z \circ \vec{e}_\zeta) = \vec{e}_\xi \circ \vec{e}_\xi + \vec{e}_\eta \circ \vec{e}_\eta + \vec{e}_\zeta \circ \vec{e}_\zeta = \underline{\underline{I}}$$

illetve hasonlóan belátható, hogy

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \vec{e}_x \circ \vec{e}_x + \vec{e}_y \circ \vec{e}_y + \vec{e}_z \circ \vec{e}_z = \underline{\underline{I}}.$$

Az is nyilvánvaló, hogy

$$\vec{e}_x = \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{e}_\xi \quad \vec{e}_y = \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{e}_\eta \quad \vec{e}_z = \underline{\underline{Q}} \cdot \vec{e}_\zeta$$

illetve

$$\vec{e}_\xi = \underline{\underline{Q}}^{-1} \cdot \vec{e}_x = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \vec{e}_x \quad \vec{e}_\eta = \underline{\underline{Q}}^{-1} \cdot \vec{e}_y = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \vec{e}_y \quad \vec{e}_\zeta = \underline{\underline{Q}}^{-1} \cdot \vec{e}_z = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \vec{e}_z$$

A leképezés forgatás, mivel $\det(Q^k_s) = 1$. Ha $\vec{e}_z = \vec{e}_\zeta$ és mivel fogatást jelent a leképezés, így írható, hogy

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{R}} = \vec{e}_x \circ \vec{e}_\xi + \vec{e}_y \circ \vec{e}_\eta + \vec{e}_z \circ \vec{e}_\zeta$$

és

$$\vec{e}_x = \underline{\underline{R}} \cdot \vec{e}_\xi \quad \vec{e}_y = \underline{\underline{R}} \cdot \vec{e}_\eta \quad \vec{e}_z = \vec{e}_\zeta = \underline{\underline{R}} \cdot \vec{e}_\zeta$$

ami világosan mutatja, hogy a $\vec{e}_\zeta$ vektort önmagára képezi le az $\underline{\underline{R}}$ tenzor, míg az $\vec{e}_\xi$ és $\vec{e}_\eta$ vektorok rendre az $\vec{e}_x$ és $\vec{e}_y$ vektorokba fordulnak el.

9.5. Igazolás

Legyen $\vec{a}$ egységvektor. Igazolja, hogy az alábbi tenzor ortogonális:

$$\underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}} - 2\vec{a} \circ \vec{a}$$

Megoldás:

$$\underline{\underline{Q}}^T = (\underline{\underline{I}} - 2\vec{a} \circ \vec{a})^T = \underline{\underline{I}} - 2\vec{a} \circ \vec{a}$$

Ekkor felírva

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = (\underline{\underline{I}} - 2\vec{a} \circ \vec{a}) \cdot (\underline{\underline{I}} - 2\vec{a} \circ \vec{a}) = \underline{\underline{I}} - 2\vec{a} \circ \vec{a} - 2\vec{a} \circ \vec{a} + 4\underbrace{\vec{a} \cdot \vec{a}}_1 \cdot (\vec{a} \circ \vec{a}) = \underline{\underline{I}}$$

9.6. Mutassa meg

hogy $\underline{\underline{Q}}^n$ ortogonális tenzor! Ha tudjuk, hogy $\underline{\underline{Q}}$ ortogonális, továbbá n egy pozitív egész szám.

Megoldás:

$n = 1$ -re igaz a feltevés szerint, mely alapján tudjuk, hogy

$$\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$$

Ha $n = 2$ akkor a következőt kapjuk:

$$\underline{\underline{Q}}^2 = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} \quad \left(\underline{\underline{Q}}^2\right)^T = \left(\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}\right)^T = \underline{\underline{Q}}^T \cdot \underline{\underline{Q}}^T$$

Ekkor felírható, hogy

$$\underline{\underline{Q}}^2 \cdot \left(\underline{\underline{Q}}^2\right)^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underbrace{\underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T}_{\underline{\underline{I}}} \cdot \underline{\underline{Q}}^T = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{\underline{Q}} = \underline{\underline{I}}$$

mely az $n = 2$ -re történő igazolás volt. Hasonlóan belátható az $n \geq 2$ esetekre is az állítás.

10. GYAKORLAT

DERIVÁLIS GÖRBEVONALÚ KOORDINÁTARENDSZERBEN

10.1. Christoffel szimbólumok

Vannak-e azonosan zérus Christoffel szimbólumok egy ortogonális görbevonalú koordinátarendszerben?

Megoldás:

Az előadáson elhangzottak alapján, az elsőfajú Christoffel szimbólumokra érvényes a következő összefüggés:

$$\Gamma_{pr,s} = \frac{1}{2} (\partial_p g_{rs} + \partial_r g_{ps} - \partial_s g_{pr}).$$

Azonban tudjuk, hogy egy ortogonális koordinátarendszerben:

$$g_{KK} \neq 0 \quad g_{KL} = 0, \quad \text{ha } K \neq L$$

Ezen utóbbi feltételeket kihasználva írhatjuk, hogy

$$\Gamma_{KL,M} = \frac{1}{2} (\partial_K g_{LM} + \partial_L g_{MK} - \partial_M g_{KL}) \equiv 0 \quad \text{ha } K \neq L \neq M$$

illetve

$$\begin{aligned}\Gamma_{PP,M} &= \frac{1}{2} (\partial_P g_{PM} + \partial_P g_{PM} - \partial_M g_{PP}) = -\frac{1}{2} \partial_M g_{PP} \\ \Gamma_{PM,P} &= \Gamma_{MP,P} = \frac{1}{2} (\partial_P g_{MP} + \partial_M g_{PP} - \partial_P g_{MP}) = \frac{1}{2} \partial_M g_{PP} \\ \Gamma_{PP,P} &= \frac{1}{2} \partial_P g_{PP}\end{aligned}$$

Ezen fenti képletek segítségével viszonylag gyorsan meghatározhatóak a Christoffel szimbólumok, ortogonális görbevonalú koordináta rendszerben.

Határozzuk meg a Christoffel szimbólumokat hengerkoordináta rendszerben!

A megoldáshoz szükségesek a korábbi gyakorlaton már felírt kovariáns és kontravariáns metrikus tenzorok mátrixai:

$$[g_{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad [g^{kl}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x^1)^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Az előző feladatnál felírt formulák segítségével azonnal kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Gamma_{PP,1} &= -\frac{1}{2}\partial_1 g_{PP} & \Gamma_{PP,2} &= \Gamma_{PP,3} = 0 \\ \Gamma_{1M,1} &= \frac{1}{2}\partial_1 g_{MM} & \Gamma_{2M,2} &= \Gamma_{3M,3} = 0 \\ \Gamma_{PP,P} &= 0 \end{aligned}$$

ahonnan következik, hogy

$$\Gamma_{22,1} = -x^1 = -r \quad \text{és} \quad \Gamma_{12,2} = \Gamma_{21,2} = x^1 = r$$

a nem azonosan zérus elsőfajú Christoffel szimbólumok.

A nem azonosan zérus másodfajú Christoffel szimbólumok indexemeléssel adódnak:

$$\begin{aligned} \Gamma_{22}^1 &= \Gamma_{22,1}g^{11} = -x^1 = -r \\ \Gamma_{21}^2 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21,2}g^{22} = \frac{1}{x^1} = \frac{1}{r}. \end{aligned}$$

10.2. Igazoljuk

hogy a metrikus tenzor kovariáns deriváltja eltűnik, azaz

$$g_{kl;m} = 0$$

Megoldás:

- Az előadáson elhangzottak alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} g_{kl;m} &= g_{kl,m} - \Gamma_{km}^s g_{sl} - \Gamma_{lm}^s g_{ks} = \vec{g}_{k,m} \cdot \vec{g}_l + \vec{g}_{l,m} \cdot \vec{g}_k - \Gamma_{km}^s g_{sl} - \Gamma_{lm}^s g_{ks} = \\ &= \Gamma_{km}^s \vec{g}_s \cdot \vec{g}_l + \Gamma_{lm}^s \vec{g}_s \cdot \vec{g}_k - \Gamma_{km}^s g_{sl} - \Gamma_{lm}^s g_{sk} = 0 \end{aligned}$$

- Legyen $\vec{c} = c^l \vec{g}_l$ vektor állandó. Következésképp a

$$\vec{c}^2 = (c^k \vec{g}_k) \cdot (c^l \vec{g}_l) = c^k c^l g_{kl}$$

szorzat is állandó. A továbbiakban azt fogjuk kihasználni, hogy állandó vektor és állandó skalár kovariáns deriváltja zérus, azaz

$$(\vec{c}^2)_{;m} = c^k_{;m} c^l g_{kl} + c^k c^l_{;m} g_{kl} + c^k c^l g_{kl;m} = c^k c^l g_{kl;m} = 0$$

Mivel ez az egyenlet bármilyen konstans $\vec{c} \neq \vec{0}$ vektorra fennáll, így

$$g_{kl;m} = 0.$$

10.3. Igazoljuk

hogy az epsilon tenzor kovariáns deriváltja eltűnik, azaz

$$\varepsilon^{pqr}{}_{;m} = 0.$$

Megoldás:

- felhasználva a kontravariáns tenzorok deriválási szabályát, írhatjuk, hogy

$$\varepsilon^{pqr}{}_{;m} = \varepsilon^{pqr}{}_{,m} + \Gamma_{ms}^p \varepsilon^{sqr} + \Gamma_{ms}^q \varepsilon^{psr} + \Gamma_{ms}^r \varepsilon^{pqs}$$

ahol

$$\begin{aligned} \varepsilon^{pqr}{}_{;m} &= [\vec{g}^p \vec{g}^q \vec{g}^r] \partial_m = -\Gamma_{ms}^p [\vec{g}^s \vec{g}^q \vec{g}^r] - \Gamma_{ms}^q [\vec{g}^p \vec{g}^s \vec{g}^r] - \Gamma_{ms}^r [\vec{g}^p \vec{g}^q \vec{g}^s] = \\ &= -\Gamma_{ms}^p \varepsilon^{sqr} - \Gamma_{ms}^q \varepsilon^{psr} - \Gamma_{ms}^r \varepsilon^{pqr} \end{aligned}$$

amivel rögtön adódik, hogy az

$$\varepsilon^{pqr}{}_{;m} = 0.$$

- Legyen $\vec{a} = a_p \vec{g}^p$ és $\vec{b} = b_q \vec{g}^q$ konstans vektorok $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ és $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{0}$. Következésképpen a $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ vektor is állandó. Mivel állandó vektorok kovariáns deriváltja zérus, írhatjuk, hogy

$$c_{k;m} = (\varepsilon^{pqr} a_p b_q)_{;m} = \varepsilon^{pqr}{}_{;m} a_p b_q + \varepsilon^{pqr} a_{p;m} b_q + \varepsilon^{pqr} a_p b_{q;m} = \varepsilon^{pqr}{}_{;m} a_p b_q = 0$$

Mivel ez az egyenlet bármilyen nem azonosan zérus és egymással nem párhuzamos $\vec{a}$ és $\vec{b}$ -re igaz, így fennáll a

$$\varepsilon^{pqr}{}_{;m} = 0.$$

10.4. Igazoljuk

hogy

$$(\sqrt{g_0})_{;s} = (\gamma_0)_{;s} = \gamma_0 \Gamma_{ls}^l.$$

Megoldás:

Tudjuk, hogy

$$\gamma_0 \underbrace{\varepsilon_{123}}_1 = \varepsilon_{123} = [\vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_3].$$

A szorzatderiválás szabályának alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} (\gamma_0)_{;s} &= \gamma_0 \partial_s = \partial_s [\vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_3] = \\ &= [(\partial_s \vec{g}_1) \vec{g}_2 \vec{g}_3] + [\vec{g}_1 (\partial_s \vec{g}_2) \vec{g}_3] + [\vec{g}_1 \vec{g}_2 (\partial_s \vec{g}_3)] = \Gamma_{s1}^l [\vec{g}_l \vec{g}_2 \vec{g}_3] + \Gamma_{s2}^l [\vec{g}_1 \vec{g}_l \vec{g}_3] + \Gamma_{s3}^l [\vec{g}_1 \vec{g}_2 \vec{g}_l] = \\ &= \Gamma_{s1}^1 \varepsilon_{123} + \Gamma_{s2}^2 \varepsilon_{123} + \Gamma_{s3}^3 \varepsilon_{123} = \varepsilon_{123} \Gamma_{ls}^l = \gamma_0 \Gamma_{ls}^l \end{aligned}$$

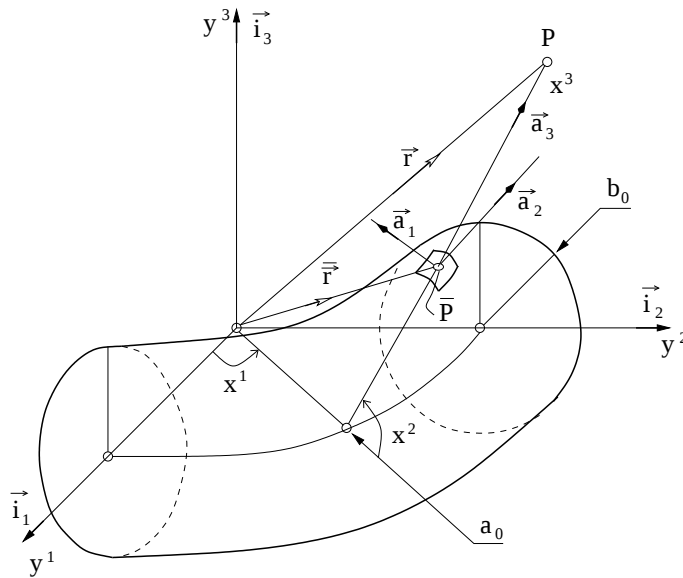
Ez egyben a feladat megoldása is.

11. GYAKORLAT

HÉJELMÉLETI PÉLDÁK

10.1. Tóruszra épített térbeli KR vizsgálata

Határozzuk meg a vázolt tóruszra épített térbeli, illetve felületi koordináta rendszer bázisvektorait, a metrikus tenzorokat, a görbületi tenzort és a görbületi viszonyokat. A számítások során az ábra jelöléseit alkalmazzuk.



10.1. ábra. Jelölések a tóruszhoz kötött rendszerben

Megoldás:

A $\bar{P}$ pont helyvektora

$$\vec{r} = (a_0 + b_0 \cos x^2) \cos x^1 \vec{i}_1 + (a_0 + b_0 \cos x^2) \sin x^1 \vec{i}_2 + b_0 \sin x^2 \vec{i}_3$$

alakú. Az is leolvasható az ábrából, hogy

$$\vec{a}_3 = \cos x^2 \cos x^1 \vec{i}_1 + \cos x^2 \sin x^1 \vec{i}_2 + \sin x^2 \vec{i}_3$$

a tóruszfelület $\bar{P}$ pontbeli külső normális egységvektora. A P pontbeli bázisvektorok az előadásban

elhazottak szerint számíthatók:

$$\begin{aligned}
\vec{g}_1 &= \partial_1 \vec{r} = \partial_1 \left(\vec{r} + x^3 \vec{a}_3 \right) = \left(\partial_1 \vec{r} \right) + x^3 \left(\partial_1 \vec{a}_3 \right) = \\
&= - \left(a_0 + b_0 \cos x^2 \right) \sin x^1 \vec{i}_1 + \left(a_0 + b_0 \cos x^2 \right) \cos x^1 \vec{i}_2 + \\
&+ x^3 \left(- \cos x^2 \sin x^1 \vec{i}_1 + \cos x^2 \cos x^1 \vec{i}_2 \right) = \\
&= - \left[a_0 + (b + x^3) \cos x^2 \right] \sin x^1 \vec{i}_1 + \left[a_0 + (b + x^3) \cos x^2 \right] \sin x^1 \vec{i}_2 \\
\vec{g}_2 &= \partial_2 \vec{r} = \partial_2 \left(\vec{r} + x^3 \vec{a}_3 \right) = \left(\partial_2 \vec{r} \right) + x^3 \left(\partial_2 \vec{a}_3 \right) = \\
&= - \left(b_0 + x^3 \right) \cos x^1 \sin x^2 \vec{i}_1 - \left(b_0 + x^3 \right) \sin x^1 \sin x^2 \vec{i}_2 + \left(b_0 + x^3 \right) \cos x^2 \vec{i}_3 \\
\vec{g}_3 &= \partial_3 \vec{r} = \partial_3 \left(\vec{r} + x^3 \vec{a}_3 \right) = \vec{a}_3
\end{aligned}$$

A bázisvektorok birtokában némi számolással, adódik a metrikus tenzor mátrixa:

$$[g_{kl}] = [\vec{g}_k \cdot \vec{g}_l] = \begin{bmatrix} [a_0 + (b_0 + x^3) \cos x^2]^2 & 0 & 0 \\ 0 & (b_0 + x^3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

melyből jól látszik, hogy a tóruszfelületre épített térbeli görbevonalú KR ortogonális.

A felületi koordinátarendszer metrikus tenzora lokalizálással határozható meg:

$$[a_{\alpha\beta}] = [\bar{g}_{\alpha\beta}] = [g_{\alpha\beta}(x^\gamma, 0)] = \begin{bmatrix} (a_0 + b_0 \cos x^2)^2 & 0 \\ 0 & b_0^2 \end{bmatrix}$$

Mivel a fenti mátrixok diagonálisak a kontravariáns mértéktenzorok is könnyen számíthatók:

$$\begin{aligned}
[g^{kl}] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{[a_0 + (b_0 + x^3) \cos x^2]^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(b_0 + x^3)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
[a^{\alpha\beta}] &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(a_0 + b_0 \cos x^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(b_0)^2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Az előadáson elhangzottak alapján:

$$[b_{\alpha\beta}] = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta,3} \Big|_{x_3=0} = \begin{bmatrix} - (a_0 + b_0 \cos x^2) \cos x^2 & 0 \\ 0 & -b_0 \end{bmatrix}$$

a kovariáns görbületi tenzor.

A vegyes indexes alak indexemeléssel adódik:

$$[b_\alpha{}^\beta] = [b_{\alpha\gamma} a^{\gamma\beta}] = \begin{bmatrix} -\frac{\cos x^2}{(a_0 + b_0 \cos x^2)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b_0} \end{bmatrix}$$

Mivel $b_1^2 = b_2^1 = 0$ az $x^1 = \text{áll.}$ és $x^2 = \text{áll.}$ koordinátavonalak görbületi vonalak. Az előadásban elhangzottak alapján pedig, következik, hogy

$$R_1 = \frac{a_0 + b_0 \cos x^2}{\cos x^2} \quad \text{és} \quad R_2 = b_0.$$

a főgörbületi sugarak.

10.2. Igazolja

hogy fennáll a következő összefüggés:

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{g_0}} \partial_l (\sqrt{g_0} g^{lk} \partial_k \Phi) .$$

Megoldás:

Az előadáson elhangzottak alapján írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= g^{lk} (\partial_k \Phi)_{;l} = [g^{lk} (\partial_k \Phi)] \partial_l + \Gamma_{ls}^l g^{sk} (\partial_k \Phi) = \\ &= \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g_0}} \partial_l [g^{lk} (\partial_k \Phi)] + \frac{(\sqrt{g_0} \partial_s)}{\sqrt{g_0}} g^{sk} (\partial_k \Phi) = \frac{1}{\sqrt{g_0}} \partial_l \{ \sqrt{g_0} [g^{lk} (\partial_k \Phi)] \} \end{aligned}$$

ami egyben a példa állításának igazolása is.

10.3. Igazolja

hogy a következő kifejezés igaz:

$$a_{kl;qp} - a_{kl;pq} = a_{km} R^m_{lqp} + a_{ml} R^m_{kqp} .$$

Megoldás:

A háromszor kovariáns $a_{kl;q}$ tenzor p szerinti

$$(a_{kl;q})_{;p} = (a_{kl;q} \partial_p) - \Gamma_{kp}^s a_{sl;q} - \Gamma_{lp}^s a_{ks;q} - \Gamma_{qp}^s a_{kl;s}$$

kovariáns deriváltjával – felcserélve a p és q indexet a kivonandóba történő helyettesítéskor – írható, hogy

$$a_{kl;qp} - a_{kl;pq} = (a_{kl;q}) \partial_p - \Gamma_{kp}^s a_{sl;q} - \Gamma_{lp}^s a_{ks;q} - (a_{kl;p}) \partial_q - \Gamma_{kq}^s a_{sl;p} + \Gamma_{lq}^s a_{ks;p}$$

Ebben az egyenletben $a_{kl;q}$ az előadáson felírtak alapján számítható:

$$a_{kl;q} = (a_{kl} \partial_q) - \Gamma_{kq}^m a_{ml} - \Gamma_{lq}^m a_{km}$$

Alkalmas indexcserékkel helyettesítve az utóbbi képletet a D_{klqp} különbségre a

$$\begin{aligned} D_{klqp} &= a_{kl;qp} - a_{kl;pq} = \\ &= \partial_p \left(\underline{a_{kl} \partial_q} - \Gamma_{kq}^m a_{ml} - \Gamma_{lq}^m a_{km} \right) - \Gamma_{kp}^s \left(\underline{a_{sl} \partial_q} - \Gamma_{sq}^m a_{ml} - \underline{\Gamma_{lq}^m a_{sm}} \right) - \\ &- \Gamma_{lp}^s \left(\underline{a_{ks} \partial_q} - \underline{\Gamma_{kq}^m a_{ms}} - \Gamma_{sq}^m a_{km} \right) - \\ &- \partial_q \left(\underline{a_{kl} \partial_p} - \Gamma_{kp}^m a_{ml} - \Gamma_{lp}^m a_{km} \right) - \Gamma_{kq}^s \left(\underline{a_{sl} \partial_p} - \Gamma_{sp}^m a_{ml} - \Gamma_{lp}^m a_{sm} \right) - \\ &- \Gamma_{lq}^s \left(\underline{a_{ks} \partial_p} - \underline{\Gamma_{kp}^m a_{ms}} - \underline{\Gamma_{sp}^m a_{km}} \right) - \end{aligned}$$

eredményt kapjuk. Vegyük észre, hogy a fenti egyenletben az aláhúzott párok összege zérus. Könnyen ellenőrizhető az is, hogy azon tagok összege amelyben az $a_{ml} \partial_p$, $a_{km} \partial_p$, $a_{ml} \partial_p$ és $a_{km} \partial_q$ parciális deriváltak megjelennek ugyancsak zérust ad eredményül feltéve, hogy az s néma indexeket m -re nevezzük át ahol szükséges. A végső eredmény rendezés után adódik:

$$\begin{aligned} a_{kl;qp} - a_{kl;pq} &= \\ &= a_{km} \left(\partial_q \Gamma_{pl}^m - \partial_p \Gamma_{ql}^m + \Gamma_{qs}^m \Gamma_{pl}^s - \Gamma_{ps}^m \Gamma_{ql}^s \right) + a_{ml} \left(\partial_q \Gamma_{pk}^m - \partial_p \Gamma_{pk}^m + \Gamma_{qs}^m \Gamma_{pk}^s - \Gamma_{ps}^m \Gamma_{qk}^s \right) . \end{aligned}$$

A zárójelben álló kifejezések rendre R^m_{lqp} és R^m_{kqp} . Ez egyben az állításunk igazolását is jelenti. Mivel háromméretű térben a görbületi tenzor zérus értékű a kapott eredmény azt is jelenti, hogy másodrendű kovariáns tenzorok kovariáns deriváltjai esetén a deriválások sorrendje felcserélhető.

10.4. Igazoljuk

felhasználva a determinánsokkal és adjungáltakal kapcsolatos ismereteinket, hogy a felületre épített térbeli görbevonalú koordinátarendszerben:

$$\det(g_{kl}) = |g_{kl}| = \frac{1}{2!} e^{\alpha\beta 3} e^{\tau\nu 3} g_{\alpha\tau} g_{\beta\nu}$$

$$g^{kl} = \frac{1}{2g_0} e^{klm} e^{pqr} g_{lq} g_{mr}$$

ahol $g^{3l} = g^{l3} = 0$ és $g^{33} = 1$.

Megoldás:

Az előadásokon elhangzottakra tekintettel, írhatjuk, hogy

$$|g_{kl}| = \frac{1}{3!} e^{abc} e^{pqr} g_{ap} g_{bq} g_{cr} = \frac{1}{3} \left[\underbrace{\left(\frac{1}{2} e^{abc} e^{pqr} g_{bq} g_{cr} \right)}_{A^{ap}} g_{ap} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} [A^{\alpha\pi} g_{\alpha\pi} + A^{\alpha 3} g_{\alpha 3} + A^{3\pi} g_{3\pi} + A^{33} g_{33}]$$

Az utóbbi képlet tovább egyszerűsödik, ha figyelembe vesszük, hog

$$g_{\alpha 3} = g_{3\alpha} = 0$$

és hogy $A^{\alpha\pi}$ az adjungált, következésképp

$$g_{\alpha\pi} A^{\alpha\pi} = g_{1\pi} A^{1\pi} + g_{2\pi} A^{2\pi} = 2 |g_{kl}|$$

$$g_{33} A^{33} = A^{33} = |g_{kl}|$$

hiszen $g_{1\pi} A^{2\pi}$, $g_{2\pi} A^{2\pi}$ és $g_{33} A^{33}$ rendre a $|g_{kl}|$ determináns első, második és harmadik sor szerinti kifejtése.

A fentiek alapján, illetve felhasználva az előadáson elhangzottakat

$$|g_{kl}| = \frac{1}{3} (2A^{33} g_{33} + A^{33} g_{33}) = A^{33} = \frac{1}{2} e^{3\alpha\beta} e^{3\tau\nu} g_{\alpha\tau} g_{\beta\nu} = \frac{1}{2} e^{\alpha\beta 3} e^{\tau\nu 3} g_{\alpha\tau} g_{\beta\nu}.$$

A metrikus tenzor inverze

$$g^{kl} = \frac{A^{kl}}{g_0}.$$

Az adjungáltak számítására szolgáló képlet felhasználásával innnen a

$$g^{kl} = \frac{1}{2g_0} e^{klm} e^{pqr} g_{lq} g_{mr}$$

eredmény következik. Eszerint, kihasználva a permutációs szimbólum értelmezését

$$g^{\kappa\pi} = \frac{1}{2g_0} (e^{\kappa\lambda 3} e^{\pi\chi 3} g_{\lambda\chi} g_{33} + e^{\kappa 3\lambda} e^{\pi 3\chi} g_{33} g_{\lambda\chi}) = \frac{1}{g_0} e^{\kappa\lambda 3} e^{\pi\chi 3} g_{\lambda\chi}.$$

Tekintettel az előadáson felírtakra és az $A^{33} = |g_{kl}|$ egyenletre, a g^{kl} szerkezetére a következő összefüggések írhatók fel:

$$g^{3\pi} = g^{\pi 3} = \frac{1}{2g_0} (e^{3\lambda\mu} e^{\pi 3\rho} g_{\lambda 3} g_{\mu\rho} + e^{3\lambda\mu} e^{\pi\kappa 3} g_{\lambda\kappa} g_{\mu 3}) = 0$$

$$g^{33} = \frac{1}{2g_0} e^{3\lambda\mu} e^{3\kappa\rho} g_{\lambda\kappa} g_{\mu\rho} = \frac{1}{g_0} A^{33} = 1$$

A $g^{\kappa\pi}$ -re egy átalakított formulát is fel tudunk írni:

$$g^{\kappa\pi} = \sqrt{g^0} e^{\kappa\lambda 3} \sqrt{g^0} e^{\pi\chi 3} g_{\lambda\chi} = \varepsilon^{\kappa\lambda 3} \varepsilon^{\pi\chi 3} g_{\lambda\chi}.$$

Utóbbi egyenletnek, amint az a metrikus tenzorral történő átszorozásokkal könnyen kimutatható, a

$$g_{\kappa\pi} = \varepsilon_{\kappa\lambda 3} \varepsilon_{\pi\chi 3} g^{\lambda\chi}$$

egyenlet a párja.